L3 Mathématiques

Interrogation 10-2006

1. Soient n un entier positif non nul et $k \in \mathbf{Z}$ non divisible par n. Montrer que l'ordre de $\bar{k} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est égal à $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$.
Pour ce faire on pourra poser $\mu = \mathrm{pgcd}(n, k)$, puis on définira n' et k' par $n = n'\mu$, $k = k'\mu$. On montrera que l'ordre de $\bar{k}$ divise n'. Montrer que le plus petit entier positif non-nul ℓ tel que n divise $\ell k'\mu$ est n'. Puis montrer que l'ordre de $\bar{k}$ est égal à n'.

1.2. Soit G et H deux groupes, f un endomorphisme de G dans H. Soit $x \in G$ d'ordre k. Que peut-on dire de l'ordre de $f(x)$? Montrer que si f est un automorphisme et l'ordre de x est k, alors $f(x)$ est d'ordre k.

1.3. Etant donné un groupe G on dira que deux éléments x et y de G sont conjugués si il existe $z \in G$ tel que $x = zyz^{-1}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence seront appelées les classes de conjugaison.
Quelle est la classe de conjugaison de l'élément neutre, quelle est la classe de conjugaison d'un élément du centre de G?
Quelles sont les classes de conjugaison dans un groupe abélien?