L3 Mathématiques

Epreuve du 30 Novembre 2004

Les téléphones portables et les calculettes sont interdits

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté croissante

1. Soient n un entier positif non nul et $k \in \mathbf{Z}$ non divisible par n. Montrer que l'ordre de $\bar{k} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est égal à $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(n,k)}$.
Pour ce faire on pourra poser $\mu = \mathrm{pgcd}(n,k)$, puis on définira n' et k' par $n = n'\mu$, $k = k'\mu$. On montrera que l'ordre de $\bar{k}$ divise n'. Puis pour montrer que l'ordre est égal á n' on montrera (en étudiant des pgcd appropriés) que le plus petit entier positif non-nul ℓ tel que n divise $\ell k'\mu$ est n'. On conclura.
Que se passe t'il si k est divisible par n?

2. Soit G un groupe fini d'ordre 81 agissant sur un ensemble à 80 éléments. Montrer qu'il y a au moins un point fixe.

3. Soit k un entier positif donné. Donner un exemple de paire d'éléments h, g dans un groupe G, tels que h soit d'ordre k, g d'ordre 2 et hg d'ordre $k+1$. (Il faudra évidemment commencer par dire dans quel groupe on se place).

4. Soit G un groupe fini d'ordre $2n$ et H un sous-groupe d'ordre n. Soit $x \in G$, selon que $x \in H$ ou $x \notin H$ montrer que l'ensemble xH est soit égal à H, soit égal au complémentaire de H dans G. En considérant (selon les cas envisagés plus haut) les ensembles xHx^{-1} en déduire que H est distingué dans G.

5. Soit G un groupe dont tout élément x vérifie $x^2 = e$ (e est l'élément neutre). Montrer que G est abélien. On suppose de plus que G est fini, montrer qu'il est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \ldots \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, n fois, pour un certain entier n.

6. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p^2. Montrer que G est abélien (citer deux théorèmes du cours qui permettent d'affirmer que tout groupe d'ordre p^2 est abélien en explicitant le raisonnement). On suppose dans la suite G abélien.
Montrer que l'ordre d'un élément est égal à 1, p ou p^2.
Montrer que si il y a un élément d'ordre p^2 le groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$.
Montrer que si tout élément est d'ordre 1 ou p le groupe est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (on pourra commencer par montrer qu'il y a au moins deux sous-groupes d'ordre p distincts).