L3 Mathématiques

Interrogation 11-2006

On conserve d'un bout l'autre de la feuille les mêmes notations.

1. Soient H et G deux groupes finis, et α un homomorphisme de H dans G. Montrer que l'image d'une classe de conjugaison dans G est contenue dans l'image d'une classe de conjugaison dans H. En déduire que α induit une application $\tilde{\alpha}$ de l'ensemble des classes de conjugaison dans H dans l'ensemble des classes de conjugaison dans G.

1.2. Montrer que si $\tilde{\alpha}$ est injective il en est de même de α.

1.3. On suppose α injective et on identifie H un sous-groupe de G. Soit n l'indice de H dans G. Et soient $g_1, \dots, g_n$ des représentants des classes gauche selon H dans G. Montrer que l'ensemble des conjugués d'éléments de H dans G est égal

$$U = \bigcup_{i=1,\dots,n} g_i H g_i^{-1}$$

Montrer que si $n > 1$ cet ensemble ne peut être égal G (on observera que $e \in g_i H g_i^{-1}$ pour tout i).
En déduire que $\tilde{\alpha}$ est bijectif alors α est bijectif (on remarquera que si $\tilde{\alpha}$ est surjectif alors on a $U = G$).