

L3 Mathématiques

Interrogation 11-2006

On conserve d'un bout à l'autre de la feuille les mêmes notations.

1. Soient H et G deux groupes finis, et α un homomorphisme de H dans G . Montrer que l'image d'une classe de conjugaison dans H est contenue dans une classe de conjugaison dans G . En déduire que α induit une application $\tilde{\alpha}$ de l'ensemble des classes de conjugaison dans H dans l'ensemble des classes de conjugaison dans G .

La classe de conjugaison de x dans H est l'ensemble des éléments de la forme uxu^{-1} , pour u décrivant H . Cet ensemble est envoyé par α sur l'ensemble des éléments $\alpha(u)\alpha(x)\alpha(u)^{-1}$ qui est contenu dans l'ensemble des éléments $v\alpha(x)v^{-1}$, v décrivant G qui est la classe de conjugaison de $\alpha(x)$ dans G . Donc l'application de l'ensemble des classes de conjugaison de H dans l'ensemble des classes de conjugaison de G qui à la classe de x associe la classe de $\alpha(x)$ est bien définie (si on prend x' dans la classe de x , $\alpha(x')$ est dans la classe de $\alpha(x)$). On la note $\tilde{\alpha}$.

1.2. Montrer que si $\tilde{\alpha}$ est injective il en est de même de α .

L'homomorphisme α est injectif si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre de H . Or la classe de conjugaison d'un élément du noyau est envoyée par $\tilde{\alpha}$ sur la classe de l'élément neutre de G . Mais une seule classe est envoyée sur cette classe par $\tilde{\alpha}$ à cause de l'injectivité. Comme la classe de l'élément neutre e_H de H est envoyée sur celle de l'élément neutre e_G de G aucune autre classe ne peut être envoyée dessus, donc aucun élément différent de e_H a e_G pour image. Donc le noyau est réduit à e_H .

1.3. On suppose α injective et on identifie H à son image qui est un sous-groupe de G . Soit n l'indice de H dans G . Et soient g_1, \dots, g_n des représentants des classes à gauche selon H dans G . Montrer que l'ensemble des conjugués d'éléments de H dans G est égal à

$$U = \bigcup_{i=1, \dots, n} g_i H g_i^{-1}$$

Montrer que si $n > 1$ cet ensemble ne peut être égal à G (on observera que $e \in g_i H g_i^{-1}$ pour tout i).

En déduire que $\tilde{\alpha}$ est bijectif alors α est bijectif (on remarquera que si $\tilde{\alpha}$ est surjectif alors on a $U = G$).

Soit x le conjugué dans G d'un élément du sous-groupe H . C'est un élément de la forme uhu^{-1} avec $u \in G, h \in H$. Pour un certain i on a $ug_i h', h' \in H$. Soit $x = g_i h' h h'^{-1} g_i^{-1}$, comme $h' h h'^{-1} \in H$. On a le résultat.

L'ensemble U ne peut être égal à G car son cardinal est au plus $n\text{Card}(H) - n + 1$ car $e \in g_i H g_i^{-1}$ pour tout i . Donc, comme $n\text{Card}(H) = \text{Card}(G)$, si $n > 1$ $\tilde{\alpha}$ ne peut être surjectif (il y a toujours au moins un élément de G qui n'est pas dans la classe de conjugaison d'un élément de H).