

L3 Mathématiques

Interrogation 12-2006

Soit φ un automorphisme de \mathcal{S}_4 . On rappelle que l'image par φ de la classe de conjugaison d'un élément x est la classe de conjugaison de $\varphi(x)$.

1. Rappeler quelles sont les classes de conjugaison dans \mathcal{S}_4 et combien chacune ont d'éléments.

Voir le cours, il y a (hors la classe de l'élément neutre) 6 transpositions, 8 3-cycles et 3 produit de transpositions à supports disjoints.

2. En déduire que l'image d'une transposition (resp. d'un 3-cycle, d'un produit de transpositions à supports disjoints) par φ est une transposition (resp. un 3-cycle, un produit de transpositions à supports disjoints).

L'image de la classe de conjugaison des transpositions a 6 éléments et est donc la classe des transpositions car les autres classes n'ont pas 6 éléments.

3. Montrer que l'on a $\varphi((1, 2)) = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $\varphi((2, 3)) = (\alpha_2, \alpha_3)$, avec certains $\alpha_i \in \{1, 2, 3, 4\}$. On utilisera la question précédente et le fait que $(1, 2)$ et $(2, 3)$ ne commutent pas. De même montrer que $\varphi((3, 4)) = (\alpha_3, \alpha_4)$, avec $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ une permutation a de $\{1, 2, 3, 4\}$.

$\varphi((1, 2))$ est une transposition (α, β) , ainsi que $\varphi((2, 3)) = (\gamma, \delta)$. Comme $(1, 2)$ et $(2, 3)$ ne commutent pas il en est de même de (α, β) et (γ, δ) . Il y a donc un élément commun entre les sous-ensembles $\{\alpha, \beta\}$ et $\{\gamma, \delta\}$. Quitte à réordonner on a le résultat. La question suivante suit par le même type d'argument. Il faut vérifier cependant la dernière assertion. Si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ n'est pas une permutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ on montre que φ ne peut être surjectif et donc ne peut être un automorphisme. En effet supposons par exemple que $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \{1, 2, 3\}$, alors comme les 3 transpositions considérées plus haut engendrent \mathcal{S}_4 l'image de φ est contenue dans \mathcal{S}_3 (puisque les images de ces transpositions engendrent l'image sont contenues dans \mathcal{S}_3).

4. Montrer que $\psi = \gamma_a \circ \varphi$ laisse fixe les transpositions $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ (c-a-d que $\psi((1, 2)) = (1, 2)$ etc...

Faire le calcul.

5. En déduire que φ est un l'automorphisme intérieur $\gamma_{a^{-1}}$.

ψ laisse fixe des générateurs de \mathcal{S}_4 donc est l'identité. C'est un lemme général : un homomorphisme d'un groupe qui laisse fixe un ensemble de générateurs est l'identité.