

**L3 Mathématiques**  
**Epreuve du 3 Février 2006**

*Les téléphones portables et les calculettes sont interdits*

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté croissante, si  $p$  désigne un nombre premier on rappelle que  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{F}_p$  désignent le même objet. Les questions 1.3, 1.4, 2.3 et 3.4 seront notées hors barême.

**1.1.** Décrire toutes les classes de conjugaison dans les groupes symétriques  $\mathcal{S}_4$ ,  $\mathcal{S}_5$  et  $\mathcal{S}_6$  dont les éléments sont d'ordre 2 ou 3. On donnera le nombre d'éléments de chacune de ces classes. (Remarque : la description des classes de conjugaison est une question de cours on ne demande pas de faire la démonstration mais seulement d'énoncer le résultat).

**1.2.** Soit  $G$  et  $H$  deux groupes,  $f$  un endomorphisme de  $G$  dans  $H$ . Soit  $x \in G$  d'ordre  $k$ . Que peut-on dire de l'ordre de  $f(x)$ ? Montrer que si  $f$  est un automorphisme et l'ordre de  $x$  est  $k$ , alors  $f(x)$  est d'ordre  $k$ .

**1.3.** Démontrer que l'image d'une classe de conjugaison de  $G$  par  $f$  est contenue dans une classe de conjugaison de  $H$ .

**1.4.** Soit  $f$  un automorphisme de  $\mathcal{S}_n$ ,  $n = 4, 5, 6$ . Soit  $\tau$  une transposition, montrer que si  $n = 4, 5$   $f(\tau)$  est une transposition. Peut on faire le même raisonnement si  $n = 6$ ? Que dire de l'image d'un 3-cycle. (On utilisera les deux questions précédentes).

**2.1.** Donner la liste des polynômes irréductibles sur le corps  $\mathbf{F}_2$  de degré inférieur ou égal à 4.

**2.2.** Montrer que l'anneau quotient  $L = \mathbf{F}_2[X]/(X^3 + X^2 + 1)$  est un corps. Précisez son nombre d'éléments et donnez sa table de multiplication.

**2.3.** Le polynôme  $P(T) = T^3 + T + 1$  est-il irréductible dans  $L[X]$ . Donner la liste des éléments  $u$  de  $L$  tels que  $P(u) = 0$ .

**3.1.** On admet dans la suite que l'anneau  $\mathbf{Z}[i]$  des entiers de Gauss est euclidien donc principal. L'entier 13 est-il premier dans  $\mathbf{Z}[i]$ ?

**3.2.** On définit sur le produit  $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$  une structure d'anneau en définissant l'addition par  $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$  et une multiplication par  $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$ . On admettra que ceci définit une structure d'anneau, on notera  $i$  pour  $(0, 1)$  et  $a + bi$  pour  $(a, b)$ . Cet anneau est-il intègre, est-ce un corps? Qu'en est-il si dans les définitions on remplace 7 par 19?

**3.3.** Montrer que l'anneau quotient  $\mathbf{Z}[i]/(7)$  est intègre. En déduire que 7 est irréductible dans  $\mathbf{Z}[i]$ .

**3.4.** Montrer que l'anneau quotient  $\mathbf{Z}[i]/(3 + 2i)$  est isomorphe à  $\mathbf{F}_{13}$ .

**4.** Les polynômes suivants à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  sont-ils irréductibles :  $X^3 - 2$ ,  $X^3 + 8X^2 + 17X + 3$ ,  $X^3 + X^2 + 5X + 4$  (on fera des réductions modulo un nombre premier bien choisi).