

Feuille d'exercices n° 1

1-1 – Soient A , B et C trois parties d'un ensemble E , non vide. Les propositions ci-dessous sont-elles exactes ?

- a) $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$. b) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$.
c) $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C \implies B = C$.

On note A^c le complémentaire de A dans E . Donner une proposition équivalente à la suivante : $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

1-2 – Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F .

a) Rappeler les définitions des notions d'*image* d'un sous-ensemble de E et d'*image réciproque* d'un sous-ensemble de F par f .

b) Donner plusieurs conditions équivalentes pour exprimer que f est *injective*, *surjective* ou *bijective* de E dans F .

c) Soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. Écrire à l'aide de quantificateurs, de connecteurs logiques et d'opérations de la théorie des ensembles que :

- α) f n'est pas injective. β) La restriction de f à A n'est pas surjective sur F .
 γ) $f(A)$ contient B . δ) B ne contient pas $f(A \cap A')$. ϵ) $f^{-1}(B)$ contient A .

d) Soit de plus $B' \in \mathcal{P}(F)$. Prouver quelques unes des propriétés :

- α) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$. β) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
 γ) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. δ) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

e) Montrer que $B \supset f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$, $\forall B \in \mathcal{P}(F)$ et l'équivalence

$$f \text{ surjective} \iff f(f^{-1}(B)) = B, \quad \forall B \in \mathcal{P}(F).$$

f) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$ et l'équivalence

$$f \text{ injective} \iff f^{-1}(f(A)) = A, \quad \forall A \in \mathcal{P}(E).$$

g) Soit φ l'application de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi(B) = f^{-1}(B)$.

Démontrer les équivalences : $\begin{cases} \alpha) f \text{ surjective} \iff \varphi \text{ injective.} \\ \beta) f \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective.} \end{cases}$

1-3 – On suppose ici que $\text{card } E = \text{card } F$ est fini. Montrer les équivalences

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Citer un autre catégorie classique d'ensembles et d'applications pour lesquels ces équivalences sont vérifiées.

1-4 – Le but de cet exercice est de vérifier que \mathbb{N}^* et \mathbb{Q}^* sont équipotents, en exhibant une bijection explicite entre ces deux ensembles.

a) Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(2m) = -m$ et $f(2m+1) = m+1$, $\forall m \in \mathbb{N}$, est une bijection, en précisant sa réciproque φ .

b) Préciser les premiers termes de la suite croissante $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des nombres premiers. On rappelle que tout élément n de \mathbb{N}^* peut se décomposer de façon unique sous la forme $n = \prod_{i \geq 1} p_i^{a_i}$ où la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est telle que les a_i de \mathbb{N} sont nuls sauf

un nombre fini d'entre eux. Préciser cette décomposition pour $n = 720$ et $n' = 300$.

c) De même, tout q de \mathbb{Q}^* peut se décomposer de façon unique sous la forme $q = \prod_{i \geq 1} p_i^{a_i}$ où la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est telle que les $a_i \in \mathbb{Z}$ sont nuls sauf un nombre

fini d'entre eux. Préciser cette décomposition pour $q = \frac{117}{88}$ et $q' = \frac{175}{192}$.

d) Montrer que la correspondance donnée par $F(\prod_{i \geq 1} p_i^{a_i}) = \prod_{i \geq 1} p_i^{f(a_i)}$ définit une bijection F entre \mathbb{N}^* et \mathbb{Q}^* , en précisant sa réciproque Φ . Préciser $F(720)$, $F(300)$, $\Phi\left(\frac{117}{88}\right)$ et $\Phi\left(\frac{175}{192}\right)$.

1-5 – Dans cet exercice, on se donne une application $f : E \rightarrow F$. On note \sim la relation d'équivalence sur E donnée par $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Préciser la partition en classe d'équivalence associée de E et donner un système complet de représentants pour \sim dans E aussi naturel que possible, dans les cas suivants :

- a) $E = F = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$. b) $E = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}_+$, $f : z \mapsto |z|$.
c) $E = F = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto \cos 2\pi x$. d) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$, $f : (x, y) \mapsto x + y$.

1-6 – a) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On rappelle que la notation $b|a$ (b divise a) signifie $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. Montrer que la divisibilité munit \mathbb{N} d'une relation d'ordre partiel. En est-il de même pour \mathbb{Z} ?

b) Soit la relation d'équivalence \mathcal{R} sur \mathbb{Z} , $n \mathcal{R} n' \Leftrightarrow 3|n - n'$. Rappeler quelle partition de \mathbb{Z} lui est associée et donner un système complet naturel de représentants pour \mathcal{R} .

1-7 – a) Soit $M_n(\mathbb{C})$, l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n . On dit que $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont *semblables* et on écrit $A \mathcal{R} B$, s'il existe $P \in M_n(\mathbb{C})$ inversible, telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que la relation « A et B sont semblables » est une relation d'équivalence.

b) On suppose que A est diagonalisable de valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Montrer que sa classe d'équivalence \bar{A} par \mathcal{R} est formée par les matrices diagonalisables qui ont les mêmes valeurs propres. Donner un représentant pour chaque classe d'équivalence dans l'ensemble des matrices diagonalisables.

c) On suppose $n = 2$ pour simplifier. Trouver les classes d'équivalence de $M_2(\mathbb{C})$ pour \mathcal{R} et donner un système complet de représentants de $M_2(\mathbb{C})/\mathcal{R}$.