

Feuille d'exercices n° 2

2-1 – La loi $a * b = -(a + b)$ sur \mathbb{Z} est-elle Commutative? Associative?

2-2 – Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $*$. Rappeler pourquoi si e (resp. f) est un élément neutre à gauche (resp. à droite) pour $(E, *)$, on a $e = f$.

On suppose désormais que $a * b = b, \forall a, b \in E$ et que $\text{card } E > 1$. Étudier la commutativité et l'associativité de $*$. Existe-t-il un élément neutre à gauche?

2-3 – a) Rappeler pourquoi dans un groupe G l'élément neutre e est unique. Montrer qu'on a $\forall g, g' \in G, gg' = e \Rightarrow \{g^{-1} = g', g'^{-1} = g\}$.

b) Soit $g, g', g'' \in G$ qui vérifient la relation $gg'g'' = e$. (L'élément neutre de G est e). Expliciter g^{-1}, g'^{-1} et g''^{-1} en fonction de g, g' et g'' .

c) Soient $g, h \in G$. Rappeler une expression de $(gh)^{-1}$. Montrer plus généralement que $(g_1g_2 \dots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \dots g_2^{-1}g_1^{-1}$.

d) Soit $c \in G$. Montrer que l'application $x \rightarrow cx$ est une bijection de G .

2-4 – Soit S un sous-ensemble non vide d'un groupe G . On définit dans G la relation $x\mathcal{R}_1y \Leftrightarrow xy^{-1} \in S$. Montrer que si \mathcal{R}_1 est une relation d'équivalence, alors S est un sous-groupe de G .

2-5 – Établir les tables d'addition de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2-6 – Soit G un groupe tel que $\forall g \in G, g = g^{-1}$. Montrer que G est abélien. Vérifier que $G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont de tels groupes.

2-7 – a) Montrer que si T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires inférieures, il en est de même de leur produit T_1T_2 . Comparer les diagonales de T_1, T_2 et T_1T_2 .

b) Montrer que l'ensemble \mathcal{S} des matrices triangulaires inférieures inversibles est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$.

c) Montrer que l'ensemble \mathcal{S} des matrices triangulaires inférieures dont la diagonale est formée de 1 est un sous-groupe de \mathcal{S} .

2-8 – Soit un ensemble E . On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la loi Δ , appelée *différence symétrique*, par $X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

a) Montrer par récurrence sur n que pour $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$\left(\dots \left((X_1 \Delta X_2) \Delta X_3 \right) \Delta \dots X_n \right) = \{x \in E \mid x \text{ appartient à un nombre } \textit{impair} \text{ de } X_i\}$$

b) En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien.

2-9 – a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $H \neq \{\bar{0}\} \leq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Soit $\alpha > 0$ le plus petit entier tel que $\bar{\alpha} \in H$. Montrer que α divise $n = k\alpha$ et que $H = \{\bar{0}, \bar{\alpha}, \bar{2\alpha}, \dots, \overline{(k-1)\alpha}\}$.

b) Quels sont les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$? Préciser le cas $n = 12$.

2-10 – a) Rappeler la définition d'un nombre premier de \mathbb{Z} . Préciser les premiers termes de la suite croissante $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des nombres premiers > 0 . On rappelle que tout élément n de \mathbb{N}^* peut se décomposer de façon unique sous la forme $n = \prod_{i \geq 1} p_i^{a_i}$ où la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est telle que les a_i de \mathbb{N} sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Donner cette décomposition pour $n = 720$ et $n' = 300$.

b) Soit les éléments $n = \prod_{i \geq 1} p_i^{\alpha_i}$ et $n' = \prod_{i' \geq 1} p_{i'}^{\alpha_{i'}}$ de \mathbb{N} et leur décomposition en facteurs premiers. Rappeler les définitions de p.g.c.d (n, n') et de p.p.c.m (n, n') et donner leur décomposition en facteurs premiers. Retrouver la relation

$$\text{p.g.c.d}(n, n') \text{ p.p.c.m}(n, n') = nn'.$$

2-11 – On rappelle l'identité de Bezout : pour $a, b \in \mathbb{Z}^*$, a et b premiers entre eux, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

a) En déduire que pour $a, b \in \mathbb{Z}^*$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = \text{p.g.c.d}(|a|, |b|)$.

b) Déterminer le p.g.c.d d de 1761 et de 1567 à l'aide de l'algorithme d'Euclide puis par décomposition en facteurs premiers.

c) Trouver des entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $d = 1761u_0 + 1567v_0$.

d) En déduire tous les couples (u, v) dans \mathbb{Z} tels que $d = 1761u + 1567v$.

2-12 – Vérifier que l'intersection de deux sous-groupes H_1 et H_2 d'un groupe G est un sous-groupe de G . Montrer qu'il en est de même de leur réunion si et seulement si on a $H_1 \subseteq H_2$ ou $H_2 \subseteq H_1$.

2-13 – On rappelle que les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $n\mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Que peut-on dire de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$?

2-14 – a) Soit un ensemble E . Montrer que l'ensemble (G, \circ) des bijections de E muni de la composition est un groupe non abélien dès que $\text{card } E \geq 3$.

b) On prend $E = \mathbb{Q}$. Montrer que les applications $f_{n,m} : a \mapsto na + m$, (avec $n \in \mathbb{Q}^*$ et $m \in \mathbb{Q}$) de \mathbb{Q} dans lui-même forment un sous-groupe de G .

2-15 – On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices inversibles à coefficients dans \mathbb{Z} ainsi que leur inverse. Montrer que c'est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$. Montrer que pour qu'une matrice à coefficients entiers appartienne à $GL_2(\mathbb{Z})$, il faut et il suffit que son déterminant soit égal à ± 1 . Donner quelques exemples de telles matrices.