

Feuille d'exercices n° 4

4-1 – Montrer que l'application $\exp : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un isomorphisme de groupes. Préciser l'isomorphisme réciproque.

4-2 – a) Rappeler pourquoi $\varphi = \det$ définit un homomorphisme de $O(n, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R}_*^* . Préciser l'image et le noyau de φ . (On note $\text{Ker } \varphi = \text{SO}(n, \mathbb{R})$).

b) Préciser la forme des matrices de $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ et de $O(2, \mathbb{R}) \setminus \text{SO}(2, \mathbb{R})$.

c) Donner un isomorphisme de S_1 sur $\text{SO}(2, \mathbb{R})$.

4-3 – a) Soit $U(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{A}A = \text{Id}\}$. Vérifier que $U(n, \mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$. Soit $\varphi : U(n, \mathbb{C}) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ avec $\varphi = \det$. Préciser l'image et le noyau de φ . (On note $\text{Ker } \varphi = \text{SU}(n, \mathbb{C})$).

b) Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in U(2, \mathbb{C})$. Montrer qu'on a $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$. En déduire que $U(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b}e^{i\theta} \\ b & \bar{a}e^{i\theta} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1, \theta \in S_1 \right\}$. Préciser $\text{SU}(2, \mathbb{C})$.

4-4 – a) Soient G un groupe commutatif d'élément neutre e et une partie finie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ de G . Montrer que tout élément a du sous-groupe $H = \langle A \rangle$ qu'ils engendrent peut s'écrire sous la forme $a = \prod_{1 \leq i \leq p} a_i^{r_i}$ avec $r_i \in \mathbb{Z}$.

b) Que devient ce résultat lorsque $G = (\mathbb{Z}, +)$?

c) On suppose que les a_i sont d'ordre p_i fini. Montrer qu'on peut choisir les r_i de telle sorte que $0 \leq r_i < p_i$. Ces choix sont-ils uniques ?

d) On suppose que $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_p \in G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser H . Étudier les cas numériques $n = 12$, $p = 2$, $a_1 = \bar{6}$ et $a_2 = \bar{9}$ puis $p = 1$, $a_1 = \bar{7}$.

4-5 – Soient a_1 et a_2 deux éléments d'un groupe G d'élément neutre e , d'ordre fini p_1 et p_2 premiers entre eux. Montrer qu'on a $\langle \{a_1\} \rangle \cap \langle \{a_2\} \rangle = \{e\}$. Supposons que $a_1 a_2 = a_2 a_1$, alors $H = \langle \{a_1, a_2\} \rangle$ est commutatif. Montrer que tout $a \in H$ peut se décomposer de façon unique sous la forme $a = a_1^{r_1} a_2^{r_2}$ avec $0 \leq r_i < p_i$, ($i = 1, 2$).

4-6 – a) Soient $k, n \in \mathbb{N}$ et $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On pose $\varphi(\bar{p}) = \underbrace{\bar{p} + \dots + \bar{p}}_{k \text{ fois}} = \overline{k p}$ pour $p \in \mathbb{Z}$; on voit que $\varphi \in \text{End}(A)$. Préciser $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

b) Soient G un groupe, $a \in G$ d'ordre $n \in \mathbb{N}$, $A' = \langle \{a\} \rangle$ et $\varphi' \in \text{End}(A')$ donné par $\varphi'(b) = b^k = a^{kq}$ pour $b = a^q \in A'$. Préciser $\text{Ker } \varphi'$ et $\text{Im } \varphi'$.

c) Même question si $a \in G$ est supposé d'ordre infini.