

Feuille d'exercices n° 5

5-1 – (Complément sur l'exercice à faire 2.1). Soit H un sous-ensemble d'un groupe G . On pose $N'_H = \{x \in G \mid xHx^{-1} \subset H\}$ et $N_H = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}$. On dit que N_H est le *normalisateur* ou bien le *stabilisateur* de H par l'action adjointe. On associe à $x \in N'_H$ l'application $f_x : H \rightarrow H$, donnée par $f_x(y) = xyx^{-1}$.

a) Réécrire à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques les égalités $xHx^{-1} \subset H$ et $xHx^{-1} = H$.

b) Soit $x \in N'_H$, montrer que f_x est injective.

c) Soit $x \in N'_H$. Montrer les équivalences :

$$x^{-1} \in N'_H \iff x \in N_H \iff f_x \text{ surjective} \iff f_x \text{ bijective avec } f_x^{-1} = f_{x^{-1}}.$$

d) On suppose que H est *fini*. Montrer l'égalité. $N'_H = N_H$.

e) On suppose maintenant que $G = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \right\}$

et que $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n^2 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Vérifier que G est bien un sous-groupe de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$. Trouver N'_H et N_H et constater que $N_H \subset N'_H$ avec $N_H \neq N'_H$.

f) Soit $\langle H \rangle$ le sous-groupe engendré par H . Montrer que $N_H \subset N_{\langle H \rangle}$.

5-2 – Soient $n > 0$, $k, \mu \in \mathbb{Z}$, avec $\bar{\mu} \in \langle \bar{k} \rangle$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que $o(\bar{\mu}) \mid o(\bar{k})$.

5-3 – Soient G, G' deux groupes et φ un épimorphisme de G sur G' . Montrer l'implication $H \triangleleft G \Rightarrow \varphi(H) \triangleleft G'$.

5-4 – Soit G un groupe, $H \triangleleft G$ et $K \triangleleft G$. Montrer que $\langle H \cup K \rangle \triangleleft G$.

5-5 – Rappeler pourquoi le sous-groupe $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est distingué dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et pourquoi $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{SL}_n(\mathbb{R})$ est commutatif.

5-6 – (D'après *partiel 2004*). a) Soient $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R} \right\}$ et $T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ dans $\text{GL}(2, \mathbb{R})$. Vérifier qu'on a $T \leq H \leq \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

b) Montrer que H n'est pas commutatif et que T est isomorphe à \mathbb{R} .

c) Montrer que $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, donné par $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, d)$ est un homomorphisme de groupes. Préciser $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

d) Prouver par deux méthodes que $T \triangleleft H$. Montrer que $T \not\triangleleft \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

e) Donner un groupe commutatif isomorphe à H/T . Préciser les classes de congruence modulo H de T , en en donnant un représentant naturel.