Groupes, exemples et définitions, théorème de Lagrange

1 Définitions

- Associativité.
- Elément neutre.
- Opposé ou inverse.
- Commutativité. $\times$.

Définition d'un groupe.
Sous-groupes.
Exemples :

- $(n) = n\mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$
- $S^1 \subset \mathbb{C}^*$.
- Matrices orthogonales dans les matrices inversibles.
- Translations du plan.
- Rotations du plan.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}^n$
- $\{+1, -1\}$.
- Nombres complexes non nuls avec la loi $\times$.
- S^1 : nombres complexes de module 1 avec la loi $\times$.
- Matrices inversibles.

2 Homorphismes

Homomorphismes (endomorphisme, isomorphisme, automorphisme)
Exemples :

- $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- $t \mapsto e^t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.
- $t \mapsto e^{2\pi i t}$ de $\mathbb{R}$ dans S^1.
- $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$
- $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$
- $\{+1, -1\}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Noyau et image d'un homorphisme.
Sous-groupe distingué ou normal.

3 Relation d'équivalence modulo un sous-groupe

G un groupe H un sous-groupe.
Définition $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$
Classes d'équivalence $xH = \{xh \,|\, h \in H\}$, les classes d'équivalence ont le même nombre d'éléments : le cardinal de H.

Théorème de Lagrange : l'ordre (c'est-à-dire le cardinal) d'un sous-groupe divise l'ordre (c'est-à-dire le cardinal) du groupe.

On peut aussi introduire la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$. Les classes sont alors les sous-ensembles $Hx = \{hx \,|\, h \in H\}$.
Proposition : Un sous-groupe H est distingué si et seulement si les classes à gauche xH coincident aux classes à droite Hx.

4 Ordre d'un élément

Définition. $\mathrm{ord}(x)$.

- Sous-groupe engendré par un élément x : $< x >$. Cardinal de $< x >$.
- $$< x > \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ord}(x)\mathbb{Z}$$
- L'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
- Groupes dont tous les éléments sont d'ordre 2.

5 Groupes particuliers et compléments

Groupes à p éléments p premier.
Groupes à 4 éléments.
Table d'un groupe.
Groupe engendré par une famille d'éléments. Générateurs.

6 Exemples suppplémentaires

- Montrer que les fonctions ln et exp sont des ismorphiosmes réciproques de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'application $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur S^1 (nombres complexes de module 1), quel est son noyau?
- Montrer que l'ensemble des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'ensemble des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
est un groupe isomorphe à S^1.
- Montrer que l'ensemble des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ -sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$$
est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$.
- Montrer que l'ensemble des racines n-ièmes de 1 dans $\mathbb{C}^*$ est un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.