

# Groupes quotients, sous-groupes distingués

## 1 Sous-groupes distingués

Définition d'un sous-groupe distingué à partir du noyau d'un homomorphisme (introduction du noyau et de l'image).

Définition :  $H$  est distingué dans  $G$  si pour tout  $x \in G$   $xHx^{-1} \subset H$ .

### Exemples et résultats

- Cas des groupes abéliens : tout sous-groupe est distingué.
- Le centre d'un groupe  $Z(G)$ .
- un sousq-groupe  $H$  est distingué si et seulement si les classes à gauche  $xH$  et à droite  $Hx$  coïncident.
- Tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.
- Groupe simple (définition).
- Automorphismes intérieurs et extérieurs d'un groupe.

### En seconde lecture

- Quotient par le groupe dérivé.
- Matrices triangulères supérieures.

## 2 Groupes quotients

L'ensemble des classes d'équivalence modulo un sous-groupe distingué a une structure de groupe qui fait de la projection canonique un homomorphisme.

Le produit sur les classes est donné par  $xH * yH = xyH$ .

Décomposition canonique d'un homomorphisme.

Propriété de factorisation des homomorphismes.

Soit  $\phi : G \longrightarrow H$  un homomorphisme de noyau  $K$ . Alors il existe un unique homomorphisme injectif  $\tilde{\phi} : G/K \longrightarrow H$  tel que  $\tilde{\phi} \circ p = \phi$ . Si  $\phi$  est surjectif  $\tilde{\phi}$  est un isomorphisme.

### En seconde lecture

### 3 Exemples

- Le groupe  $S_3$ . Le groupe du triangle équilatéral.
- Les matrices inversibles de déterminant 1.
- Le groupe des transformations affines  $Y = AX + B$ .

On profite de cette section pour introduire les groupes symétriques et calculer leur cardinal.

### 4 Groupes à 6 éléments et à 8 éléments

Le groupe diédral, le groupe quaternionien.

Définitions. Centre, ordre des éléments, sous-groupes etc à faire en détails en cours et à refaire en TD.

Diédral :  $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3, s, s\rho, s\rho^2, s\rho^3\}$ ,  $s\rho s = \rho^3$ . Centre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  engendré par  $\rho^2$ . Quotient  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Elts d'ordre 4  $\rho, \rho^3$ .

Groupe du carré.

Quaternionien  $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ . Centre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  engendré par  $-1$ . Quotient  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Elts d'ordre 4  $i, -i, j, -j, k, -k$ .

Chercher les sous-groupes.