

Actions de groupes

1 Définitions

Définition.

Seconde définition.

- Le groupe linéaire sur l'espace vectoriel.
- Le groupe orthogonal sur l'espace vectoriel.
- Action sur un produit.
- Polynômes en plusieurs variables.

Orbites, décomposition en orbites.

Sous-groupe fixateur. Points fixes.

Application : le petit théorème de Fermat.

2 Action par conjugaison d'un groupe sur lui même.

- Définition
- Classes de conjugaison La classe de conjugaison $Cl_G(x)$ de $x \in G$ est le sous-ensemble de G constitué par les éléments de G de la forme $g x g^{-1}$, $g \in G$ quelconque. On a

$$|Cl_G(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

où $C_G(x)$ est le centralisateur de x dans G , soit le sous-ensemble de G constitué par les éléments g tels que $gx = xg$. C'est un sous-groupe de G .

- La formule des classes.

$$|G| = |Z(G)| + \sum_i \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$$

x_i décrivant un système de représentants des classes de conjugaison de G non contenues dans le centre $Z(G)$.

Le cas de l'action du groupe linéaire sur les matrices, diagonalisation, jordanisation.

Le cas des matrices $(2, 2)$.

3 Applications aux p -groupes

Définition d'un p -groupe. Centre d'un p -groupe.

4 Le théorème de Gauss.

Tout groupe fini dont l'ordre est divisible par un nombre premier p admet au moins un élément d'ordre p .

Le premier et le second théorème de Sylow (en seconde lecture).