

# Groupes symétriques

## 1 Définitions

Définition du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$

- $|\mathcal{S}_n| = n!$
- Le centre de  $\mathcal{S}_n$  est trivial si  $n > 2$ .

Groupe des permutations d'un ensemble fini.

Etude des groupes  $\mathcal{S}_3$  et  $\mathcal{S}_4$ .

Définition d'une transposition, il y a  $C_n^2$  transpositions dans  $\mathcal{S}_n$ . Les transpositions engendrent le groupe symétrique.

## 2 Cycles et décomposition en cycles

- support d'une substitution,
- transpositions et  $k$ -cycles,
- tous les  $k$ -cycles sont conjugués, un  $k$ -cycle est d'ordre  $k$ ,
- il y a  $(k-1)!C_n^k$   $k$ -cycles,
- il y a  $3C_n^4$  produit de transpositions supports disjoints,
- décomposition en cycles à supports disjoints, caractérisation des classes de conjugaison,
- le nombre de classes de conjugaison du groupe  $\mathcal{S}_n$  est le nombre de partition de l'entier  $n$ .

## 3 Signature d'une transposition et compléments

définition partir du nombre d'inversions,  $c$  est un homomorphisme de  $\mathcal{S}_n$  dans  $\{+1, -1\}$ .

Groupe alterné  $\mathcal{A}_n$ .

Compléments (sans démonstration) : théorème de Galois et automorphismes des groupes symétriques (on traitera les cas  $n = 3, 4, 5$  en exercice).