

Anneaux, corps, idéaux, anneaux euclidiens et principaux

1 Anneaux, corps, idéaux

Définition d'un anneau et d'un corps.

Intégrité.

Corps des fractions d'un anneau intègre.

Homomorphisme d'anneaux, le noyau est un idéal \mathcal{I} .

Un idéal est un sous-groupe additif tel que si $a \in \mathcal{I}$, pour tout $x \in A$ on a $xa \in \mathcal{I}$.

Produit d'idéaux $\mathcal{I}\mathcal{J}$, somme d'idéaux $\mathcal{I} + \mathcal{J}$, intersection $\mathcal{I}\mathcal{J} \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$.

Exemple d'idéal : idéal principal. Notation

$$(a_1, \dots, a_n)$$

$a_i \in A$ pour l'idéal

$$\left\{ \sum_{i=1, \dots, n} \lambda_i a_i, \forall \lambda_i \in A \right\}$$

Idéaux premiers \mathcal{P} est premier si $ab \in \mathcal{P}$, $a \notin \mathcal{P}$, then $b \in \mathcal{P}$:

Idéaux maximaux \mathcal{M} est maximal, si tout idéal \mathcal{I} qui contient \mathcal{M} , est soit égal à \mathcal{M} , soit égal à A .

Caractéristique d'un corps, homomorphisme caractéristique c_A . Un corps est de caractéristique p (resp. nulle) si et seulement si il contient le corps \mathbb{F}_p (resp. \mathbb{Q}). formule de Newton en caractéristique p ,

$$(x + y)^{p^h} = x^{p^h} + y^{p^h}$$

Le nombre d'éléments d'un corps fini de caractéristique p est de la forme p^n

2 Idéaux

Théorèmes d'isomorphismes.

Théorème 2.1. Soit $\phi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme surjectif de A dans B , de noyau \mathcal{I} . Alors $B \cong A/\mathcal{I}$.

Lemme chinois :

Lemme 2.2. Si $\mathcal{I} + \mathcal{J} = A$ alors $\mathcal{I}\mathcal{J} = \mathcal{I} \cap \mathcal{J}$

et

$$A/\mathcal{I}\mathcal{J} \cong A/\mathcal{I} \times A/\mathcal{J}$$

le cas général : soient \mathcal{I}_a , $1 \leq a \leq n$ si $\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b = A$, si $a \neq b$

$$A/\mathcal{I}_1 \dots \mathcal{I}_n \cong A/\mathcal{I}_1 \times \dots \times A/\mathcal{I}_n$$

Applications.

3 Anneaux euclidiens et principaux

Définition d'un anneau principal : anneau intègre dont tout idéal est principal.

Éléments irréductibles. Un élément non nul u est irréductible si et seulement il ne peut s'écrire $u = ab$ sans que a ou b soit inversible.

Théorème 3.1. *Idéaux : dans un anneau principal les 3 conditions suivantes sont équivalentes, où $u \in A$, $u \neq 0$:*

- u irréductible,
- (u) premier,
- (u) maximal.

Éléments premiers entre eux, identité de Bezout.

Lemmes d'Euclide et de Gauss.

Décomposition en éléments irréductibles.

Anneaux euclidiens : polynômes.

Entiers de Gauss, $\mathbb{Z}[j]$.

Applications aux sommes de carrés.

Un nombre premier impair est somme de 2 carrés si et seulement si il est de la forme $4k + 1$.

Les nombres premiers impairs de la forme $4k - 1$ sont irréductibles dans les entiers de Gauss.