M2 Topologie algébrique, exercices

1. Montrer que toute application continue de S^1 dans S^1 qui n'a pas de points fixes est homotope librement à l'identité. On considérera les arcs joignant un point à son image, orientés dans le sens trogonométrique.

2. Soit P un polynôme à coefficients complexes qui n'a pas de racines sur S^1. Montrer que le nombre de racines de P (comptées avec multiplicité) de module strictement inférieur à 1 est le degré de l'application de S^1 dans S^1 donné par $z \mapsto \frac{P(z)}{|P(z)|}$.

3. Un groupe topologique G est un espace topologique munit d'une loi interne qui en fait un groupe et qui est continue (on demande aussi que l'inverse soit continue).
On considère le groupe fondamental $\pi_1(G, e)$. Montrer qu'on peut le munir d'une (*a priori* autre) loi en définissant le produit de deux lacets par $\gamma(t)\lambda(t)$ en utilisant le produit du groupe.
Montrer que ce produit coïncide avec la loi usuelle. En déduire que dans ce cas le groupe fondamental est commutatif.

4. Un H-espace X est un espace topologique munit d'une loi interne continue $* : X \times X \to X$ et d'une unité à homotopie prés. C'est à dire qu'il existe $e \in X$ tel que les applications $x \mapsto x$, $x \mapsto e * x$, $x \mapsto x * e$ soient homotopes (pointées, on suppose que $e * e = e$).
Montrer que sous ces hypothèses les résultats de l'exercice précédent sont valides.

5. On appelle cône d'un espace pointé (X, x_0) le quotient de $X \times [0, 1]$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 1)$ $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$. Ce point sera le point base du cône. On le notera CX.
Montrer que l'application identité d'in cône est homotope (pointée) à l'application constante au point base (Un tel espace est dit contractile). En déduire que le groupe fondamental du cône est trivial.

6. On appelle suspension d'un espace pointé (X, x_0) le quotient de $X \times [0, 1]$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 1)$, $(x, 0)$, $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$. Ce point sera le point base de le suspension. On notera ΣX la suspension de X. Montrer que ΣS^{n-1} est homéomorphe à S^n.
On pourra se contenter à ce niveau de la suspension non réduite quotient de $X \times [0, 1]$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 1)$, $(x, 0)$, $(\forall x \in X$ et revenir sur la question initiale après avoir fait l'exercice 18.

7. Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, ne sont pas homéomorphes.

8. On définit la sphère S^∞ comme étant la réunion des sphères S^n *via* les inclusions $S^n \to S^{n+1}$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0)$$

On munit cet espace de la la topologie limite directe. Un ensemble U est ouvert (fermé) dans S^∞ si et seulement si son intersection avec chacun des S^n est ouverte (fermée).

Montrer qu'une application de S^∞ dans un espace topologique X est continue si et seulement si sa restriction à chaque S^n est continue.
Montrer que tout sous-ensemble compact de S^∞ est contenu dans un S^n pour un n assez grand.

9. Montrer que la sphère S^∞ est contractile.
Pour ce faire on commencera par montrer par montrer que l'identité de S^∞ est librement homotope à l'application induite par le "décalage", c'est à dire l'application qui est la restriction à S^∞, de l'application linéaire donnée par $s(e_i) = e_{i+1}$ sur les vecteurs de la base canonique. Puis on montrera (utilisant e_1) qu'on peut contracter en un point.
Enfin on adaptera au cas pointé.

10. On définit l'espace projectif réel infini $\mathbb{RP}^\infty$ comme étant la réunion des espaces projectifs $\mathbb{RP}^n$ *via* les inclusions $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^{n+1}$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0)$$

On munit cet espace de la la topologie limite directe. Montrer que $\mathbb{RP}^\infty$ est un H-espace. Montrer le même résultat pour $\mathbb{CP}^\infty$ que l'on définira.

11.1. On considère les groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $U(n)$ comme des sous-espaces de $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$. Montrer que ce sont des espaces connexes. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $U(n)$ est compact
11.2. Deux espaces topologiques X et Y sont homotopiquement équivalents (pointés) si il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $f \circ g \sim Id_Y$ et $g \circ f \sim Id_X$.
Rappeler la décomposition polaire des matrices complexes inversibles. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et $U(n)$ sont homotopiquement équivalents.

12. Formuler et démontrer les résultats analogues pour les groupes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $O(n)$.

13. Montrer que le groupe $U(n)$ est homéomorphe à $S^1 \times SU(n)$.

14. Montrer que le groupe $SU(2)$ est homéomorphe à S^3.

15. Montrer que l'espace topologique $TS^2 \subset S^2 \times \mathbb{R}^3$

$$\{(v, w) | v \in S^2 \quad w \in R^3, \quad |w| = 1, \quad \text{et} \quad < v|w >= 0\}$$

est homéomorphe à $SO(3)$. Dans la formule plus haut $< v|w >$ désigne le produit scalaire usuel.

16. Montrer que le groupe $SU(2)$ est homéomorphe à S^3.

17. On considère un espace topologique X muni d'une relation d'équivalence R. On appelle topologie quotient sur l'ensemble X/R des classes d'équivalence de R la topologie

dont les ouverts sont les ensembles $U \subset X/R$ tels que $p^{-1}(U) \subset X$ soient ouverts. Vérifier que ceci définit bien une topologie sur X/R.
Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue telle que xRy implique $f(x) = f(y)$ l'application f factorise en $\tilde{f} \circ p$, où p est la projection (continue) de X sur X/R et $\tilde{f} : X/R \to Y$ est une application continue.
On considère le cas de $\mathbb{R}$ (puis de $\mathbb{R}^2$) et de la relation d'équivalence xRy si et seulement si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^2$). Identifier dans ces deux cas l'espace quotient.
On considère le cas de $[0, 2\pi]$ (puis de $[0, 2\pi]^2$) et de la relation d'équivalence xRy si et seulement si $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$ (resp. $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^2$). Identifier dans ces deux cas l'espace quotient.
Si A est un sous-espace d'un espace topologique X on note X/A l'espace quotient de X par la relation d'équivalence dont les classes sont A et les points hors de A. Montrer que si A et X sont compacts l'espace quotient est compact (vérifier l'axiome de Hausdorff).

18. On considère l'espace D^n (la boule fermée de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$) et C un arc simple de classe C^1 dans D^n. On rappelle qu'un arc simple est l'image du segment $[0, 1]$ par une application continue injective. Montrer que l'espace quotient D^n/C est moméomorphe à D^n, on pourra commencer par étudier le cas où l'arc est un segment de droite. Montrer le même résultat en remplaant D^n par $\mathbb{R}^n$, S^n ou une variété différentiable.

19. Montrer que l'espace $S^1 \times S^1$ auquel on a enlevé un point est homotopiquement équivalent au bouquet de deux cercles (deux cercles où l'on a identifié un point de l'un des cercles avec un point de l'autre, soit la figure "8" dans le plan).

20. On considère l'action du groupe des nombres complexes de module 1 sur la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$. Montrer que l'espace quotient est homéomorphe à la sphère S^2.

21. On considère l'espace $\Omega(X)$ des lacets pointé d'un espace pointé (X, x_0). C'est-à-dire l'ensemble des applications continues γ de $[0, 1]$ dans X d'origine et fin x_0. On munit cet espace de la topologie dont les ouverts sont définis comme suit. On se donne un compact K dans $[0, 1]$ et un ouvert U dans X, on définit $C(K, U)$ comme l'ensemble des chemins γ tels que $\gamma(K) \subset U$.
Montrer que ceci définit une topologie sur $\Omega(X)$. Montrer que $\Omega(X)$ est un H-espace.
Montrer que

$$\pi_0(\Omega(X)) \cong \pi_1(X, x_0)$$