

## M2 Topologie algébrique, exercices

1. Montrer que toute application continue de  $S^1$  dans  $S^1$  qui n'a pas de points fixes est homotope librement à l'identité. On considérera les arcs joignant un point à son image, orientés dans le sens trigonométrique.

2. Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes qui n'a pas de racines sur  $S^1$ . Montrer que le nombre de racines de  $P$  (comptées avec multiplicité) de module strictement inférieur à 1 est le degré de l'application de  $S^1$  dans  $S^1$  donné par  $z \mapsto \frac{P(z)}{|P(z)|}$ .

3. Un groupe topologique  $G$  est un espace topologique munit d'une loi interne qui en fait un groupe et qui est continue (on demande aussi que l'inverse soit continue).

On considère le groupe fondamental  $\pi_1(G, e)$ . Montrer qu'on peut le munir d'une (*a priori* autre) loi en définissant le produit de deux lacets par  $\gamma(t)\lambda(t)$  en utilisant le produit du groupe.

Montrer que ce produit coïncide avec la loi usuelle. En déduire que dans ce cas le groupe fondamental est commutatif.

4. Un  $H$ -espace  $X$  est un espace topologique munit d'une loi interne continue  $*$  :  $X \times X \rightarrow X$  et d'une unité à homotopie près. C'est à dire qu'il existe  $e \in X$  tel que les applications  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto e * x$ ,  $x \mapsto x * e$  soient homotopes (pointées, on suppose que  $e * e = e$ ). Montrer que sous ces hypothèses les résultats de l'exercice précédent sont valides.

5. On appelle cône d'un espace pointé  $(X, x_0)$  le quotient de  $X \times [0, 1]$  par la relation qui identifie en un point les points  $(x, 1)$  ( $\forall x \in X$ ) et  $(x_0, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Ce point sera le point base du cône. On le notera  $CX$ .

Montrer que l'application identité d'un cône est homotope (pointée) à l'application constante au point base (Un tel espace est dit contractile). En déduire que le groupe fondamental du cône est trivial.

6. On appelle suspension d'un espace pointé  $(X, x_0)$  le quotient de  $X \times [0, 1]$  par la relation qui identifie en un point les points  $(x, 1)$ ,  $(x, 0)$ , ( $\forall x \in X$ ) et  $(x_0, t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Ce point sera le point base de la suspension. On notera  $\Sigma X$  la suspension de  $X$ . Montrer que  $\Sigma S^{n-1}$  est homéomorphe à  $S^n$ .

On pourra se contenter à ce niveau de la suspension non réduite quotient de  $X \times [0, 1]$  par la relation qui identifie en un point les points  $(x, 1)$ ,  $(x, 0)$ , ( $\forall x \in X$  et revenir sur la question initiale après avoir fait l'exercice 18.

7. Montrer que  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , ne sont pas homéomorphes.

8. On définit la sphère  $S^\infty$  comme étant la réunion des sphères  $S^n$  *via* les inclusions  $S^n \rightarrow S^{n+1}$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$$

On munit cet espace de la topologie limite directe. Un ensemble  $U$  est ouvert (fermé) dans  $S^\infty$  si et seulement si son intersection avec chacun des  $S^n$  est ouverte (fermée).

Montrer qu'une application de  $S^\infty$  dans un espace topologique  $X$  est continue si et seulement si sa restriction à chaque  $S^n$  est continue.

Montrer que tout sous-ensemble compact de  $S^\infty$  est contenu dans un  $S^n$  pour un  $n$  assez grand.

**9.** Montrer que la sphère  $S^\infty$  est contractile.

Pour ce faire on commencera par montrer par montrer que l'identité de  $S^\infty$  est librement homotope à l'application induite par le "décalage", c'est à dire l'application qui est la restriction à  $S^\infty$ , de l'application linéaire donnée par  $s(e_i) = e_{i+1}$  sur les vecteurs de la base canonique. Puis on montrera (utilisant  $e_1$ ) qu'on peut contracter en un point.

Enfin on adaptera au cas pointé.

**10.** On définit l'espace projectif réel infini  $\mathbb{R}P^\infty$  comme étant la réunion des espaces projectifs  $\mathbb{R}P^n$  via les inclusions  $\mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$$

On munit cet espace de la la topologie limite directe. Montrer que  $\mathbb{R}P^\infty$  est un  $H$ -espace. Montrer le même résultat pour  $\mathbb{C}P^\infty$  que l'on définira.

**11.1.** On considère les groupes  $GL(n, \mathbb{C})$  et  $U(n)$  comme des sous-espaces de  $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ . Montrer que ce sont des espaces connexes. Montrer que  $GL(n, \mathbb{C})$  est ouvert et dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ . Montrer que  $U(n)$  est compact

**11.2.** Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont homotopiquement équivalents (pointés) si il existe  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  tels que  $f \circ g \sim Id_Y$  et  $g \circ f \sim Id_X$ .

Rappeler la décomposition polaire des matrices complexes inversibles. Montrer que  $GL(n, \mathbb{C})$  et  $U(n)$  sont homotopiquement équivalents.

**12.** Formuler et démontrer les résultats analogues pour les groupes  $GL(n, \mathbb{R})$  et  $O(n)$ .

**13.** Montrer que le groupe  $U(n)$  est homéomorphe à  $S^1 \times SU(n)$ .

**14.** Montrer que le groupe  $SU(2)$  est homéomorphe à  $S^3$ .

**15.** Montrer que l'espace topologique  $TS^2 \subset S^2 \times \mathbb{R}^3$

$$\{(v, w) | v \in S^2, w \in \mathbb{R}^3, |w| = 1, \text{ et } \langle v | w \rangle = 0\}$$

est homéomorphe à  $SO(3)$ . Dans la formule plus haut  $\langle v | w \rangle$  désigne le produit scalaire usuel.

**16.** Montrer que le groupe  $SU(2)$  est homéomorphe à  $S^3$ .

**17.** On considère un espace topologique  $X$  muni d'une relation d'équivalence  $R$ . On appelle topologie quotient sur l'ensemble  $X/R$  des classes d'équivalence de  $R$  la topologie

dont les ouverts sont les ensembles  $U \subset X/R$  tels que  $p^{-1}(U) \subset X$  soient ouverts. Vérifier que ceci définit bien une topologie sur  $X/R$ .

Montrer que si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue telle que  $xRy$  implique  $f(x) = f(y)$  l'application  $f$  factorise en  $\tilde{f} \circ p$ , où  $p$  est la projection (continue) de  $X$  sur  $X/R$  et  $\tilde{f} : X/R \rightarrow Y$  est une application continue.

On considère le cas de  $\mathbb{R}$  (puis de  $\mathbb{R}^2$ ) et de la relation d'équivalence  $xRy$  si et seulement si  $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$  (resp.  $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^2$ ). Identifier dans ces deux cas l'espace quotient.

On considère le cas de  $[0, 2\pi]$  (puis de  $[0, 2\pi]^2$ ) et de la relation d'équivalence  $xRy$  si et seulement si  $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}$  (resp.  $x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^2$ ). Identifier dans ces deux cas l'espace quotient.

Si  $A$  est un sous-espace d'un espace topologique  $X$  on note  $X/A$  l'espace quotient de  $X$  par la relation d'équivalence dont les classes sont  $A$  et les points hors de  $A$ . Montrer que si  $A$  et  $X$  sont compacts l'espace quotient est compact (vérifier l'axiome de Hausdorff).

**18.** On considère l'espace  $D^n$  (la boule fermée de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^n$ ) et  $C$  un arc simple de classe  $C^1$  dans  $D^n$ . On rappelle qu'un arc simple est l'image du segment  $[0, 1]$  par une application continue injective. Montrer que l'espace quotient  $D^n/C$  est homéomorphe à  $D^n$ , on pourra commencer par étudier le cas où l'arc est un segment de droite. Montrer le même résultat en remplaçant  $D^n$  par  $\mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  ou une variété différentiable.

**19.** Montrer que l'espace  $S^1 \times S^1$  auquel on a enlevé un point est homotopiquement équivalent au bouquet de deux cercles (deux cercles où l'on a identifié un point de l'un des cercles avec un point de l'autre, soit la figure "8" dans le plan).

**20.** On considère l'action du groupe des nombres complexes de module 1 sur la sphère  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ . Montrer que l'espace quotient est homéomorphe à la sphère  $S^2$ .

**21.** On considère l'espace  $\Omega(X)$  des lacets pointé d'un espace pointé  $(X, x_0)$ . C'est-à-dire l'ensemble des applications continues  $\gamma$  de  $[0, 1]$  dans  $X$  d'origine et fin  $x_0$ . On munit cet espace de la topologie dont les ouverts sont définis comme suit. On se donne un compact  $K$  dans  $[0, 1]$  et un ouvert  $U$  dans  $X$ , on définit  $C(K, U)$  comme l'ensemble des chemins  $\gamma$  tels que  $\gamma(K) \subset U$ .

Montrer que ceci définit une topologie sur  $\Omega(X)$ . Montrer que  $\Omega(X)$  est un  $H$ -espace. Montrer que

$$\pi_0(\Omega(X)) \cong \pi_1(X, x_0)$$