M2 Topologie algébrique, exercices

1. (Nombre de Lebesgue) Soit X un espace métrique compact. Et soit $U_1, \dots, U_n$ un recouvrement ouvert fini. Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon ε soit contenue deans un des U_i.

2. Démontrer le lemme de Yoneda : soit $\mathcal{C}$ une catégorie, F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles et A un objet de $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\mathcal{N}at(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -); F) \cong F(A)$$

3.. Montrer que $\mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^{n-1}$ (où $\mathbb{RP}^{n-1}$ est plongé de façon standard dans $\mathbb{RP}^n$) est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Démontrer le résultat analogue pour les espaces projectifs complexes.

4. On appelle fibré de Hopf sur $\mathbb{RP}^n$, et on note λ_n, le sous-espace de $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ constitué par les éléments (L, v) où L est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $v \in L$. On note p l'application de λ_n vers $\mathbb{RP}^n$ qui à (L, v) associe L.
Montrer que $p^{-1}(\mathbb{RP}^n - \mathbb{RP}^{n-1})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
On met sur $\mathbb{R}^{n+1}$ le produit scalaire standard. Soit $D(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| \leq 1$, et $S(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| = 1$. Montrer que l'espace $D(\lambda_n)/S(\lambda_n)$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^{n+1}$.
Montrer que le compactifié d'Alexandroff de λ_n est homéomorphe à $\mathbb{RP}^{n+1}$.

5. Enoncer et démontrer l'analogue complexe.

6. On appelle cône réduit d'une application pointée $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ l'espace pointé obtenu comme quotient de $X \times [0, 1] \cup Y$ par la relation qui identifie en un point les points $(x, 0)$ $(\forall x \in X)$ et (x_0, t), $0 \leq t \leq 1$ d'un côté et les points $(x, 1)$ et $f(x)$ $\forall x \in X$ d'un autre. On le notera $C(f)$.
Si on n'identifie pas les points (x_0, t) en un point on parle de cône non réduit.
Montrer que le cône (réduit ou non réduit) de $z \mapsto z^2$ de S^1 dans S^1 est homéomorphe à $\mathbb{RP}^2$.

6. Montrer que le cône (non réduit) de l'application de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$ (exercice 20 de la feuille précédente) est homéomorphe à $\mathbb{CP}^2$. Plus généralement montrer que le quotient de l'action de S^1 sur S^{2n+1} est homéomorphe à l'espace projectif complexe et que le cône de la projection $p_n : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$ est homéorphe à $\mathbb{CP}^{n+1}$.

7. Calculer le groupe fondamental du cône d'une application.

8. Montrer que l'application de Hopf n'est pas homotope à l'application constante.

9. Fibré tangent à S^n. On considère l'espace

$$TS^n \subset S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$$

défini par
$$TS^n = \{(x,v) |\ < x|v >= 0\}$$
soit p la projection canonique sur S^n. De même on note p la projection canonique de$TS^n \times \mathbb{R}$ sur S^n.
Montrer qu'il existe un homéomorphisme h de $TS^n \times \mathbb{R}$ avec $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $p_1 \circ \alpha = p$ -où p_1 est la projection sur le premier facteur- et α restreinte à $p^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire sur $\{x\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ pour tout $x \in S^n$.

10. Fibré tangent à $\mathbb{RP}^n$. On suppose connu dans cet exercice la notion de fibré tangent à une variété différentiable.
On note p la projection canonique de$T\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{RP}^n$.
On rappelle l'espace λ_n et sa projection p sur $\mathbb{RP}^n$. On définit $(n+1)\lambda_n$ par
$$\{(L, v_1, \ldots, v_{n+1}) |\, v_i \in L \ \ \forall i\}$$
on notera π la projection canonique sur $\mathbb{RP}^n$.
Montrer qu'il existe un un homéomorphisme h de $T\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}$ avec $(n+1)\lambda_n$ tel que $\pi \circ \alpha = p$ - où et α restreinte à $p^{-1}(x)$ est un isomorphisme linéaire sur $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{RP}^n$.

11. Lemme du serpent.

12. On appelle complexe de groupes abéliens et on note $\mathcal{C}_\bullet$ une suite de groupes C_n, $n \geq 0$ et d'homomorphismes $d_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ (appels diffrentielles) tels que $d_{n-1} \circ d_n = 0$ si $n \geq 1$.
Montrer que $\mathrm{Im}(f_n) \subset \mathrm{Ker}(f_{n-1})$. On appelle n-ième groupe d'homologie du complexe $C_\bullet$ et on note $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ le groupe
$$\mathrm{Ker}(d_{n-1})/\mathrm{Im}(d_n)$$
si $n > 0$
$$C_0/\mathrm{Im}(d_1)$$
si $n = 0$
On considère une suite exacte de complexes :
$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{C}'_\bullet \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{C}"_\bullet \longrightarrow \{0\}$$
c'est-à-dire que pour tout n on a une suite exacte
$$\{0\} \longrightarrow C'_n \xrightarrow{\alpha_n} C_n \xrightarrow{\beta_n} C"_n \longrightarrow \{0\}$$
ainsi que $\alpha_{n-1} \circ d'_n = d_n \circ \alpha_n$ et $\beta_{n-1} \circ d_n = d"_n \circ \beta_n$ pour tout n.
Montrer qu'une application de complexes induit une application en homologie.
En déduire la la longue suite exacte d'homologie :
$$\longrightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}"_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_0(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_0(\mathcal{C}"_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

13. On dit que deux applications $\alpha_\bullet$ et $\beta_\bullet$ de complexes $\mathcal{C}_\bullet$ et $\mathcal{D}_\bullet$ sont algébriquement homotopes si il existe des homomorphismes de groupes $h_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ tels que
$$\alpha_n - \beta_n = d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$$

Montrer que deux applications homotopes induisent la même application en homologie.
Deux complexes $\mathcal{C}_\bullet$ et $\mathcal{D}_\bullet$ sont dits homotopiquement équivalents si il existe $\alpha_\bullet$ de $\mathcal{C}_\bullet$ dans $\mathcal{D}_\bullet$ et $\beta_\bullet$ de $\mathcal{D}_\bullet$ dans $\mathcal{C}_\bullet$ tls que la composé $\alpha_\bullet \circ \beta_\bullet$ soit algébriquement homotope à l'identité de $\mathcal{D}_\bullet$ et que $\beta_\bullet\alpha_\bullet$ soit algébriquement homotope à l'identité de $\mathcal{C}_\bullet$
Mointrer que dans ce cas $H_n(\mathcal{C}_\bullet) \cong H_n(\mathcal{D}_\bullet)$ pour tout n.

14. Cône d'une application de complexes. Soit $\alpha_\bullet$ une application du complexe $\mathcal{C}_\bullet$ dans le complexe $\mathcal{D}_\bullet$. On définit un nouveau complexe $C(\alpha_\bullet)$ par

$$C(\alpha_\bullet)_n = D_n \oplus C_{n-1}$$

et

$$d_n = \begin{pmatrix} d_n & (-1)^n \alpha_{n-1} \\ 0 & d_{n-1} \end{pmatrix}$$

Montrer qu'il y a une longue suite exacte d'homologie

$$\longrightarrow H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{D}_\bullet) \longrightarrow H_n(C(\alpha)_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

15. Soit $\mathcal{C}_\bullet$ et $\mathcal{D}_\bullet$ deux complexes d'espaces vectoriels. On définit le complexe $(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})_\bullet$ par

$$(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})_n \cong \oplus_{p+q=n} C_p \otimes D_q$$

et pour diffrentielle d, avec $x \otimes y \in C_p \otimes D_q$

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy$$

Démontrer la formule de Kunneth,

$$H_n((\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})_\bullet) \cong \oplus_{p+q=n} H_p(\mathcal{C}_\bullet) \otimes H_q(\mathcal{D}_\bullet)$$

16. Montrer qu'un graphe est homotopiquement quivalent un bouquet de cercles.

17. Soit une application continue de (D^2, S^1) dans (D^3, S^2), montrer qu'on peut la dformer par homotopie de telle manire qu'elle vite un point de l'intrieur de D^3. de En dduire que le le groupe fondamental d'un complexe cellulaire $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset X^{(2)} \subset \cdots \subset X$ ne dpend que de $X^{(2)}$.