M2 Topologie algébrique, exercices

1. (Puissances symétriques) Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $V^{\otimes k}$. Montrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_k$ agit à gauche sur $V^{\otimes k}$ par permutation des facteurs comme suit : $\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)})$. Par définition la k-ième puissance symétrique de V est le quotient de $V^{\otimes k}$ par cette action, $i.e.$par le sous-espace engendré par les éléments $\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) - (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)})$. On la note $S^k(V)$.
On note $v_1 v_2 \ldots v_k$ la classe du tenseur $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ dans la puissance symétrique.
Montrer que :

$$S^n(V \oplus W) \cong \oplus_{i+j=n} S^i(V) \otimes S^j(W)$$

On munit l'ensemble des $\{S^k(V),\ k \geq 0$, d'une structure d'anneau gradué. C'est à dire d'une application bilinéaire

$$\mu\ :\ S^i(V) \otimes S^j(V) \longrightarrow S^{i+j}(V)$$

donnée par la concaténation des tenseurs :

$$\mu(v_1 v_2 \ldots v_i \otimes w_1 v_2 \ldots w_j) = v_1 v_2 \ldots v_i w_1 w_2 \ldots w_j$$

et qui satisfait aux conditions ordinaires d'une multiplication.
Montrer que cet anneau (gradué) est isomorphe à l'anneau (gradué) des polynômes homogènes sur $\mathbb{K}$ en $\dim(V)$ variables de degré 1.

2. (Puissances extérieures) Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, et soit $V^{\otimes k}$. Montrer que groupe symétrique $\mathcal{S}_k$ agit à gauche sur $V^{\otimes k}$ comme suit : $\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)})$. Par définition, si le corps $\mathbb{K}$ est de caratéristique différente de 2, la k-ième puissance extérieure de V est le quotient de $V^{\otimes k}$ par cette action, $i.e.$par le sous-espace engendré par les éléments $\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) - (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)})$. Si le corps est de caractéristique 2 on ajoute au sous-espace ci-dessus les tenseurs $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ pour lesquels $v_i = v_j$ pour $i \neq j$. On la note $\Lambda^k(V)$.
On note $v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_k$ la classe du tenseur $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k$ dans la puissance extérieure.
Montrer que :

$$\Lambda^n(V \oplus W) \cong \oplus_{i+j=n} \Lambda^i(V) \otimes \Lambda^j(W)$$

On munit l'ensemble des $\{\Lambda^k(V),\ k \geq 0$, d'une structure d'anneau gradué. C'est à dire d'une application bilinéaire

$$\mu\ :\ \Lambda^i(V) \otimes \Lambda^j(V) \longrightarrow \Lambda^{i+j}(V)$$

donnée par la concaténation des foncteurs : $\mu(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_i \otimes w_1 \wedge w_2\ \wedge \ldots \wedge w_j) = v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_i \wedge w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_j$ et qui satisfait aux conditions ordinaires d'une multiplication.
Montrer que cet anneau (gradué) est isomorphe à l'anneau (gradué) engendré par $\dim(V)$ variables anti-commutatives, de carré nul, de degré 1.
Montrer que $\Lambda^k(V)$ est isomorphe à l'image de l'application norme de $V^{\otimes k}$ dans lui même

$$v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)})$$

3. Coproduit sur les puissances symétriques et extéreures. Soit

$$\delta \,:\, S^n(V) \longrightarrow \oplus_{i+j=n} S^i(V) \otimes S^j(V)$$

la composée de $S^n(\Delta)$, où Δ est l'inclusion diagonale $V \longrightarrow V \oplus V$, et de l'isomorphisme décrit dans l'exercice 1.
Montrer que l'on a l'égalité suivante entre applications de

$$S^i(V) \otimes S^j(V) \longrightarrow \sum_{h+\ell=i+j} S^h(V) \otimes S^\ell(V)$$

$$(\mu \otimes \mu) \circ (\mathrm{Id} \otimes \tau \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta = \delta \circ \mu$$

où τ échange les deux facteurs centraux dans $S^a(V) \otimes S^b(V) \otimes S^c(V) \otimes S^d(V)$.
Etablir le résultat analogue pour les puissances extérieures.
La signification de cette formule est la suivante, si on considère deux anneaux anneaux (gradués où non) on peut mettre sur le produit tensoriel une structure d'anneau en posant $(a \otimes b) \times (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$, introduisant éventuellemnt des signes pour tenir compte des graduations. On reviendra sur ce point dans le cours (voir le cas des puissances extérieures).
La formule exprime alors que l'application δ est un homomorphisme d'anneaux des puissances symétriques (vues comme anneau gradué) dans leur produit tensoriel avec elle même (resp. puissances extérieures).

4. (Puissances divisées) Par définition la n-ième puissance divisée de V est l'ensemble des tenseurs invariants sous l'action de $\mathcal{S}_k$ dans $V^{\otimes k}$. On la note $\Gamma^k(V)$. Montrer que si V est de dimension finie on a :

$$\Gamma^k(V^*) \cong (S^k(V))^*$$

Etablir les résultats analogues à ceux des exercices précédents pour les puissances divisées.

5. (Complexe de Koszul)
Soit l'application de $S^i(V) \otimes \Lambda^j(V)$ vers $S^{i-1}(V) \otimes \Lambda^{j+1}(V)$

$$v_1 \ldots v_\ell \ldots v_i \otimes w_1 \wedge \ldots \wedge w_j \mapsto \sum_\ell v_1 \ldots \hat{v}_\ell \ldots v_i \otimes v_\ell \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_j$$

avec les conventions usuelles.
Montrer que le complexe :

$$\{0\} \longrightarrow S^n(V) \longrightarrow S^{n-1}(V) \otimes \Lambda^1(V) \longrightarrow \ldots \longrightarrow S^1(V) \otimes \Lambda^{n-1}(V) \longrightarrow \Lambda^n(V) \longrightarrow \{0\}$$

est exact (d'homologie triviale). On pourra utiliser la formule de Kunneth.

6. (Borsuk Ulam) Montrer que pour toute application continue de S^2 dans $\mathbb{R}^2$ il existe aui moins deux points antipodaux qui ont même image.

7. Démontrer qu'un sous-groupe distingué non-trivial H d'un groupe libre qui est d'indice infini ne peut être finiment engendré.

8. Décrire les sous-groupes d'indice 2 dans un groupe libre à 2 générateurs.

9. Montrer que le revêtement universel d'un groupe topologique est un groupe topologique.

10. Soit une action propre d'un groupe discret G sur un espace localement compact e, montrer en détails que les orbites sont fermées et discrète. montrer que l'espace des orbites est séparé.

11. Quel est le revêtement universel de SO(3)? Quel est le revêtement universel de SO(4)?

12. On considère l'espace $\mathcal{C}_{n,k}$ des k-uplets de points 2 à 2 distincts dans $\mathbb{R}^n$:

$$\{(x_1, \ldots, x_k)\} | x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$$

Montrer que le groupe symétrique $\mathcal{S}_k$ agit librement sur cet espace.

13. (Suite de l'exercice précédent). Si $n = 1$ et $k = 2$ décrire l'espace quotient. Faire de même pour k quelconque.
Quel est le groupe fondamental de $\mathcal{C}_{n,k}$ si $n \geq 2$, en déduire celui du quotient par l'action du groupe symétrique.

14. Décrire le revêtement universel d'un bouquet de 2 cercles, puis de n cercles.

Décrire le revêtement universel du bouquet d'un cercle et d'une sphère de dimension 2.

15. Soit P un polynôme coefficients complexes, de dgré n. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ suivant de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$

$$\{(\alpha, u) | \ \ P(\alpha) = u\}$$

Soit D l'ensemble des complexes z pour les quels le discriminant du polynôme $P + z$ est nul. Montrer que l'application $\pi : (\alpha, u) \mapsto u$ définit un revêtement $\pi^{-1}(\mathbb{C} \backslash D) \longrightarrow \mathbb{C} \backslash D$. Décrire D.

16. Soit une action propre d'un groupe discret G suyr un espace localement compact E, montrer en détails que les orbites sont fermées et discrètes.

17. Montrer que si un espace est connexe par arcs, et a un groupe fondamental trivial, alors deux chemins quelconques ayant des extrémités communes sont homotopes -par une homotopie laissant fixe ces extrémités-.