# M2 Topologie algébrique
# epreuve du 30 Novembre

On dmontrera que

**Théorème 0.1.** *Soit $p : E \longrightarrow B$ et $p' : E' \longrightarrow B$ deux revêtements connexes. Montrer qu'ils sont isomorphes si et seulement si $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p'_*(\pi_1(E', e_0))$.*

On dmontrera le théorème suivant.

**Théorème 0.2.** *Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement galoisien, avec $p(e_0) = b_0$. Soit $N$ le normalisateur de $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$. Il existe un homomorphisme $h$ de $N$ dans* $\mathrm{Aut}(E)$ *et un seul tel que si $c$ est un lacet dans d'origine $b_0$ dont la classe est dans $N$, et si $\tilde{c}$ est son relèvement d'origine $x$ dans $E$ l'automorphisme $h(\tilde{c})$ envoie $x$ sur $\tilde{c}(1)$.*
*Le noyau de cet homorphisme est $p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

**1.** (Borsuk Ulam) Montrer que pour toute application $f$ continue de $S^2$ dans $\mathbb{R}^2$ il existe aui moins deux points antipodaux qui ont même image.
On raisonnera par l'absurde, on construira alors une application $\alpha$ de $\mathbb{R}P^2$ vers $S^1$ en considérant $f(x) - f(-x)$. On montrera qu'il existe $\tilde{\alpha}$ de $\mathbb{R}P^2$ vers $\mathbb{R}$ telle que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ (avec $p(t) = e^{it}$). On conclura à une contradiction en utilisant l'unicité des relèvements.

**2.** Soit $\Gamma$ un graphe fini connexe. On définit les quantités suivantes : $b_0$ le nombre de sommets de $\Gamma$, $b_1$ le nombre d'arêtes de $\Gamma$, $\chi(\Gamma) = b_0 - b_1$, la connectivité de $\Gamma$, $c(\Gamma)$ qui est le plus grand nombre d'arêtes ouvertes que l'on peut enlever à $\Gamma$ en le laissant connexe.
Montrer par récurrence que

$$\chi(\Gamma) = 1 - c(\Gamma)$$

Montrer que le groupe fondamental de $\Gamma$ a $c(\Gamma)$ générateurs.
Soit $\Gamma$ de connectivité $n$ et $\tilde{\Gamma}$ un revêtement connexe à $m$-feuillets. Quelle est sa connectivité?
Démontrer qu'un sous-groupe distingué non-trivial $H$ d'un groupe libre qui est d'indice infini ne peut être finiment engendré.
Décrire les sous-groupes d'indice 2 dans un groupe libre à 2 générateurs (On rappelle qu'un sous-groupe d'indice 2 est distingué, on utilisera les revêtements).

**3.** Décrire le revêtement universel du bouquet d'un cercle et d'une sphère de dimension 2.

**4.** Soit une action propre d'un groupe discret $G$ sur un espace localement compact $e$, montrer en détails que les orbites sont fermées et discrète. montrer que l'espace des orbites est séparé.

**6.** Montrer que l'espace $S^1 \times S^1$ auquel on a enlevé un point est homotopiquement équivalent au bouquet de deux cercles (deux cercles où l'on a identifié un point de l'un des cercles avec un point de l'autre, soit la figure "8" dans le plan), quel est son groupe fondamental?