M2 Topologie algébrique
Feuille 4

1. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : X \longrightarrow Y$ deux applications homotopes (éventuellement pointées d'un CW-complexe X dans un CW-complexe Y. Montrer que le cône de f et le cône de g ont même homologie. Pour ce faire on montrera qu'il existe une rétraction par déformation d'un espace $\mathbf{C}$ (que l'on définira) sur $C(f)$, et de $\mathbf{C}$ sur $C(g)$.

2. (Application de Hopf) Montrer que si l'application de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$ est hotopiquement triviale le plan projectif complexe est rétracte par déformation d'un espace qui se rétracte aussi par déformation sur $S^2 \vee S^4$.
En déduire que dans ce cas les cup-produits dans la cohomologie de $\mathbf{CP}^2$ sont triviaux. L'exercice ci-dessous montre qu'ils ne le sont pas. Qu'en déduit on?

3. On considère l'espace projectif complexe infini avec sa loi de H-espace $\mathbf{CP}^\infty \times \mathbf{CP}^\infty \longrightarrow \mathbf{CP}^\infty$. On considère sa cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Q}$. En utilisant l'action induite en cohomologie par cette loi et les cup-produits montrer que la cohomologie est une algèbre de polynômes en un générateur de degré 2.
En déduire que l'application de Hopf n'est pas homotopiquement triviale.

4. (Longue suite exacte des coefficients.) On considère l'homologie ou la cohomologie à coefficients entiers d'un espace X, et l'homologie (ou la cohomologie) du même espace à coefficients dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Montrer que l'on a une longue suite exacte :

$$\longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

On précisera les applications, et on donnera la suite analogue en cohomologie.
Soit p un nombre premier, on montrera qu'il existe une suite exacte analogue

$$\longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

5. Soit $p = 2$. Dans l'exercce précédent on considère l'application

$$H^n(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

que l'on notera β. Montrer que c'est une transformation naturelle de H^n dans H^{n+1}. Montrer que si $x \in H^1(X,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ alors $\beta(x) = x^2$. Donner une formule pour $\beta(xy)$.
En déduire les cup-produits dans la cohomologie modulo 2 (à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) du plan projectif réel.

6. Faire le même exercice pour $p > 2$.

7. Soit une variété compacte sans bord M de dimension n. On considère les groupes de cohomologie $\mathcal{O}_x(R) = H_n(M, M - \{x\}; R)$. Calculer $\mathcal{O}_x(R)$. On considère l'espace $\tilde{M}(R) = \{(x, g_x)\}$ avec g_x générateur de $\mathcal{O}_x(R)$.
Que peut on dire de $\tilde{M}(R)$ si $R = \mathbb{Z}$ et si $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

On dit que M est R orientable si le revêtement précédent a une section. On montrera que si M est $\mathbb{Z}$ orientable elle R-orientable pour tout R. Montrer que si une variété est simplement connexe elle est toujours R-orientable. Montrer qu'il existe toujours un revêtement à deux feuillets de M $\mathbb{Z}$-orientable. Que peut on dire si $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Montrer que $\mathbb{R}P^2$ n'est pas $\mathbb{Z}$-orientable.

8. Soit D^n la boule ouverte standard, et soit K un fermé contenu dans D^n. Montrer que $H_q(D^n, D^n - K; R)$ est nul pour $q \geq n$.
On procédera comme suit :

- On montrera que si le résultat est vrai pour K_1, K_2 et leur intersection il est vrai pour la réunion.
- On montrera que le résultat est vrai pour un parrallélépède plongé, puis pour des unions de parallélépipède (arêtes parallèles aux axes).
- Puis pour pour tout K

9.1 Soit M une variété sans bord, de dimension n, K un fermé contenu dans M. Calculer $H_q(M, M - K; R)$ pour $q > n$. On pourra utiliser la suite exacte de Mayer-Vietoris et l'exercice précédent.
9.2 Dans le cas $H_n(M, M - K)$ on définira une application de ce groupe vers le groupe de sections $\Gamma(K)$ de $\mathcal{O}_X \longrightarrow X$ au dessus de K. Le premier espace est défini comme l'ensemble des $\{(x, \alpha)\}$, $\alpha \in H_n(X, X - \{x\})$.
Montrer que

$$H_n(M, M - K) \cong \Gamma_c(K)$$

où $\Gamma_c(K)$ désigne les sections à supports compacts.
9.3 En déduire que si M est de dimension n $H_q(M, R) \cong \{0\}$ si $q > n$, $H_n(M, R) \cong R$ si $q = n$ et M R-orientable.

10. Soient $\alpha, \beta \in H^*X$, $a \in H_*X$. Montrer que

$$< \alpha \cup \beta, a >=< \alpha, \beta \cap a >$$

11. (Dualité de Poincaré) Soit M une variété sans bord, R-orientable, de dimension n on prendra $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{F}_2$). Soit $[M]$ un générateur du $H_n(M)$.
Montrer que l'application

$$H_c^q(M) \longrightarrow H_{n-q}(M), \quad \alpha \mapsto \alpha \cap [M]$$

est un isomorphisme.
On procédera comme suit :

- On montrera d'abord qu'on a une application $H^q(M, M - K) \longrightarrow H_{n-q}(X)$ définit par le cap-produit. On passera à la limite sur K, ce qui définit la cohomolgie à supports compacts.
- On montrera que si le théorème a lieu pour U, V, et $U \cap V$ il a lieu pour $U \cup V$.
- Puis pour une réunion de U_i. Pour des ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^n$.

- Puis le cas général.

12. Calculer les produits dans la cohomologie des espaces projectifs (coefficients $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

13. (Borsuk Ulam) Montrer que pour toute application f continue de S^n dans $\mathbb{R}^n$ il existe aui moins deux points antipodaux qui ont même image.
On raisonnera par l'absurde, on construira alors une application α de $\mathbb{R}P^{n-1}$ vers S^{n-1} en considérant $f(x) - f(-x)$.