M2 Topologie algébrique
Epreuve du 8 Février

1. On considère le tore $\mathbb{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ comme le quotient de $[0,1] \times [0,1]$ de la manière usuelle. Décrire une chaîne à coefficients entiers aussi simple que possible qui fournisse un générateur du second groupe d'homologie à coefficients entiers.
On commencera par donner un candidat pour une telle chaîne, puis utilisant la formule d'Alexander-Whitney on calculera son coproduit (on supposera le calcul du $H_1(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z})$ connu). On en déduira que c'est un générateur du $H_2(\mathbb{T}^2;\mathbb{Z})$ (on admettra que ce groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$).

2. Effectuer le même exercice avec le plan projectif réel, mais en considérant cette fois ci des chaînes à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_2$.

3. Calculer la cohomologie rationnelle des groupes $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$. Pour le dernier on commencera par démontrer que le quotient $U(3)/U(2)$ est homéomorphe à la sphère S^5. On se servira du fait que $U(1)$, $U(2)$, $U(3)$ sont des groupes topologiques.
On en déduira la cohomologie entière dont on pourra admettre qu'elle est un sous-objet de la cohomologie rationnelle.
On pourra se servir dans les deux cas de la dualité de Poincaré.
Dans le cas de $U(3)$ on pourra commencer par se ramener à $SU(3)$, puis montrer que $SU(3)$ est homéomorphe à un espace obtenu à partir de deux copies de $D^3 \times S^5$ identifiées de manière appropriée le long de leur bord.

4. Soit $p : E \longrightarrow B$ un revêtement n feuillets. Montrer qu'un simplexe sigulier $\sigma : \Delta^k \longrightarrow B$ admet exactement n relèvements $\tilde{\sigma} : \Delta^k \longrightarrow E$. On note $p^!(\sigma) \in C_k(E)$ la chaîne qui est somme de ces relèvements. On étend cette application par linéarité aux chaînes.
Montrer que cette application induit une application, notée également, $p^!$ de $H_k(B)$ vers $H_k(E)$. Calculer l'application compose $p_* \circ p^!$ (montrer que c'est la multiplication par n).
Soit G un groupe fini. On suppose donné un espace E connexe par arcs, contractile sur lequel G agit librement et proprement (un tel espace existe). On note BG le quotient de E par l'action de G. Quels sont les groupes d'homotopie de BG?
En utilisant le revêtement $E \longrightarrow BG$ montrer que la cohomologie rduite de BG ne contient que des groupes de torsion.

Remarque cette cohomologie est la cohomologie du groupe G qui peut être définie de manière purement algébrique.

5. Démontrer le lemme de Yoneda : soit $\mathcal{C}$ une catégorie, F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles et A un objet de $\mathcal{C}$. Montrer que

$$\mathcal{N}at(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-);F) \cong F(A)$$

6. On appelle fibré de Hopf sur $\mathbb{RP}^n$, et on note λ_n, le sous-espace de $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ constitué par les éléments (L,v) où L est un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $v \in L$. On note p l'application de λ_n vers $\mathbb{RP}^n$ qui à (L,v) associe L.

On met sur $\mathbb{R}^{n+1}$ le produit scalaire standard. Soit $D(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| \leq 1$, et $S(\lambda_n)$ l'ensemble des (L, v) avec $|v| = 1$. Montrer que l'espace $D(\lambda_n)/S(\lambda_n)$ est homéomorphe à $\mathbb{RP}^{n+1}$. Identifier l'espace $S(\lambda_n)$, montrer que $D(\lambda_n)$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{RP}^n$.
On en déduira alors de la suite exacte

$$\longrightarrow H^k(D(\lambda_n), S(\lambda_n)) \longrightarrow H^k(D(\lambda_n)) \longrightarrow H^k(S(\lambda_n)) \longrightarrow$$

la suite exacte dite de Gysin :

$$\longrightarrow \tilde{H}^k(\mathbb{RP}^{n+1}) \longrightarrow H^k(\mathbb{RP}^n) \longrightarrow H^k(S^n) \longrightarrow$$

On prcisera les applications.
Les coefficients sont arbitraires (si on préfère on peut les prendre à coefficients dans un corps)