

Rapport de stage

Amadou MAHAMANE

1 Introduction

Du 19 Décembre 2005 au 08 Juin 2006, j'ai effectué un stage de doctorat au Laboratoire Analyse Géoétrie et Applications (L.A.G.A.) sous la direction du Pr Fayssal BENKHALDOUN. Ce stage a été financé par le gouvernement français dans le cadre de la bourse en alternance qu'il m'a accordée par l'intermédiaire de l'ambassade de France au Mali.

Le stage s'est déroulé dans de très bonnes conditions. En effet j'ai participé à plusieurs séminaires, rencontré d'autres chercheurs s'intéressant au même domaine que moi. En plus du 15 au 31 Mai 2006 M DIALLO Ouaténi, mon directeur du Mali était l'invité de M. BENKHALDOUN, ce qui nous permis de faire le point à trois sur le travail effectué et de définir les perspectives.

Au cours de ce stage nos travaux ont porté sur **la simulation par la méthodes des volumes finis d'un écoulement eau-pétrole dans un milieu poreux**. Le phénomène que nous avons simulé correspond physiquement à l'injection de l'eau par un bout d'un réservoir pour en extraire du pétrole par l'autre bout. L'introduction par Guy Chavent [2] du concept de pression globale a permis une modélisation mathématique plus adéquate du phénomène, ce qui a permis l'établissement de résultats théoriques (existence et unicité de la solution), la construction et l'étude de plusieurs schémas numériques [1] [3].

2 Le modèle mathématique

La formulation en pression globale du phénomène sus-mentionné conduit à un système couplé d'équations aux dérivées partielles : une équation elliptique et une équation parabolique dégénérée [1] [2]. En supposant que les propriétés thermodynamiques (densité, viscosité dynamique) des deux phases sont constantes et en négligeant l'effet de la pesanteur, ce système s'écrit :

– **l'équation elliptique en pression**

$$\begin{cases} \vec{q} = -d(S)K(x)\nabla P; \operatorname{div}(\vec{q}) = 0 \text{ dans } Q_T = \Omega \times [0, T[\\ \vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Gamma_1} = -\vec{q}_d \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0 \quad P|_{\Gamma_3} = P_0 \quad \forall t \in [0, T[\end{cases} \quad (1)$$

– **L'équation parabolique dégénérée en saturation**

$$\begin{cases} \Phi(x) \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(b(S)\vec{q} - K(x)\nabla\alpha(S)) = 0 \text{ dans } Q_T \\ S|_{\Gamma_1} = 1; K\nabla\alpha(S) \cdot \vec{n}|_{\Gamma_2} = 0; S|_{\Gamma_3} = 0 \forall t \in [0, T[\\ S(x, 0) = S^0(x) \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

où

- Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega = \cup_{i=1}^3 \Gamma_i$ sa frontière,
- T le temps de simulation,
- S est la saturation en eau,
- $\vec{q} = \vec{q}_w + \vec{q}_o$ désigne la vitesse de filtration totale du fluide,
- $P = \frac{1}{2}(p_w + p_o) + \gamma(S)$ la pression globale.
- $\gamma(S)$, $\alpha(S)$, $d(S)$, $b(S)$ sont des fonctions connues dépendant à la fois du milieu poreux et des deux phases en écoulement.

On note que $\alpha'(1) = \alpha'(0) = 0$, d'où la dégénérescence du terme de diffusion.

3 La simulation numérique

L'équation elliptique (1) est discrétisée par un schéma volumes finis (VF) cell-centred avec approximation du gradient par la méthode de la cellule diamant [4]. Le système linéaire issu de cette discrétisation est résolu par une méthode du type double gradient conjugué stabilisé [6]. L'équation parabolique (2) est également discrétisée par un schéma VF cell-centred avec un décentrement amont de la partie convective et une approximation par la méthode de la cellule diamant pour la partie diffusive.

Nous avons effectué des tests numériques sur deux types de réservoir : un réservoir homogène isotrope et un réservoir non homogène anisotrope. Les données de simulations sont les suivantes :

- dans les deux cas, la condition initiale S^0 , la porosité Φ et la pression au puits de production P_0 sont les mêmes :

$$S^0(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \Gamma_1 \\ 0 \text{ si } x \in \Omega \setminus \Gamma_1 \end{cases}$$

$$\Phi = 0.2 \text{ et } P_0 = 0,$$

- dans le cas homogène isotrope, le réservoir $\Omega =]0, 0.1[\times]0, 0.1[$ triangulé à l'aide d'un maillage non structuré constitué de 3826 triangles, le pas de temps est constant et vaut $\Delta t = 1, 3.10^{-6}$, $q_d = 1.4$, $K = Id$ où Id est la matrice identité d'ordre 2.
- dans le cas non homogène non isotrope $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, le maillage est non structuré, il comporte 3662 triangles, le pas de temps est $\Delta t = 2, 46.10^{-4}$, $q_d = 0.5$, le tenseur des perméabilités est défini comme suit :

$$K(x) = \begin{cases} K_1 \text{ si } x \in Z_1 \\ K_2 \text{ sinon} \end{cases}$$

où

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.03 \\ 0.03 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

et Z_1 est une partie de Ω définie sur la figure (1).

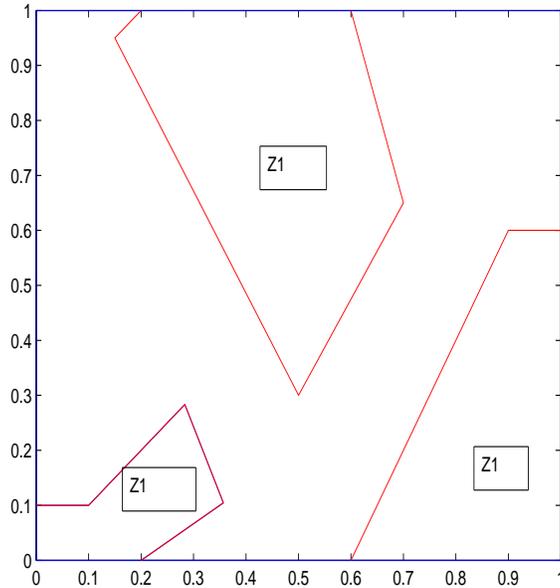
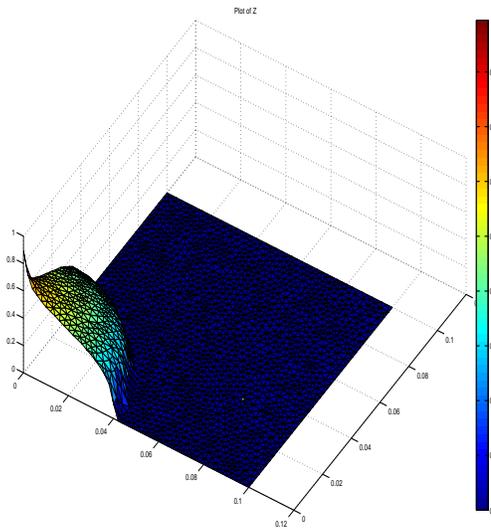
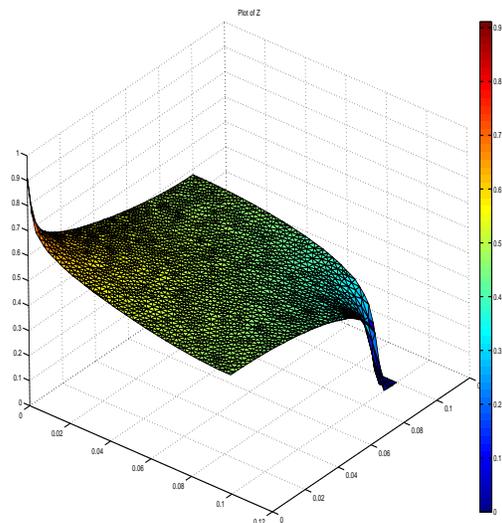


FIG. 1 – Le réservoir avec plusieurs zone de perméabilité Ω

Les résultats des tests après différents temps de simulation sont représentés sur les figures suivantes. Dans le cas du réservoir homogène on constate une progression réaliste du front de saturation et une bonne orientation du champ de vitesse voir les figures 2 et A.3. Pour le deuxième type de réservoir on remarque le schéma prend en compte l'**anisotropie**, en effet la figure 4 montre qu le front de saturation avance plus vite dans les zones de forte perméabilité ce qui est confirmé par la figure B.3 représentant le champ de vitesse.

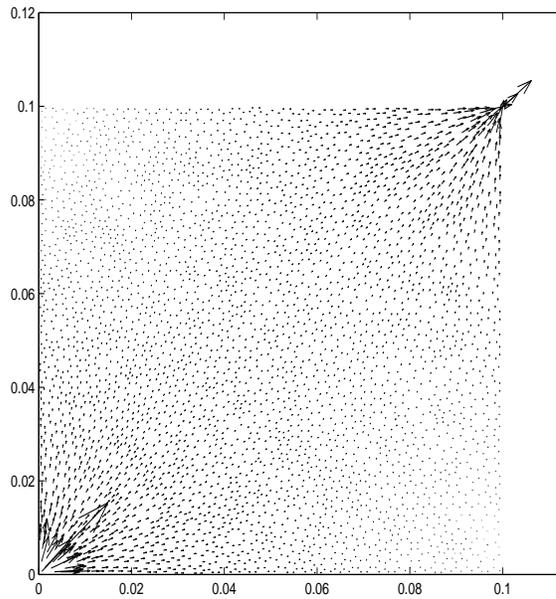


Saturation de l'eau à $t = 0.016$ s

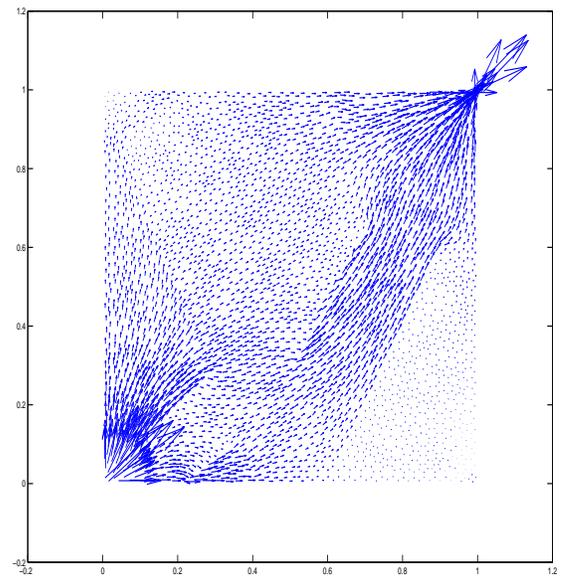


Saturation à $t = 0.176$ s

FIG. 2 – Evolution de la saturation dans le cas homogène isotrope



A. Champ de vitesse dans le cas homogène isotrope

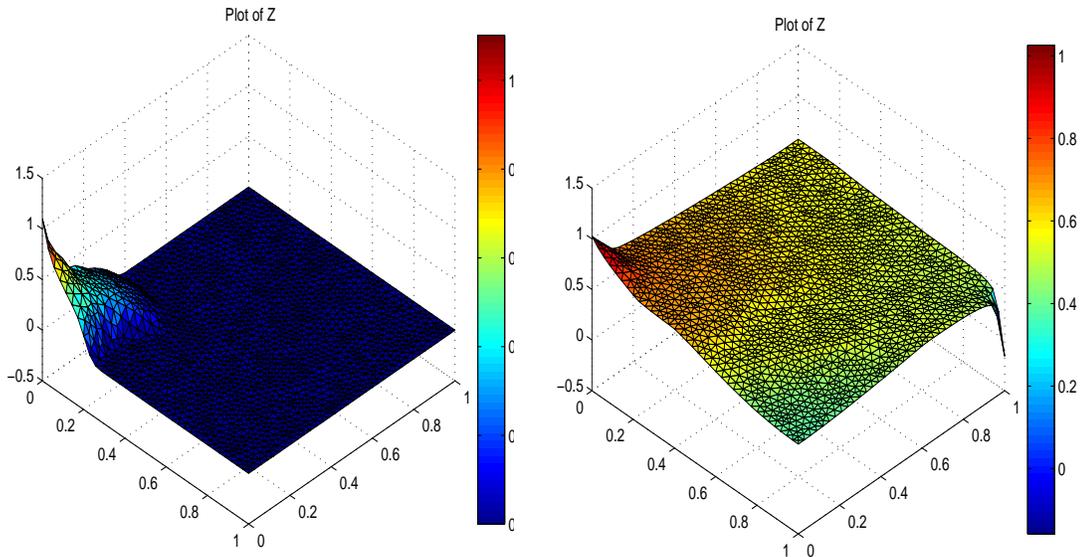


B. Champ de vitesse dans le cas non homogène anisotrope

FIG. 3 –

Références

[1] M. AFIF, B. AMAZIANE, *Convergence of finite volume schemes for a degenerate*



Saturation de l'eau à $t = 0.0492$ s

Saturation à $t = 7.38$ s

FIG. 4 – Evolution de la saturation dans le cas non homogène anisotrope

convection-diffusion equation arising in flow in porous media, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191, 2002.

- [2] G. CHAVENT, J. JAFFRÉ, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, North-Holland, 1986.
- [3] R. EYMARD, *Two-phase flow in porous media and finite volume schemes*, in F. Benkhaldoun and R. Herbin eds *Finite Volumes for Complex Applications III 2001*
- [4] Y. COUDIÈRE, J. P. VILA ET P. VILLEDIEU, *Convergence rate of finite volume scheme for a two dimensional convection-diffusion problem*, M2AN, Vol.33 N3, p.493-516,1999
- [5] P. DANGLA, O. COUSSY and R. EYMARD "A Vanishing Diffusion Process in Unsaturated Soils" *Int.J.Non-Linear Mechanics*, Vol. 33 No. 6, pp.1027-1037, 1998.
- [6] GERARD L.G. SLEIJPEN AND DIEDERIK R. FOKKEMA, *Bicgstab(l) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum*, *Electronic Transaction on Numerical Analysis*, Vol. 1, pp 11-32, September 1993.
- [7] MOHAMED AFIF, *Schémas Volumes Finis pour une Classe d'Equations de Type Convection-Diffusion Issue des Milieux Poreux*, Thèse d'Etat UNIVERSITE CADI AYYAD MARRAKECH, 2002.
- [8] J. BERNARD Thèse de Doctorat "Ecoulements diphasiques en milieux poreux : modélisation et simulation de cas d'imbibition, de drainage et d'ébullition" Université de Marne-la Vallée 2004.
- [9] M. VOHRALÍK Thèse de Doctorat "Méthodes numériques pour des équations elliptiques et paraboliques non linéaires" Universté Paris XI 2004