DEA Réseaux et codes

Questions préliminaires
1) Considérons n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose liés. Montrer que le déterminant de la matrice de Gram de ces vecteurs (de coefficient général $v_i \cdot v_j$) est nul.

2) On considère le déterminant d'ordre n suivant: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\Delta_n = n + 1$.

I - Code de Hamming étendu

1) Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{F}_2^4 & \to & \mathbb{F}_2^7, \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_4, x_1 + x_3 + x_4). \end{array}$$

Son image, notée H, est le code de Hamming.
a) Déterminer la longueur et la dimension de H.
b) Dresser la liste des mots de H. Quelle est sa distance minimale. Combien contient-il de mots de poids 3?
c) Quel est le taux d'information de H? Comparer son efficacité avec celle du code de répétition C_3.

2) Le code de Hamming étendu est le code $\tilde{H}$ obtenu à partir de H en ajoutant un contrôle de parité global, c'est-à-dire défini par $\tilde{H} = \{(x_1, \dots, x_7, x_1 + \dots + x_7),\ (x_1, \dots, x_7) \in H\}$.
a) Comparer le poids de $c = (x_1, \dots, x_7) \in H$ et celui du point correspondant $\tilde{c} = (x_1, \dots, x_7, x_1 + \dots + x_7) \in \tilde{H}$.
b) Montrer que $\tilde{H}$ est un $[8, 4, 4]$-code, et qu'il est doublement pair.
c) En déduire que $\tilde{H}$ est un code auto-dual.
d) Quelles propriétés du réseau $\Gamma_{\tilde{H}}$ associé au code $\tilde{H}$ peut-on déduire de ce qui précède?

II Construction de $\Gamma_{\tilde{H}}$

1) Chaque mot de $\mathbb{F}_2^7 = \{0, 1\}^7$ peut-être vu comme un élément de $\mathbb{Z}^7 \subset \mathbb{R}^7$. Dans l'autre sens, on note $\rho : \mathbb{Z}^7 \to \mathbb{F}_2^7$, $(x_1, \dots, x_7) \mapsto (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_7)$.
a) On considère les 7 mots de H de poids 3, et les mots correspondants $(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_7)$ de $\tilde{H}$. Si i et j sont deux entiers distincts compris entre 1 et 7, combien les mots $\tilde{c}_i$ et $\tilde{c}_j$ ont-ils de 1 en commun (c'est-à-dire à la même position)?
b)La notation $\tilde{c}_i$ désigne maintenant le mot $\tilde{c}_i$ vu comme élément de $\mathbb{Z}^8 \subset \mathbb{R}^8$. On considère les vecteurs $f_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{c}_i \in \mathbb{R}^8$, pour $1 \leq i \leq 7$. Montrer qu'ils appartiennent à $\Gamma_{\tilde{H}}$. Calculer $f_i \cdot f_i$ pour $1 \leq i \leq 7$ et $f_i \cdot f_j$ pour $1 \leq i, j \leq 7$, $i \neq j$.

2) On considère le vecteur $e_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, -1, -1, 0, 0, 1, 0)$.
a) Montrer que $e_8 \in \Gamma_{\tilde{H}}$.

b) Montrer que le produit scalaire $e_8 \cdot f_i$ vaut zéro pour exactement quatre des indices $i \in \{1, \dots, 7\}$, et -1 pour les trois autres. Quitte à changer la numérotation, on suppose que $e_8 \cdot f_i = -1$ pour $i \in \{5, 6, 7\}$.
c) On pose $e_1 = f_1$, $e_2 = f_2 - f_1$, $\dots$, $e_7 = f_7 - f_6$. Déterminer la matrice de Gram de la famille $(e_1, \dots, e_8)$.
Calculer son déterminant. (On pourra montrer qu'il vaut $2 \times \Delta_7 - \Delta_4 \times \Delta_2$).
d) Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_8)$ est une base du réseau $\Gamma_{\tilde{H}}$.

Le réseau ainsi construit est le réseau de racines de type E_8. On remarquera qu'il est engendré par des vecteurs de norme $\sqrt{2}$.