L'homomorphisme de Bockstein et la conjecture de Kuhn

L. Schwartz

29 juin 2010

Résumé

On donne dans cette courte note un cas particulier où la mt́hode développée dans [S98] permet d'établir la conjecture de Kuhn (voir [**?**]

Abstract

1 L'homomorphisme de Bockstein

Soit p un nombre premier. La cohomologie $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ d'un espace X, que l'on notera H^*X, est naturellement un objet de la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod [S94]. Cette catégorie est munie, comme toute catégorie abélienne, d'une filtration naturelle, dite de Krull, par des sous-catégories épaisses stables par colimites :

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{U}$$

La sous-catégorie $\mathcal{U}_0$ est exactement la sous-catégorie pleine formée des modules instables localement finis [S94] obtenue comme colimite de modules finis. Autrement dit cette sous-catégorie est obtenue à partir des objets simples de $\mathcal{U}$, les modules $\Sigma^n\mathbb{F}_p$, par extensions et colimites. Les termes suivants sont définis itérativement comme suit : $\mathcal{U}_n$ est 'l'image inverse' dans $\mathcal{U}$ de la sous-catégorie abélienne $\mathcal{C}$ du quotient $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ obtenue à partir des objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ par extensions et colimites. La catégorie $\mathcal{U}$ *n'est pas* la réunion des $\mathcal{U}_n$.
La filtration de Krull est caractérisée par :

Théorème 1.1. *[S94] Soit $\bar{T}$ le foncteur de Lannes réduit, adjoint à gauche du produit tensoriel par $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/p)$. Un module instable M est dans $\mathcal{U}_n$ si et seulement si $\bar{T}^{n+1}(M) = \{0\}$.*

Tout module instable M est également muni de sa filtration nilpotente $\{M_s\}_{s\geq 0}$ qui est décroissante, séparée et naturelle, et dont les sous-quotients sont les suspensions itérées de modules instables réduits, plus précisément :

$$M_s/M_{s+1} = \Sigma^s R_s M$$

où R_sM est réduit (voir [S94]). Cette filtration est celle correspondant à la filtration nilpotente de la catégorie $\mathcal{U}$ [S94]. C'est une filtration décroissante par des sous-catégories $\mathcal{N}il_s$, $s \geq 0$,

$$\mathcal{U} = \mathcal{N}il_0 \supset \mathcal{N}il_1 \supset \mathcal{N}il_2 \supset \ldots \supset \mathcal{N}il_s \supset \ldots$$

$\mathcal{N}il_s$ est la plus petite sous-catégorie épaisse, stable par colimite et contenant les suspensions s-ièmes des modules instables. Un module instable dans $\mathcal{N}il_s$ est $(s-1)$-connexe.

La preuve donnée pour le cas où p impair dans [S98, Section 3] contient une erreur. L'approche de [K08] ne traite que le cas $p = 2$ et présenterait une difficulté analogue à celle de [S98] pour p impair d'après M. Stelzer.
Expliquons maintenant pourquoi la méthode utilisée pour le cas $p = 2$ ne peut l'être pour p impair sans modification. L'analogue (impair) des classes considérées pour traiter du cas $p = 2$ se trouvent sur la colonne $-p$ de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore et peuvent donc supporter une différentielle d_{p-1} non triviale. Pour $p = 2$ il n'y a évidement pas de différentielle, elle a déjà é té calculée ! Si X est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/p, n)$ (p impair) et si x est la classe fondamentale de degré n impair on a la formule suivante (voir [Sm])

$$d_{p-1}(x \otimes \ldots \otimes x) = \lambda \beta P^k(x)$$

avec $k = \frac{n-1}{2}$. Le coefficient λ doit être non nul afin de garantir l'instabilité de la cohomologie de $K(\mathbb{Z}/p, n-1)$. par naturalité ce résultat s'étend à toute classe de cohomologie de degré n, sous réserve que cette classe ne soit pas image d'une différentielle. On ne peut en général assurer cette dernière condition. C'est possible dans notre cas pour des raisons de degré ordinaire ou de degré de nilpotence.
Si l'homomorphisme de Bockstein est trivial dans le module instable considéré la méthode fonctionne comme pour $p = 2$ et redonne le résultat de [K95] sans faire appel au théorème sur l'invariant de Hopf ou à d'autres résultats profonds de théorie de l'homotopie. En fait ceci étend même le théorème de Kuhn de [K95] qui montre que pour qu'un module (ou une algèbre instable) du type considéré soit (éventuellement) réalisable il faut que des homomorphismes de Bockstein soient non triviaux entre deux étages de la filtration nilpotente du module considéré, la méthode ci-dessus montre que ce doit être le cas entre les deux premiers étages non triviaux.
Par contre la méthode proposée dans [S98] pour 'éliminer' le Bockstein : prendre le plan projectif sur l'espace des lacets est inexacte, et échoue sans argument supplémentaire. Il reste qu'en examinant de plus près des cas particuliers on voit rapidement apparaître des contradictions qui forcent la nullité de l'homomorphisme de Bockstein et permettent donc de se ramener au cas précédent.
A titre d'exemple considérons le cas où l'algèbre instable initialement considérée a un quotient non-trivial dans $\mathcal{N}il_1$ et que tous les produits sont nuls. Cette dernière condition est facile à assurer en remplacant l'espace supposé exister par un quotient. Soit x la classe considérée plus haut, de degré $2k + 1$ et $y = P^k x$, $k = p^h$ pour un certain h. Si l'homomorphisme de Bockstein est non trivial sur x il l'est sur y car le module instable considéré est de la forme $A \otimes \Phi^{h+1} F(1)$ (voir [S98]). Rappelons que $F(1)$ est le module instable librement engendré en degré 1, qui s'identifie au module des primitifs de la coalgèbre $H^* B\mathbb{Z}/p$.
L'élément $y^{\otimes p-1} \otimes x$ existe sur la colonne $-p$ du terme E_2 de la suite spectrale et ne peut être tué par une différentielle d_i, $i \leq p - 1$ pour des raisons de degrés, quitte encore une fois à prendre un quotient de l'espace initial. Toutes les différentielles sont nulles sur cet élément (en particulier il n'y a pas de place pour des produits de Massey non triviaux, voir [McCleary85], chapitres 7 et 8). On a, comme plus haut,

$$d_{p-1}(y \otimes \ldots \otimes y) = \lambda \beta P^{pk}(y)$$

et donc :

$$0 = P^k d_{p-1}(y \otimes \ldots \otimes y \otimes x) = d_{p-1} P^k(y \otimes \ldots \otimes y \otimes x) = \lambda \beta P^{pk}(y) \neq 0$$

On a donc une contradiction si $\lambda \neq 0$.

Références

[K95] Nicholas Kuhn, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Ann. of maths 141, **(1995)**, 321-347.

[K08] Nicholas Kuhn, *Topological non-realization results via the Goodwillie tower approach to iterated loopspace homology*, AGT 8, **(2008)**, 2109-2129.

[La92] Jean Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire.* Pub. I.H.E.S. 75**(1992)** 135-244.

[LS89] Jean Lannes, Lionel Schwartz, *Sur la structure de $\mathcal{A}$-modules instables injectifs*, Topology 28 **(1989)** 153-169.

[McCleary85] John McCleary, *User's guide to spectral sequences* , Publish or Perish Inc. **(1985)**.

[S94] Lionel Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, **(1994)**.

[S98] Lionel Schwartz, *A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn*, Invent. Math. 134, **(1998)** , 211-227.

[S01] Lionel Schwartz, *La filtration de Krull de la catégorie $\mathcal{U}$ et la cohomologie des espaces*, AGT 1, **(2001)**, 519-548.

[Sm] Lawrence Smith, *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Springer LNM 134.

[Strom03] Jeffrey Strom, *Miller spaces and spherical resolvability of finite complexes* , Fund. Math. 178, **(2003)**, no. 2, 97-108.

[GW] George Whitehead, *Elements of homotopy theory*, GTM 6, **(1978)**, Springer Verlag.

Lionel Schwartz
UMR CNRS 7539
Département de Mathématiques
Université PARIS 13
93430 Villetaneuse
France