UNIVERSITE PARIS 6 Master 2 ANEDP

Cours de Ph. Souplet

Corrigé de l'examen de mai 2009 (durée 3h30)

Exercice I - Partie A.

1. On vérifie que $\underline{u} \equiv 0$ est une sous-solution de (1)-(3) (par le fait que $f(0) \geq 0$ et que $u_0 \geq 0$). Par conséquent $u \geq \underline{u} = 0$ d'après le principe de comparaison.

2.a. Montrons que $\overline{u} = C - x$ est une sur-solution de (1)-(3) pour C bien choisi :

• On a, sur $(0,T) \times I$,

$$\overline{u}_t - \overline{u}_{xx} \geq e^{\overline{u}} + ke^{m\overline{u}}\overline{u}_x \iff 0 \geq e^{C-x} - ke^{m(C-x)} \iff e^{(m-1)(C-x)} \geq 1/k.$$

Ceci équivaut à $e^{(m-1)(C-1)} \geq 1/k$, soit encore $C \geq C_0 := 1 - \operatorname{Log} k/(m-1)$.

• On a bien $\overline{u} \geq 0$ sur $(0,T) \times \partial I$.

• On a $\overline{u}(0,\cdot) \geq C - 1 \geq u_0$ dès que $C \geq C_1 := 1 + \|u_0\|_\infty$.

En choisissant $C = \max(C_0, C_1)$, on obtient bien une sur-solution de (1)-(3). D'après le principe de comparaison, on en déduit que $(0 \leq)\ u \leq \overline{u} \leq e^C$ sur $(0,T) \times I$. D'après (4) on conclut que $T = \infty$.

2.b. On prend maintenant $\overline{u} = \alpha(C - x)$ avec $\alpha > 0$. On a, sur $(0,T) \times I$,

$$\overline{u}_t - \overline{u}_{xx} \geq e^{\overline{u}} + ke^{m\overline{u}}\overline{u}_x \iff 0 \geq e^{\alpha(C-x)} - k\alpha e^{\alpha(C-x)}.$$

Il suffit de prendre $\alpha = 1/k$. La dernière condition du a) est maintenant satisfaite pour $C \geq 1 + \alpha^{-1}\|u_0\|_\infty = 1 + k\|u_0\|_\infty$ et on conclut comme au a).

2.c. En intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} y'(t) &= \int_0^1 u_t \varphi^q\, dx = \int_0^1 \varphi^q (u_{xx} + e^u + ke^{mu}u_x)\, dx \\ &= \int_0^1 u(\varphi^q)_{xx}\, dx + \Big[\varphi^q u_x - (\varphi^q)_x u + km^{-1}\varphi^q e^{mu}\Big]_0^1 - km^{-1}\int_0^1 e^{mu}(\varphi^q)_x\, dx + \int_0^1 e^u \varphi^q\, dx. \end{aligned}$$

Comme $(\varphi^q)_{xx} = q\varphi^{q-1}\varphi_{xx} + q(q-1)\varphi^{q-2}(\varphi_x)^2 \geq -q\pi^2\varphi^q$ et que le terme entre crochets est nul par la condition aux bords, on en déduit le résultat.

2.d. On écrit

$$km^{-1}e^{mu}(\varphi^q)_x = kqm^{-1}e^{mu}\varphi^{q-1}\varphi_x = \big(e^{mu}\varphi^{qm}\big)\big(kqm^{-1}\varphi^{q(1-m)-1}\varphi_x\big).$$

En appliquant l'inégalité de Young $ab \leq (1/2)a^{1/m} + C(m)b^{1/(1-m)}$, on en déduit que

$$km^{-1}e^{mu}|(\varphi^q)_x| \leq \frac{1}{2}e^u\varphi^q + C(m)\big(kqm^{-1}\varphi^{q(1-m)-1}|\varphi_x|\big)^{1/(1-m)}.$$

En choisissant $q = 1/(1-m)$ on obtient

$$km^{-1}e^{mu}|(\varphi^q)_x| \leq \frac{1}{2}e^u\varphi^q + C(k,m,q),$$

et le résultat s'ensuit par intégration.

2.e. D'après les questions c) et d), on a

$$y' \geq \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\varphi^q - q\pi^2 y - C.$$

En utilisant le fait que $e^u \geq u^2/2$ et l'inégalité de Hölder, ceci implique

$$y' \geq \frac{1}{4}\int_0^1 u^2\varphi^q\,dx - q\pi^2 y - C \geq C_1 y^2 - q\pi^2 y - C \geq \frac{C_1}{2}y^2 - C_2$$

pour des constantes $C_1, C_2 > 0$ dépendant seulement de k, m, q.

2.f. Le résultat de la question e) et le lemme d'inégalité différentielle du Cours permettent de conclure que $T < \infty$ dès que $y(0) > (2C_2/C_1)^{1/2}$.

3. La fonction $y(t) = -\mathrm{Log}\,(T-t)$ vérifie $y' = e^y$. Supposons par contradiction qu'il existe $t_0 \in (0,T)$ tel que $\|u(t_0)\|_\infty < y(t_0)$. Alors par continuité il existe $\delta > 0$ tel que $\|u(t_0)\|_\infty < y(t_0 - \delta)$. On en déduit que $z(t,x) = y(t-\delta)$ est une sur-solution de (1)-(3) sur $(t_0, T) \times I$. Par conséquent $u(t,x) \leq y(t-\delta)$ sur $(t_0,T)\times I$, d'où $\limsup_{t\to T}\|u(t)\|_\infty \leq \limsup_{t\to T} y(t-\delta) = y(T-\delta) < \infty$, ce qui contredit (4).

4.a. En utilisant $f'' \geq 0$ et (1), on calcule

$$\begin{aligned}
J_t - J_{xx} &= u_{tt} - \delta f'(u)u_t - u_{txx} + \delta f'(u)u_{xx} + \delta f''(u)(u_x)^2 \\
&\geq (u_t - u_{xx})_t - \delta f'(u)(u_t - u_{xx}) = f'(u)u_t + u_{xt} - \delta f'(u)(f(u) + u_x) \\
&= f'(u)(u_t - \delta f(u)) + u_{xt} - \delta f'(u)u_x = f'(u)J + J_x.
\end{aligned}$$

4.b. Comme u est supposée aussi régulière que nécessaire (y compris à $t = 0$), on a en particulier

$$J(0,\cdot) = u_t(0,\cdot) - \delta f(u_0) = \partial_x^2 u_0 + f(u_0) + \partial_x u_0 - \delta f(u_0) \geq 0,$$

d'après l'hypothèse sur u_0. Par ailleurs $J = 0 - \delta f(0) = 0$ sur $(0,T)\times\partial I$. Combiné avec le résultat de la question 4.a, ceci permet d'invoquer le principe du maximum pour conclure que $J \geq 0$ dans $(0,T)\times I$.

4.c. L'inégalité $J \geq 0$ se traduit par $u_t \geq \delta u^2$. En intégrant cette inégalité sur $[t,s] \subset (0,T)$ à x fixé, on obtient

$$\left[\frac{-1}{u(\tau,x)}\right]_t^s = \int_t^s \frac{u_t}{u^2}(\tau,x)\,d\tau \geq \delta(s-t),$$

d'où

$$\frac{1}{u(t,x)} \geq \frac{1}{u(s,x)} + \delta(s-t) \geq \delta(s-t).$$

En faisant tendre $s \to T$ on obtient l'estimation voulue.

Exercice I - Partie B.

1.a. D'après le cours, la formule de variation des constantes s'écrit:

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\big(f(u) + g(u)u_x\big)(s)\,ds.$$

1.b. Soit $E_{\tau,R}$ la boule de centre 0 et de rayon R dans E_τ. On considère l'opérateur de point fixe $\mathcal{A} : E_{\tau,R} \to E_{\tau,R}$ défini par $\mathcal{A}v = u$ où $u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)\big(f(v) + g(v)v_x\big)(s)\,ds$.

• Montrons que $\mathcal{A}$ envoie bien $E_{\tau,R}$ dans lui-même.

On remarque tout d'abord que, pour $v \in E_{\tau,R}$, on a $\|f(v) + g(v)v_x\|_{L^\infty(Q_\tau)} \leq M(1+R)$, avec $M = \sup_{|y|\leq R}|f(y)| + |g(y)|$. Par (5b), on en déduit que $\|S(t-s)\big(f(v)+g(v)v_x\big)(s)\|_{C^1} \leq KM(1+R)(t-s)^{-1/2}$. Ainsi le terme intégral de $(\mathcal{A}v)(t)$ converge absolument dans C^1 et, en utilisant (5a), on voit que

$$\|\mathcal{A}v\|_{E_\tau} = \sup_{t\in[0,\tau]}\|(\mathcal{A}v)(t)\|_{C^1} \leq K\|u_0\|_{C^1} + 2KM(1+R)\tau^{1/2} \leq R$$

en choisissant $R = 1 + K\|u_0\|_{C^1}$ et $\tau \leq (2KM(1+R))^{-2}$.

• Montrons maintenant que $\mathcal{A}$ est une contraction stricte. Pour $v_1, v_2 \in E_{\tau,R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}v_1)(t) - (\mathcal{A}v_2)(t)\|_{C^1} \\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)\big((f(v_1)+g(v_1)\partial_x v_1) - (f(v_2)+g(v_2)\partial_x v_2)\big)(s)\|_{C^1}\,ds \\
&\leq K\int_0^t (t-s)^{-1/2}\big(\|f(v_1)-f(v_2)\|_\infty(s) + \|(g(v_1)-g(v_2))\partial_x v_1\|_\infty(s) + \|g(v_2)(\partial_x v_1 - \partial_x v_2)\|_\infty(s)\big)\,ds \\
&\leq K\int_0^t (t-s)^{-1/2}\big(M'\|v_1-v_2\|_\infty(s) + RM''\|v_1-v_2\|_\infty(s) + M\|\partial_x v_1 - \partial_x v_2\|_\infty(s)\big)\,ds,
\end{aligned}$$

où $M' = \sup_{|y|\leq R}|f'(y)|$ et $M'' = \sup_{|y|\leq R}|g'(y)|$. Par conséquent,

$$\|\mathcal{A}v_1 - \mathcal{A}v_2\|_{E_\tau} \leq 2K\tau^{1/2}(M' + RM'' + M)\|v_1 - v_2\|_{E_\tau}$$

et $\mathcal{A}$ est donc une contraction stricte si on impose de plus $\tau < (2K(M' + RM'' + M))^{-2}$.

1.c. On constate que τ dans la question précédente peut être choisi uniformément positif pour $\|u_0\|_{C^1}$ bornée. Si $\|u(t)\|_{C^1}$ ne tend pas vers l'infini lorsque $t \to T < \infty$, alors il existe $t_j \to T$ et $C > 0$ tels que $\|u(t_j)\|_{C^1} \leq C$. On peut alors utiliser l'argument de point fixe pour prolonger la solution sur $[t_j, t_j + \tau]$. Comme $t_j + \tau > T$ pour j grand, ceci contredit la déinition de T comme temps maximal.

2.a. La formule de variation des constantes entre s et $s + \tau$ s'écrit

$$u(s+\tau) = S(\tau)u(s) + \int_0^\tau S(\tau-\sigma)\big(f(u) + g(u)u_x\big)(s+\sigma)\,d\sigma.$$

En utilisant (5b), on en déduit que

$$\|u(s+\tau)\|_{C^1} \leq K\tau^{-1/2}\|u(s)\|_\infty + \int_0^\tau K(\tau-\sigma)^{-1/2}(\tilde{M} + \tilde{M}\|u(s+\sigma)\|_{C^1})\,d\sigma,$$

avec $\tilde{M} = \sup_{|y|\leq M}|f(y)| + |g(y)|$. Donc

$$\|u(s+\tau)\|_{C^1} \leq MK\tau^{-1/2} + 2K\tilde{M}\tau^{1/2}(1 + \sup_{\sigma\in[s,s+\tau]}\|u(\sigma)\|_{C^1}),$$

ce qui implique le résultat.

2.b. On distingue 2 cas:
• Si $\sigma \leq \tau$, alors $\|u(\sigma)\|_{C^1} \leq h(\tau) \leq h(T/2)$.
• Si $\sigma \in (\tau, T)$ alors on peut poser $s = \sigma - \tau$ et la formule précédent implique

$$\|u(\sigma)\|_{C^1} = \|u(s+\tau)\|_{C^1} \leq C\tau^{-1/2} + C_2 + C_3\tau^{1/2}h(t).$$

En combinant les 2 cas, en posant $C_2' = C_2 + h(T/2)$, et en passant au sup, on voit donc que

$$h(t) = \sup_{\sigma\in[0,t]}\|u(\sigma)\|_{C^1} \leq C\tau^{-1/2} + C_2' + C_3\tau^{1/2}h(t).$$

2.c. On prend $\tau = \min((2C_3)^{-2}, T/2)$. Alors $h(t) \leq C_1\tau^{-1/2} + C_2' + (1/2)h(t)$ pour tout $t \in (0,T)$. Par conséquent, $\sup_{\sigma\in(0,T)}\|u(\sigma)\|_{C^1} \leq 2(C_1\tau^{-1/2} + C_2') < \infty$, une contradiction avec 1.c.

Exercice II.

1. On pose $w = u + v$ et on constate que $w_t - a\Delta w = 0$, avec $w = 0$ sur le bord. Le principe du maximum implique alors que $0 \leq w \leq \|w_0\|_\infty$. Par conséquent u et v sont bornées, d'où $T = \infty$.

2. Comme $u \geq 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0$, et de même $\frac{\partial v}{\partial \nu} \leq 0$, sur $\partial\Omega$. On intégrant les 2 équations en espace, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u+v)\,dx &= a\int_\Omega \Delta u\,dx + b\int_\Omega \Delta v\,dx + \int_\Omega (v^p - h(u) + h(u) - v^p)\,dx \\ &= a\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\sigma + b\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}\,d\sigma \leq 0.\end{aligned}$$

3.a. Soit $q > mp$. On applique (6) avec $\alpha = 1,\ \gamma = q,\ \beta = mp$ et $\theta = \dfrac{(mp-1)q}{(q-1)mp}$. Combinant ceci avec la question 2, on obtient

$$(E1) \qquad \|v^p(t)\|_m = \|v(t)\|_{mp}^p \leq \left(\|v(t)\|_1^{1-\theta}\|v(t)\|_q^\theta\right)^p \leq C_1^{(1-\theta)p}\|v(t)\|_q^{\theta p}.$$

On observe que $\theta \to \tilde\theta := (mp-1)/mp$ lorsque $q \to \infty$. Or $p\tilde\theta = \dfrac{mp-1}{m} = p - \dfrac{1}{m}$. Comme $p < 1 + \dfrac{n}{2}$, on peut choisir $m > n/2$ tel que $p - (1/m) < 1$. Pour tout $q > 1$ assez grand on a alors $p\tilde\theta < 1$ et (E1) donne le résultat.

3.b. En utilisant la formule de variation des constantes pour la 1ère équation de (P), $h \geq 0$, l'estimation L^m-L^∞ pour le semi-groupe de la chaleur et la question 3.a, on obtient

$$\begin{aligned}u(t,\cdot) &= e^{at\Delta}u_0 + \int_0^t e^{a(t-s)\Delta}(v^p - h(u))(s)\,ds \leq e^{at\Delta}u_0 + \int_0^t e^{a(t-s)\Delta}v^p(s)\,ds \\ &\leq \|u_0\|_\infty + C\int_0^t (t-s)^{-n/2m}\|v^p(s)\|_m\,ds \leq \|u_0\|_\infty + CC_2\int_0^t (t-s)^{-n/2m}\|v(s)\|_q^{1-\varepsilon}\,ds.\end{aligned}$$

Comme $m > n/2$, si on prend $q > 1$ suffisamment grand (cf. question 3.a), on a $nq'/2m < 1$. Appliquant maintenant l'inégalité de Hölder sur $[0,t]$, il vient

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_\infty &\leq \|u_0\|_\infty + C\Big(\int_0^t (t-s)^{-nq'/2m}\,ds\Big)^{1/q'}\Big(\int_0^t \|v(s)\|_q^{(1-\varepsilon)q}\,ds\Big)^{1/q} \\ &\leq \|u_0\|_\infty + Ct^{(1-(nq'/2m))(1/q')}\,t^{\varepsilon/q}\Big(\int_0^t \|v(s)\|_q^q\,ds\Big)^{(1-\varepsilon)/q} \leq \|u_0\|_\infty + CT^\eta\|v\|_{L^q(Q_t)}^{1-\varepsilon}\end{aligned}$$

pour un $\eta > 0$, d'où (7).

4. Soit $\tau \in (0,T)$, $0 \leq \chi \in C_0^\infty(Q_\tau)$ et soit la solution du problème linéaire adjoint

$$\begin{cases} \varphi_t - b\Delta\varphi = \chi & \text{dans } Q_\tau, \\ \varphi_{|\partial\Omega} = 0, \\ \varphi_{|t=\tau} = 0 \end{cases}$$

(noter les conditions de Dirichlet, au lieu de Neumann dans le Cours). On a $\varphi \geq 0$ d'après le principe du maximum. Posons $r = q'$. On a l'estimation parabolique L^r:

$$\|\varphi_t\|_{L^r(Q_\tau)} + \|D^2\varphi\|_{L^r(Q_\tau)} \leq C\|\chi\|_{L^r(Q_\tau)},$$

d'où l'on déduit en particulier

$$\|\varphi(0,\cdot)\|_{L^r(\Omega)} \leq 0 + \int_0^\tau \|\varphi_t\|_{L^r(\Omega)} \leq C\|\varphi_t\|_{L^r(Q_\tau)} \leq C\|\chi\|_{L^r(Q_\tau)}.$$

Multipliant la sommes des 2 premières équations de (P) par φ, intégrant par parties et utilisant les conditions aux limites nulles pour u, v, φ, on obtient

$$0 = \int\int_{Q_\tau} \big((u_t - a\Delta u)\varphi + (v_t - b\Delta v)\varphi\big) = \int\int_{Q_\tau} \big(u(-\varphi_t - a\Delta\varphi) + v(-\varphi_t - b\Delta\varphi)\big) + \Big[(u+v)\varphi\Big]_0^\tau$$

d'où

$$\begin{aligned}\int\int_{Q_\tau} v\chi &= \int\int_{Q_\tau} u(\varphi_t + a\Delta\varphi) + \int_\Omega ((u+v)\varphi)(0,x)\,dx \\ &\le C\|u\|_{L^q(Q_\tau)}\big(\|\varphi_t\|_{L^r(Q_\tau)} + \|D^2\varphi\|_{L^r(Q_\tau)}\big) + C\|u_0+v_0\|_{L^q(\Omega)}\|\varphi(0,\cdot)\|_{L^r(\Omega)} \\ &\le C\big(\|u\|_{L^q(Q_\tau)} + \|u_0+v_0\|_{L^q(\Omega)}\big)\|\chi\|_{L^r(Q_\tau)}.\end{aligned}$$

L'estimation (8) s'en déduit par dualité.

5. Soit $\tau \in (0,T)$. En combinant (7) et (8), puis en appliquant les inégalités de Hölder et de Young, on voit que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(Q_\tau)} &\le C_3\big(1 + \|v\|^{1-\varepsilon}_{L^q(Q_\tau)}\big) \le C_3\Big(1 + C_4^{1-\varepsilon}\big(1 + \|u\|_{L^q(Q_\tau)}\big)^{1-\varepsilon}\Big) \\ &\le C\big(1 + \|u\|^{1-\varepsilon}_{L^q(Q_\tau)}\big) \le C\big(1 + (T|\Omega|)^{(1-\varepsilon)/q}\|u\|^{1-\varepsilon}_{L^\infty(Q_\tau)}\big) \le \frac{1}{2}\|u\|_{L^\infty(Q_\tau)} + C,\end{aligned}$$

avec $C > 0$ des constantes indépendantes de τ. Par conséquent $\|u\|_{L^\infty(Q_\tau)} \le 2C$, $0 < \tau < T$, donc $M := \|u\|_{L^\infty(Q_T)} < \infty$.

Posant maintenant $K = \sup_{0 \le z \le M} h(z)$, on voit que $\overline{v} := \|v_0\|_\infty + Kt$ est une sur-solution de l'équation pour v. On en déduit que $v \in L^\infty(Q_T)$. Ceci contredit $T < \infty$. Conclusion : $T = \infty$.