12 - 10
M. SOUPLET

Corrigé Examen du 31/5/2010

I ① Soit $\bar{u} \equiv 1$. Alors $\bar{u}_t - \Delta \bar{u} = 0 = \bar{u}^p - \bar{u}^q$ et $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$.
D'après le principe de comparaison si $\|u_0\|_\infty \leq 1$, c.-à-d $u_0 \leq \bar{u}|_0$ alors $u \leq \bar{u}$ sur $]0,T^*[\times \Omega$ d'où $T^* = \infty$ (car sinon $\|u(t)\|_\infty \underset{t \to T^*}{\longrightarrow} +\infty$) et $u \leq 1$.

② D'après la formule de Green (et la régularité suffisante de u),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_t \, dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{0} u_t \, d\sigma - \int_\Omega (\Delta u) u_t \, dx$$

De plus, $\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{u^{p+1}}{p+1}\right) dx = \int_\Omega (u^q u_t - u^p u_t) \, dx$.

Ainsi $E'(t) = \int_\Omega (-\Delta u + u^q - u^p) u_t = -\int_\Omega |u_t|^2 dx$.

D'autre part, $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int u^2 dx = \int_\Omega u u_t = \int_\Omega u(\Delta u + u^p - u^q) = \int_\Omega (-|\nabla u|^2 - u^{q+1} + u^{p+1}) dx$
(sachant que $\int_\Omega u \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{0} d\sigma - \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ par Green). Donc

$$\frac{1}{2} f'(t) = -2\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{u^{q+1}}{q+1} - \frac{u^{p+1}}{p+1}\right) - \frac{q-1}{q+1}\int_\Omega u^{q+1} + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}$$ d'où le résultat.

③ ⓐ Avec $q=1$, on a $\frac{1}{2} f'(t) = -2E(t) + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}$.
Comme $E'(t) \leq 0$ et $\int_\Omega u^2 \leq |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_\Omega u^{p+1}\right)^{\frac{2}{p+1}}$ d'après l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\frac{1}{2} f'(t) \geq -2E(0) + \underbrace{\frac{p-1}{p+1}|\Omega|^{\frac{1-p}{2}}}_{c_1} (f(t))^{\frac{p+1}{2}}$$

③ ⓑ Si $E(0) < 0$, alors $f \geq 0$ vérifie $f' > 2c_1 f^\gamma$ sur $]0,T^*[$ avec $\gamma = \frac{p+1}{2} > 1$. Donc on a forcément $T^* < \infty$ d'après le lemme d'inégalité différentielle vu en cours.

④ ⓐ La fonction $g(X) = X^{q+1} - \varepsilon X^{p+1}$ est continue pour $X \geq 0$ et $g(X) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, car $p > q$. Donc g est majorée sur $\mathbb{R}^+$, d'où le résultat.

4 b) D'après ② et 4 a), pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\frac{1}{2} f''(t) \geq -2E(0) - \frac{q-1}{q+1}\left[\varepsilon \int_\Omega u^{p+1} dx + C_\varepsilon\right] + \frac{p-1}{p+1} \int_\Omega u^{p+1} dx$$

$$= -2E(0) - \frac{q-1}{q+1} |\Omega| C_\varepsilon + \left(\frac{p-1}{p+1} - \varepsilon \frac{q-1}{q+1}\right) \int_\Omega u^{p+1} dx$$

On choisit $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{p-1}{p+1} \frac{q+1}{q-1}$ et on pose $C_4 = 2|E(0)| + \frac{q-1}{q+1} |\Omega| C_\varepsilon > 0$.

En utilisant Hölder comme au ③ a), on obtient :

$$\frac{1}{2} f''(t) \geq -C_4 + \underbrace{\frac{p-1}{2(p+1)} |\Omega|^{\frac{1-p}{2}}}_{C_3} (f(t))^{\frac{p+1}{2}} .$$

⑤ D'après le lemme du cours, on sait que l'inégalité diff. du ④ b) ne peut être satisfaite globalement si le second membre devient > 0 pour un $t \geq 0$. Comme $T^* = \infty$ par hypothèse, on a donc $f(t) \leq (C_4/C_3)^{\frac{2}{p+1}}$, $\forall t \geq 0$, d'où le résultat voulu avec $C_1 = (C_4/C_3)^{\frac{1}{p+1}}$

⑥ D'après la formule de variation des constantes, on a

$$u(t) = S(t) u_0 + \int_0^t \left(S(t-s) u^p(s) - S(t-s) u^q(s)\right) ds .$$

Or $S(t-s) \underbrace{u^q(s)}_{\geq 0} \geq 0$ par le principe du maximum.

D'où le résultat

⑦ Si $h(t) < 2A$, $\forall t \in [0,1]$, alors le résultat est vrai.

Sinon $\exists t_0 = \min\{t \in]0,1], h(t) = 2A\}$ (h étant continue).

On a alors $2A = h(t_0) \leq A + B t_0^\gamma (2A)^p$, d'où $A \leq B t_0^\gamma (2A)^p$.

Donc $1 \geq t_0 \geq (AB^{-1}(2A)^{-p})^{1/\gamma} = (2^p B A^{p-1})^{-1/\gamma} = \tau$. Donc, dans les 2 cas, on a bien $h(\tau) \leq 2A$.

8 a) D'après les estimations L^2-L^{2p} pour $S(t)$, on a

$\|S(t)\phi\|_{2p} \leq C_2 t^{-\alpha} \|\phi\|_2$, $\forall t \in]0,1]$, où $\alpha = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right) = \frac{n(p-1)}{4p}$

et $C_2 = C_2(\Omega, n, p) > 0$. Grâce à ⑥, on en déduit, $\forall t \in [0,1]$:

$$\|u(t)\|_{2p} \le C_2 t^{-\frac{m(p-1)}{4p}} \|u_0\|_2 + C_2\int_0^t (t-s)^{-\frac{m(p-1)}{4p}} \|u^p(s)\|_2 \, ds$$

comme $\|u^p(s)\|_2 = \|u(s)\|_{2p}^p$ et $\|u_0\|_2 \le C_1$ (4.5), on obtient l'inégalité voulue.

(8b) On a $\int_0^t (t-s)^{-\frac{m(p-1)}{4p}}\|u(s)\|_{2p}^p \, ds \le h^p(t)\int_0^t (t-s)^{-\frac{m(p-1)}{4p}} s^{-\frac{m(p-1)}{4}} ds$

Cette intégrale $J(t)$ est bien convergente en $s=0$ et $s=t$ car $0<\frac{m(p-1)}{4p}<\frac{m(p-1)}{4}<1$. De plus, par le changement de variable $s=t\sigma$, on a $J(t)= t^{1-\frac{m(p-1)}{4p}-\frac{m(p-1)}{4}} \underbrace{\int_0^1 (1-\sigma)^{-\frac{m(p-1)}{4p}}\sigma^{-\frac{m(p-1)}{4}}}_{C(m,p)}$.

D'après (8a), il vient alors

$$t^{\frac{m(p-1)}{4p}}\|u(t)\|_{2p} \le C_2C_1 + C_2 C\, t^{\overbrace{1-\frac{m(p-1)}{4}}^{>0}} h^p(t), \quad 0<t\le 1.$$

En prenant le sup pour $t\in]0,T[$ et utilisant le fait que h est croissante par définition, on conclut que

$$h(T)\le C_2C_1 + C_3 T^{1-\frac{m(p-1)}{4}} h(T), \quad 0<T\le1.$$

(8c) Il suffit d'appliquer (7) avec $A=C_2C_1$, $\delta = 1-\frac{m(p-1)}{4}>0$, $B=C_3$. On remarque que τ ne dépend que de Ω, m, p, C_1 (par l'intermédiaire de A, B, δ).

(9a) On applique à (6) l'estimation L^2-L^∞ de $S(t)$:

$\|S(t)\phi\|_\infty \le C t^{-\frac m4}\|\phi\|_2$, $0<t\le1$ avec $C=C(m,p)>0$. Ainsi

$$\|u(\tau)\|_\infty \le C\tau^{-\frac m4}\|u_0\|_2 + C\int_0^\tau (\tau-s)^{-\frac m4}\|u^p(s)\|_2 \, ds$$
$$\le C\tau^{-\frac m4}C_1 + C\int_0^\tau(\tau-s)^{-\frac m4}\|u(s)\|_{2p}^p \, ds.$$ D'où

$$\|u(\tau)\|_\infty \le C_4 := C\tau^{-\frac m4}C_1 + C h^p(\tau)\underbrace{\int_0^\tau (\tau-s)^{-\frac m4} s^{-\frac{m(p-1)}{4}} ds}_{<\infty \text{ car } m\le 3 \text{ et } \frac{m(p-1)}{4}<1}$$

(9b) Comme l'argument ci-dessus s'applique à toute solution globale et que C_4 ne dépend de la solution que via C_1 (= un majorant de la norme L^2 de la donnée initiale), il suff de l'appliquer à $u_a(t,x)=u(a+t,x)$, $\forall a\ge0$, et de noter que $\|u_a(0)\|_2\le C_1$ (4.5), d'où $\|u(a+\tau)\|_\infty \le C_4$, $\forall a \ge$

II (1a) On a, dans $(0,T^*)\times\mathbb{R}^n$,

$$z_t-\Delta z = e^{-t}(u_t-\Delta u+v_t-\Delta v)-e^{-t}(u+v)$$
$$= e^{-t}\left(\cancel{v}-kv+\frac{u^2}{1+u}-u-\cancel{v}\right) = e^{-t}\left(-kv-\frac{u}{1+u}\right)\leq 0$$

(1b) D'après le principe du maximum, on en déduit que $z\leq \|z(0,\cdot)\|_\infty$, d'où $0\leq u,v\leq \|u_0+v_0\|_\infty e^t$ dans $(0,T^*)\times\mathbb{R}^n$

Par conséquent $T^*=\infty$ (car sinon, $\|u(t)\|_\infty+\|v(t)\|_\infty \underset{t\to T^*}{\longrightarrow} +\infty$: une contradiction).

(2a) Il suffit de prendre $F(u_1,u_2)=\left(u_2,-ku_2+\frac{u_1^2}{1+u_1}\right)$

(2b) On a $\frac{\partial F_1}{\partial u_2}=\frac{\partial u_2}{\partial u_2}=1$ et

$$\frac{\partial F_2}{\partial u_1}=\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{u_1^2}{1+u_1}\right)=\frac{\partial}{\partial u_1}\left(u_1-1+\frac{1}{1+u_1}\right)=1-\frac{1}{(1+u_1)^2}\geq 0 \quad (\text{pour } u_1\geq 0)$$

(3a) On rappelle que $\frac{\partial}{\partial t}(G_{t+\lambda}(x))=\Delta(G_{t+\lambda}(x))$ (cf. Cours). Ainsi

$$\bar{u}_t-\Delta\bar{u}-\bar{v}=f'(t)G_{t+\lambda}+f(t)\underbrace{\left(\tfrac{\partial}{\partial t}G_{t+\lambda}-\Delta G_{t+\lambda}\right)}_{0}-f'(t)G_{t+\lambda}=0$$

(3b) On calcule

$$P_{\bar v}\equiv \bar v_t-\Delta\bar v+k\bar v-\frac{\bar u^2}{1+\bar u}\geq f''(t)G_{t+\lambda}+f'(t)\overbrace{\left(\tfrac{\partial}{\partial t}G_{t+\lambda}-\Delta G_{t+\lambda}\right)}^{0}$$
$$+kf'(t)G_{t+\lambda}-f^2(t)G_{t+\lambda}^2$$
$$=f'(t)G_{t+\lambda}\left\{\frac{f''(t)}{f'(t)}+k-\frac{f^2(t)}{f'(t)}G_{t+\lambda}\right\}$$

Or $f'(t)=\eta\alpha(t+\lambda)^{\alpha-1}>0$, $f''(t)=\eta\alpha(\alpha-1)(t+\lambda)^{\alpha-2}$ et $G_{t+\lambda}\leq (t+\lambda)^{-n/2}$, d'où

$$P_{\bar v}\geq f'(t)G_{t+\lambda}\left\{\frac{\alpha-1}{t+\lambda}+k-\frac{\eta}{\alpha}(t+\lambda)^{\alpha+1-\frac{n}{2}}\right\}=f'(t)G_{t+\lambda}\left\{\frac{\alpha-1}{t+\lambda}+k-\frac{\eta}{\alpha}\right\}.$$

(3c) On choisit $\lambda\geq\frac{2}{k}$ et $0<\eta\leq\frac{k\alpha}{2}$. Alors, comme $\alpha>0$ et $f'(t)>0$, on a

$$P_{\bar v}\geq f'(t)G_{t+\lambda}\left\{-\frac{k}{2}+k+\frac{k}{2}\right\}=0.$$ De plus,

$$\bar u(0,x)=\eta\lambda^{-1}e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda}} \quad\text{et}\quad \bar v(0,x)=\eta\alpha\lambda^{-2}e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda}} \quad (\text{car } \alpha-\tfrac{n}{2}=-1)$$

Donc si $u_0(x),v_0(x)\leq c_1e^{-\frac{|x|^2}{4\lambda}}$ avec $c_1=\eta\min(\lambda^{-1},\alpha\lambda^{-2})>0$, alors $(\bar u,\bar v)$ est une sur-solution de (S). D'après le principe de comparaison, on en déduit que $u\leq\bar u$, $v\leq\bar v$ d'où en particulier

$$\|u(t)\|_\infty\leq\|\bar u(t)\|_\infty=\underbrace{\eta}_{c_2}(t+\lambda)^{-1},\quad \|v(t)\|_\infty\leq\|\bar v(t)\|_\infty=\underbrace{\eta\alpha}_{c_3}(t+\lambda)^{-2}.$$