UNIVERSITE PARIS 6 — Mai 2009

Master 2 ANEDP — Cours de Ph. Souplet

Examen final

Durée : 3 heures. Documents autorisés.

*NB : Les questions marquées d'une * peuvent être un peu plus difficiles. Les questions IB1.b et II4 sont assez longues à traiter. Ne pas hésiter à admettre le résultat d'une question pour passer à la suite.*

EXERCICE I. Soit I l'intervalle ouvert $(0,1)\subset\mathbb{R}$. Pour $v\in L^\infty(I)$, on note $\|v\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|v(x)|$. On pose

$$C_0(I)=\{v\in C(\overline{I});\ v(0)=v(1)=0\},\qquad X=C_0(I)\cap C^1(\overline{I}),$$

et on munit X de la norme $\|\cdot\|_{C^1}$, définie par $\|v\|_{C^1}=\|v\|_\infty+\|v_x\|_\infty$. On considère le problème

$$u_t-u_{xx}=f(u)+g(u)u_x,\quad t>0,\ x\in I, \tag{1}$$

$$u=0,\quad t>0,\ x\in\partial I, \tag{2}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

où f,g sont des fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $u_0\in X$.

Partie A. Dans cette partie on admet que le problème (1)(2)(3) possède une unique solution classique maximale. On note u cette solution et $T=T^*(u_0)$ son temps maximal d'existence. On a $u,u_x\in C([0,T)\times\overline{I})$ et $u\in C^{1,2}((0,T)\times\overline{I})$. De plus le problème (1)(2)(3) satisfait le principe de comparaison. On admet également que

$$\text{si } T<\infty, \text{ alors } \sup_{t\in(0,T)}\|u(t)\|_\infty=\infty. \tag{4}$$

1. Montrer que si $f(0)\geq 0$ et $u_0\geq 0$, alors $u\geq 0$.

2. Dans cette question on prend $f(u)=e^u$, $g(u)=ke^{mu}$, avec $m\geq 0$, $k>0$ et on suppose $u_0\geq 0$.

a. On suppose $m>1$. En cherchant une sur-solution de la forme $\overline{u}(t,x)=C-x$ pour $C>0$ bien choisie, montrer que $T=\infty$.

b. On suppose $m=1$. Montrer par une modification simple de $\overline{u}$ que l'on a encore $T=\infty$.

c. On suppose dans le reste de la question 2 que $0<m<1$. Soit $\varphi(x)=\sin(\pi x)$ et $y(t)=\int_0^1 u(t,x)\varphi^q(x)\,dx$ avec $q\geq 1$. Montrer que

$$y'(t)\geq -q\pi^2 y+\int_0^1 e^u\varphi^q-km^{-1}\int_0^1 e^{mu}(\varphi^q)_x.$$

d*. Montrer que pour $q>1$ bien choisi, il existe $C=C(k,m,q)>0$ tel que

$$km^{-1}\Big|\int_0^1 e^{mu}(\varphi^q)_x\Big|\leq \frac{1}{2}\int_0^1 e^u\varphi^q+C.$$

e. En déduire l'existence de constantes $c_1,c_2>0$, indépendantes de u, telles que $y'(t)\geq c_1y^2-c_2$.

f. Conclure que $T<\infty$ dès que $\int_0^1 u_0(x)\varphi^q(x)\,dx$ est suffisamment grand.

3*. Dans cette question on prend $f(u)=e^u$ et $u_0\geq 0$ (g est quelconque). Montrer que si $T<\infty$, alors

$$\|u(t)\|_\infty\geq -\mathrm{Log}(T-t),\quad 0<t<T.$$

(On pourra utiliser un argument de comparaison faisant intervenir la fonction $z(t,x)=-\mathrm{Log}(T-\delta-t)$ pour $\delta>0$ petit.)

4. Dans cette question on prend $g(u)=1$, on suppose que f est de classe C^2, convexe, avec $f(0)=0$, et que $u_0\in C^2(I)$, $u_0\geq 0$. On fixe $\delta\in(0,1)$ et on pose $J=u_t-\delta f(u)$. On admet que J est aussi régulière que nécessaire.

a. Montrer que

$$J_t-J_{xx}\geq f'(u)J+J_x,\quad 0<t<T,\ x\in I.$$

Dans le reste de la question 4, on suppose que $\partial_x^2u_0+(1-\delta)f(u_0)+\partial_xu_0\geq 0$ dans I.

b. Montrer que $J\geq 0$.

c. On prend $f(u)=u^2$. Déduire de la question 4.b que si $T<\infty$, alors il existe $C>0$ tel que

$$u(t,x)\leq C(T-t)^{-1},\quad 0<t<T,\ x\in I.$$

Partie B. Le but de cette partie est de montrer certaines propriétés admises dans la partie A. On note $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur sur $L^2(I)$ avec conditions de Dirichlet. On admet les estimations linéaires suivantes :

$$(5a) \qquad \|S(t)u_0\|_{C^1} \leq K\|u_0\|_{C^1}, \quad 0 < t < T_0, \quad u_0 \in X,$$

$$(5b) \qquad \|S(t)\phi\|_{C^1} \leq Kt^{-1/2}\|\phi\|_\infty, \quad 0 < t < T_0, \quad \phi \in L^\infty(I),$$

pour tout $T_0 < \infty$, où la constante $K > 0$ dépend seulement de T_0. Pour $\tau > 0$, on note $E_\tau = L^\infty((0,\tau); X)$, qui est un espace de Banach pour la norme $\|w\|_E = \sup\limits_{t\in(0,\tau)} \|w(t)\|_X$.

1.a. Ecrire la formule de variation des constantes associée à (1)(2)(3). On la note (V).

b*. Montrer l'existence de $\tau > 0$ (petit), uniforme par rapport à $\|u_0\|_X$, tel qu'il existe une unique solution u de (V) sur $(0,\tau)$. (Utiliser (5a), (5b) et un argument de point fixe sur une boule de E_τ.)

c. Soit T le temps maximal d'existence de u. Déduire de la question 1.b que si $T < \infty$, alors $\lim\limits_{t\to T-} \|u(t)\|_{C^1} = \infty$.

2. Le but de cette question est de montrer la propriété (4). **On raisonne par l'absurde et on suppose** donc que $T < \infty$ et qu'il existe $M > 0$ tel que $|u| \leq M$ sur $(0,T) \times I$.

a*. Soient $s, \tau > 0$ tels que $s + \tau < T$. En utilisant (5b) et la formule de variation des constantes associée à (1)(2) entre les temps s et $s+\tau$, montrer qu'il existe des réels $C_1, C_2, C_3 > 0$ tels que

$$\|u(s+\tau)\|_{C^1} \leq C_1\tau^{-1/2} + C_2 + C_3\tau^{1/2} \sup_{\sigma\in[s,s+\tau]} \|u(\sigma)\|_{C^1}, \quad \text{pour tous } s,\tau > 0 \text{ tels que } s+\tau < T.$$

b. On pose $h(t) := \sup_{\sigma\in[0,t]} \|u(\sigma)\|_{C^1}$. Déduire de la question 2.a qu'il existe $C_2' > 0$ telle que

$$h(t) \leq C_1\tau^{-1/2} + C_2' + C_3\tau^{1/2}h(t), \quad 0 < t < T,\ 0 < \tau \leq T/2.$$

c. Conclure.

EXERCICE II. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un domaine borné régulier. Pour tout $\tau > 0$, on note $Q_\tau = (0,\tau) \times \Omega$. Pour $1 \leq m \leq \infty$, on note $\|f\|_m = \|f\|_{L^m(\Omega)}$. Pour $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \infty$ et $f \in L^\alpha(\Omega) \cap L^\gamma(\Omega)$, on rappelle l'inégalité d'interpolation

$$(6) \qquad \|f\|_\beta \leq \|f\|_\alpha^{1-\theta}\|f\|_\gamma^\theta, \qquad \theta = \frac{(\beta-\alpha)\gamma}{(\gamma-\alpha)\beta}.$$

On considère le problème

$$(P) \qquad \begin{cases} u_t - a\Delta u = v^p - h(u), & t > 0,\ x \in \Omega, \\ v_t - b\Delta v = h(u) - v^p, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ u = v = 0, \quad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad v(0,x) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où $p \geq 1$, h est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ avec $h(0) = 0$, $a, b > 0$ et $u_0, v_0 \in C_0(\Omega)$, $u_0, v_0 \geq 0$. Soit (u,v) l'unique solution classique maximale de (P). On note $T = T^*(u_0,v_0)$ son temps maximal d'existence, et on rappelle que $u, v \geq 0$.

1. Montrer que si $a = b$, alors $T = \infty$. Dans la suite on ne supposera **pas** $a = b$.

2. Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que $\|u(t)\|_1, \|v(t)\|_1 \leq C_1$ pour tout $t \in (0,T)$.

Dans toute la suite, on suppose $p < (n+2)/n$**, et le but est de montrer que** $T = \infty$**. On raisonne par l'absurde et on suppose donc désormais** $T < \infty$**.**

3.a*. En utilisant (6) et la question 2, montrer que pour $m > n/2$ proche de $n/2$ et $q > 1$ assez grand, il existe $\varepsilon > 0$ et $C_2 > 0$ tels que

$$\|v^p(t)\|_m \leq C_2\|v(t)\|_q^{1-\varepsilon}, \quad 0 < t < T.$$

b. En utilisant la formule de variation des constantes, en déduire l'existence de $C_3 > 0$ tels que

$$(7) \qquad \|u(t)\|_\infty \leq C_3\Big(1 + \|v(s)\|_{L^q(Q_t)}^{1-\varepsilon}\Big), \quad 0 < t < T.$$

4*. En utilisant une modification simple de la méthode de dualité vue en Cours, montrer qu'il existe $C_4 > 0$ tel que pour tout $\tau < T$,

$$(8) \qquad \|v\|_{L^q(Q_\tau)} \leq C_4\big(1 + \|u\|_{L^q(Q_\tau)}\big).$$

5. Déduire de (7) et (8) que $\sup\limits_{s\in(0,T)} \|u(s)\|_\infty < \infty$, puis ensuite que $\sup\limits_{s\in(0,T)} \|v(s)\|_\infty < \infty$. Conclure.