UNIVERSITE PARIS 6 — Mai 2010
Master 2 ANEDP — Cours de Ph. Souplet

Examen final

Durée : 3 heures. Documents autorisés.

NB : Ne pas hésiter à admettre le résultat d'une question pour passer à la suite.

EXERCICE I. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, un domaine borné régulier. On considère le problème

$$(P)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = u^p - u^q, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

où ν désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$, $p > q \geq 1$, $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0 \geq 0$. Soit u l'unique solution classique maximale de (P), avec $u \geq 0$. On note $T^* = T^*(u_0)$ son temps maximal d'existence. Dans la suite on admettra que u est aussi régulière que nécessaire. Pour $1 \leq k \leq \infty$, on note $\|.\|_k$ la norme dans $L^k(\Omega)$. On définit

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2(t,x)\,dx + \frac{1}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}(t,x)\,dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}(t,x)\,dx \qquad \text{et} \qquad f(t) = \int_\Omega u^2(t,x)\,dx.$$

1. Montrer que si $\|u_0\|_\infty \leq 1$, alors $T^* = \infty$ et $u \leq 1$.

2. Montrer que $E'(t) = -\int_\Omega (u_t)^2(t,x)\,dx$ et que

$$\frac{1}{2}f'(t) = -2E(t) - \frac{q-1}{q+1}\int_\Omega u^{q+1}(t,x)\,dx + \frac{p-1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1}(t,x)\,dx.$$

3. **Dans cette question seulement** on suppose que $q = 1$.

 a. Montrer que

$$\frac{1}{2}f'(t) \geq -2E(0) + c_1(f(t))^{(p+1)/2},$$

où $c_1 > 0$ est une constante que l'on calculera.

 b. En déduire que si $E(0) < 0$ alors $T^* < \infty$.

4. On suppose désormais $p > q \geq 1$.

 a. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$, dépendant seulement de ε, p, q, telle que

$$X^{q+1} \leq \varepsilon X^{p+1} + C_\varepsilon \quad \text{pour tout } X \geq 0.$$

 b. En déduire que

$$\frac{1}{2}f'(t) \geq c_2(f(t))^{(p+1)/2} - c_3,$$

où $c_2, c_3 > 0$ sont des constantes dépendant seulement de p, q, Ω et $E(0)$.

Dans toute la suite on suppose que $T^* = \infty$. Le but est d'établir une estimation de u dans L^∞.

5. Déduire de la question 4 que $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_2 \leq C_1$, où C_1 est une constante dépendant seulement de p, q, Ω et $E(0)$.

6. On note $(S(t))_{t\geq 0}$ le semi-groupe de la chaleur sur $L^2(\Omega)$ avec conditions de Neumann (i.e. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$). Vérifier que

$$u(t) \leq S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)u^p(s)\,ds \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

7. Soient $A, B, \gamma > 0$ des constantes et $h : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que

$$h(t) \leq A + Bt^\gamma h^p(t) \quad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

On pose $\tau = \min\big(1, (2^p BA^{p-1})^{-1/\gamma}\big)$. Montrer que $h(\tau) \leq 2A$.
(Indication : on pourra considérer le temps t minimal tel que $h(t) = 2A$, s'il existe.)

8. On suppose que $p < 1 + (4/n)$.

a. En utilisant les questions 5 et 6, montrer que

$$\|u(t)\|_{2p} \leq C_2 C_1 t^{-n(p-1)/4p} + C_2 \int_0^t (t-s)^{-n(p-1)/4p} \|u(s)\|_{2p}^p \, ds \quad \text{pour tout } t \in [0,1],$$

avec une constante C_2 ne dépendant que de Ω, n et p.

b. On définit la fonction $h(t) = \sup\limits_{0 \leq s \leq t} s^{n(p-1)/4p} \|u(s)\|_{2p}$. Déduire de la question 8.a que h vérifie

$$h(t) \leq C_2 C_1 + C_3 t^{1-(n(p-1)/4)} h^p(t) \quad \text{pour tout } t \in [0,1],$$

avec une constante $C_3 > 0$ ne dépendant que de Ω, n et p.

c. Déduire des questions 7 et 8.b que $h(\tau) \leq 2C_2C_1$ avec $\tau > 0$ ne dépendant que de Ω, n et p et C_1.

9. On suppose maintenant que $p < 1 + (4/n)$ et $n \leq 3$.

a. En utilisant les questions 6 et 8.c, montrer que $\|u(\tau)\|_\infty \leq C_4$, avec une constante $C_4 > 0$ ne dépendant que de C_1, Ω, n et p.

b. Conclure par un argument simple (sans calcul) que $\sup\limits_{t \geq \tau} \|u(t)\|_\infty \leq C_4$.

EXERCICE II. On considère le système suivant, issu de la dynamique des populations :

$$(S) \qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = v, & t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ v_t - \Delta v = -kv + \dfrac{u^2}{1+u}, & t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $k > 0$ et $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u_0, v_0 \geq 0$. Soit (u,v) l'unique solution classique maximale de (P), avec $u, v \geq 0$. On note T^* son temps maximal d'existence.

1.a. Montrer que la fonction $z = e^{-t}(u+v)$ vérifie $z_t - \Delta z \leq 0$ dans $]0, T^*[\, \times \mathbb{R}^n$.

b. En déduire que $T^* = \infty$.

2.a. Donner F telle que (S) s'écrive sous la forme $U_t - \Delta U = F(U)$, $U(0) = (u_0, v_0)$, avec $F : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}^2$, $U = (u_1, u_2)$, $F = (F_1, F_2)$.

b. Vérifier que (S) est un système *coopératif*, c'est-à-dire $\frac{\partial F_i}{\partial u_j} \geq 0$ pour $i \neq j$. On rappelle que, pour un tel système, **le principe de comparaison est valide.**

3. On suppose que $n \geq 3$ et on pose $\alpha = \frac{n}{2} - 1 > 0$. Soient $G_\sigma(x) = \sigma^{-n/2} \exp(-\frac{|x|^2}{4\sigma})$ les Gaussiennes standard. On définit

$$f(t) = \eta(t+\lambda)^\alpha, \qquad \overline{u}(t,x) = f(t) G_{t+\lambda}(x), \qquad \overline{v}(t,x) = f'(t) G_{t+\lambda}(x), \qquad \text{pour tout } t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\eta, \lambda > 0$ sont des paramètres.

a. Montrer que pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\overline{u}_t - \Delta u - \overline{v} = 0.$$

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\overline{v}_t - \Delta \overline{v} + k\overline{v} - \frac{\overline{u}^2}{1+\overline{u}} \geq f'(t) G_{t+\lambda}(x) \Big[\frac{\alpha - 1}{t+\lambda} + k - \frac{\eta}{\alpha} \Big].$$

c. En utilisant un choix approprié de λ et η, en déduire l'existence de constantes $c_1, c_2, c_3 > 0$ telles que si

$$0 \leq u_0(x), v_0(x) \leq c_1 \exp(-|x|^2/4\lambda) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

alors u et v vérifient les estimations de décroissance

$$\|u(t)\|_\infty \leq c_2 (t+\lambda)^{-1}, \quad \|v(t)\|_\infty \leq c_3 (t+\lambda)^{-2} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$