

**L’EFFET DE LA DIFFUSION DANS LES EQUATIONS ET
SYSTEMES PARABOLIQUES NON LINEAIRES**

– Résumé détaillé du cours (ce fichier sera remis à jour au fil des séances) –

REFERENCES

- [QS] P. Quittner, Ph. Souplet, Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states. Birkhäuser Advanced Texts, 2007.
- NB: La quasi-totalité de ce qui est vu en cours est traité dans [QS]. Il faut toutefois noter que les résultats sont parfois présentés sous une forme plus générale dans le livre que dans le cours. L’ouvrage est disponible à la Bibliothèque Math-Recherche de Chevaleret sous forme électronique, accessible (y compris à distance) aux personnes inscrites (gratuit pour les étudiants du M2).
- [Br] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Masson, 1992
- [CH] Th. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d’évolution semi-linéaires, ed. Ellipses, 1990 (version française); Oxford University Press, 1998 (version anglaise).
- [PW] M. Protter, H. Weinberger, Maximum principles in differential equations, Prentice-Hall, 1967

Cours # 1 (27/1/2010)

INTRODUCTION

1. Les équations et systèmes de type réaction-diffusion

Equations paraboliques: l’exemple le plus simple est l’équation de la chaleur $u_t - \Delta u = 0$. Cas semi-linéaire: les non-linéarités portent sur u (et éventuellement $\partial u / \partial x_i$), mais pas sur les dérivées d’ordre le plus élevé.

Cas scalaire: $u_t - \Delta u = f(u)$ (plus généralement, $f(t, x, u, \nabla u)$) + conditions initiales et aux limites (Dirichlet ou Neumann). Ici $u = u(t, x)$, $t \geq 0$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Systèmes: $\partial_t u_i - \Delta u_i = f_i(u_1, \dots, u_m)$, $i = 1, \dots, m$.

Le cas quasilinéaire, où Δu est remplacé par $\nabla \cdot (A(u, \nabla u) \nabla u)$ (autrement dit, l’opérateur de diffusion lui-même est non linéaire), est très étudié également mais ne sera pas abordé ici.

Exemples de modèles et d’applications: systèmes issus de la cinétique chimique (avec diffusion moléculaire), modèles de la combustion, dynamique et génétique des populations (animales ou bactériennes), biologie cellulaire (mécanismes activateur-inhibiteur - système de Gierer-Meinhardt).

2. Les différents aspects de l’analyse qualitative des EDP d’évolution

- Théorie locale (existence-unicité en temps petit, régularité).
- Existence globale ou non (explosion en temps fini).
- Comportement asymptotique (estimations a priori, convergence vers un équilibre) dans le cas d’existence globale.
- Etude des singularités (description en temps et/ou en espace) dans le cas de non-existence globale.

La question a) n’est PAS l’objet principal de ce cours. Cependant, on sera amené parfois à s’y intéresser, dans la mesure où cela peut fournir des outils importants pour l’étude globale (b-c-d) qui est l’objectif du cours.

Le point de vue général adopté dans ce cours est d’examiner l’effet de l’ajout d’une diffusion linéaire (et de conditions aux limites) par rapport au cas non diffusif, c-à-d à l’équation ou au système différentiel ordinaire (EDO), non linéaire, correspondant.

3. Effets possibles de la diffusion (et des conditions aux limites)

- Stabilisation partielle, ou totale, d’EDO instables.

- b) Modification (ou non) de la nature des singularités et du comportement singulier de la solution.
- c) Préservation de l'existence globale d'EDO stables
- d) Non-préservation de l'existence globale d'EDO stables (instabilité ou explosion induite par la diffusion)
- e) Influence de la dimension d'espace (par ex., sur la possibilité de stabilisation)

Certains effets comme a. (partiel) ou c. sont naturels, quoique souvent délicats à établir (surtout pour les systèmes). En revanche, d'autres – en particulier d. ou a. (totale) – sont plus surprenants.

CHAPITRE 1. Effets de la diffusion dans les équations scalaires de réaction-diffusion

Problème étudié dans ce chapitre:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ u = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega \quad (\text{conditions au bord de Dirichlet}), \\ u(0, x) = u_0(x), & t > 0, x \in \Omega, \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné régulier, $u_0 \in C_0(\bar{\Omega})$ (nulle au bord).

Exemple typique de terme de "réaction": la non-linéarité $f(u) = |u|^{p-1}u$ avec $p > 1$ (ou encore $f(u) = e^u$), qui donnent lieu à une multitude de résultats et de phénomènes intéressants.

1. Propriétés préliminaires

a. Existence-unicité locale pour (P)

Thm: Il existe une unique solution classique, maximale. (NB: solution classique = $C^{1,2} = C^1$ en t , C^2 en x). Temps maximal $T = T(u_0) \in (0, \infty]$. Si $T = T(u_0) < \infty$, alors $\|u(t)\|_\infty \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T$. (Admis pour l'instant; on y reviendra par la suite - ou voir [CH])

b. Principes du maximum et de comparaison

Principe du maximum classique, Principe de comparaison pour les sur- et sous-solutions, Principe du maximum fort, Lemme de Hopf.

[VOIR QS, Chap. 52 et aussi PW]

2. L'explosion pour l'EDO $y' = y^p$.

$y' = |y|^{p-1}y$, $t > 0$, avec $y(0) > 0$ et $p > 1$. Résolution explicite. Forme $y(t) = \kappa(T - t)^{-1/(p-1)}$

3. Stabilisation partielle par la diffusion (et les conditions de Dirichlet).

Thm: Existence globale et convergence uniforme exponentielle vers 0 pour les petites données initiales dans le cas $f(u) = |u|^{p-1}u$.

Démonstration par méthode de sur-solution.

[VOIR QS, Thm 19.2]

Cours # 2 (3/2/2010)

4. Explosion pour les grandes données initiales (I): méthode de la fonction propre.

[VOIR QS, Thm 17.1]

a. Rappels sur la première fonction propre du Laplacien dans H_0^1 .

Voir [Br]

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 > 0, \\ -\Delta \varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, & x \in \Omega, \\ \varphi_1 = 0, & x \in \partial\Omega \quad (\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)), \\ \varphi_1(x) > 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Existence-unicité de la solution (λ_1, φ_1) du problème spectral (1) (à une constante multiplicative près pour φ_1). De plus on a $\varphi_1 \in C^2(\bar{\Omega})$ (pour Ω régulier). On normalise φ_1 dans L^1 (c-à-d $\int_{\Omega} \varphi_1(x) dx = 1$).

b. *Lemme d'inégalité différentielle.*

Lemme: Soit $k \geq 0$ et soit y de classe C^1 , $y \geq 0$, telle que $y' \geq y^p - ky$ sur $(0, \infty)$. Alors $y \leq k^{1/(p-1)}$ sur $(0, \infty)$.

c. *Critère d'explosion pour $f(u) = u^p$, $u_0 \geq 0$ (S. Kaplan 1963).*

Thm: Si $\int_{\Omega} u_0 \varphi_1 > \lambda_1^{1/(p-1)}$ alors $T < \infty$.

Démonstration par inégalité différentielle pour $y(t) = \int_{\Omega} u(t) \varphi_1 dx$, via formule de Green et inégalité de Hölder.

5. Explosion pour les grandes données initiales (II): méthode d'énergie.

[VOIR QS, Thm 17.6]

On considère le cas $f(u) = |u|^{p-1}u$ (pas d'hypothèse de signe sur u_0).

a. *Identités d'énergie.*

Thm: On suppose $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et on pose $E(t) = \int_{\Omega} (\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1}) dx$.

(i) Alors $E \in C^1((0, T)) \cap C([0, T])$ et $\frac{dE}{dt} = - \int_{\Omega} (u_t)^2 dx \leq 0$.

(ii) On a $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^2 dx = \int_{\Omega} (-|\nabla u|^2 + |u|^{p+1}) dx$.

Démonstration (sous hyp de régularité) par dérivation sous le signe somme et formule de Green

b. *Critère d'explosion (H. Levine 1972, J. Ball 1977).*

Thm: Si $E(u_0) \leq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$ alors $T < \infty$.

Démonstration par identités d'énergie, Hölder et inégalité différentielle pour $y(t) = \int_{\Omega} u^2 dx$.

c. *Exercices:*

1) Montrer que si on remplace la condition au bord de Dirichlet par celle de Neumann ($\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$), alors toutes les solutions vérifient $T < \infty$ (pas de stabilisation).

2) Justifier rigoureusement $E \in C^1((0, T))$ et l'expression de E' , en utilisant seulement la régularité classique $C^{1,2}$ (indication: considérer les différences finies $w_h = h^{-1}(u(t+h, x) - u(t, x))$).

6. Effets de la diffusion sur la vitesse d'explosion.

[VOIR QS, Chap. 23]

On considère à nouveau le cas $f(u) = u^p$, $p > 1$, avec $u_0 > 0$.

a. *Question et résultats.*

Le comportement de $\|u(t)\|_{\infty}$ pour $t \rightarrow T$ est-il du même ordre que dans le cas de l'EDO (i.e. $\|u(t)\|_{\infty} \sim (T-t)^{-1/(p-1)}$) ? Si oui, on dit que l'on a explosion de type I, sinon de type II. (Question analogue pour la nature de l'ensemble singulier des points d'explosion; voir paragraphe suivant.)

L'estimation inférieure est toujours vraie (assez facile), mais pour l'estimation supérieure (beaucoup plus délicate), la réponse dépend en général de n , p et de u_0 :

- Type I si $u_t \geq 0$ ou si $p < p_S = (n+2)/(n-2)_+$ (exposant de Sobolev)

- Type II si $n \geq 11$ et p assez grand, pour certains u_0 (Herrero-Velázquez 1994 - preuve extrêmement longue et technique); existence du type II également conjecturée pour $p = p_S$.

- Résultats partiels de type I pour $3 \leq n \leq 10$ et $p > p_S$ (e.g. Matano-Merle).

b. *Estimation inférieure.*

Thm: Si $T < \infty$, alors $\|u(t)\|_{\infty} \geq \kappa(T-t)^{-1/(p-1)}$ sur $(0, T)$.

Démonstration par méthode de sur-solution.

c. *Estimation supérieure de type I si $u_t \geq 0$ (Friedman-McLeod, 1985).*

Thm: Supposons $0 \leq u_0 \in C^2(\Omega) \cap C_0(\bar{\Omega})$ et $0 \leq \Delta u_0 + u_0^p \not\equiv 0$. Alors:

(i) $u_t \geq 0$ et $T < \infty$.

(ii) Il existe $C > 0$ tel que $\|u(t)\|_\infty \leq C(T-t)^{-1/(p-1)}$ sur $(0, T)$.

d. *Exercice:* Montrer l'existence de fonctions u_0 vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Cours # 3 (10/2/2010)

Démonstration du Thm du d. par des arguments de principe du maximum (et une fonction auxiliaire adéquate pour (ii)) [VOIR QS, Thm 23.5]

7. Effet de localisation des singularités par la diffusion.

[VOIR QS, Chap. 24]

Def: Pour une solution du problème (P), l'ensemble d'explosion est défini par:

$$B(u_0) = \{x \in \bar{\Omega}, u \text{ non bornée au voisinage de } (t, x) = (T^-, x_0)\}.$$

On s'intéresse à l'ensemble d'explosion ainsi qu'au comportement spatial de la solution au voisinage d'un point d'explosion.

a. *Cas de l'“EDP” $z_t = z^p$ sans diffusion.*

Considérons le problème

$$(P) \quad \begin{cases} z_t = z^p, & t > 0, x \in (-1, 1), \\ z = 0, & t > 0, x = \pm 1, \\ z(0, x) = z_0(x), & t > 0, x \in (-1, 1), \end{cases}$$

avec $p > 1$, $z_0 \in C_0([-1, 1])$, z_0 symétrique, décroissante en $|x|$, et avec un palier: $z_0(x) = C > 0$ sur $[-1/2, 1/2]$. L'intégration directe (pour chaque x fixé) donne

$$z(t, x) = [z_0^{1-p}(x) - (p-1)t]^{-1/(p-1)}, \quad 0 < t < T^*(z_0, x) := (p-1)^{-1} z_0^{1-p}(x).$$

En particulier, au premier temps d'explosion $T(z_0) = (p-1)^{-1} C^{1-p}$, la solution explose simultanément sur tout l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

b. *Cas diffusif.*

On considère maintenant le problème (P) dans le cas $f(u) = u^p$, $p > 1$, avec $u_0 > 0$.

Le comportement est **complètement différent dans le cas diffusif**: on va montrer (cf. Thm ci-dessous) que les données initiales à symétrie radiale décroissante, même avec un palier, donnent toujours **explosion en seul point** si $T < \infty$ (Weissler 84, Friedman-McLeod, 1985)

Commençons par un résultat simple de symétrie:

Prop: Supposons $0 \leq u_0 \in C_0(B_R)$, radiale décroissante (c-à-d $u_0 = u_0(r)$, $r = |x|$), avec u_0 décroissante en r . Alors $u(t, \cdot)$ est radiale (strictement) décroissante pour $t \in (0, T)$.

Idee de la démonstration:

- La préservation de la symétrie radiale est une conséquence immédiate de l'unicité locale de la solution.

- Pour montrer que u est décroissante en r , on utilise la méthode des **plans mobiles (moving planes)** (différente de la méthode donnée dans [QS]): Soit Σ_λ l'hyperplan d'équation $x_1 = \lambda$ pour $\lambda \in [0, R)$. On considère la fonction $v(t, x) = u(t, x) - u(t, \tilde{x}_\lambda)$ où \tilde{x}_λ est le symétrique de x par rapport à Σ_λ . En appliquant le principe du maximum (fort) à l'équation vérifiée par la fonction v dans Σ_λ on montre que $v < 0$.

Thm: Supposons $0 \leq u_0 \in C_0(B_R)$, radiale décroissante, et $T = T(u_0) < \infty$.

(i) Alors $B(u_0) = \{0\}$.

(ii) De plus, on a l'estimation supérieure suivante du profil d'explosion: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$u(t, x) \leq C_\varepsilon |x|^{-2/(p-1)-\varepsilon}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < |x| < R.$$

Démonstration du Thm (pour $n = 1$ pour simplifier) par des arguments de principe du maximum et une fonction auxiliaire adéquate [VOIR QS, Thm 24.1]

Cours # 4 (17/2/2010)

Le résultat suivant (Souplet, 2004) montre que l'estimation précédente est à peu près optimale:

Thm: Supposons $0 \leq u_0 \in C_0(B_R)$, radiale décroissante, $u_t \geq 0$ et $T < \infty$. Alors il existe $C, \eta > 0$ tels que

$$u(T, x) \geq C|x|^{-2/(p-1)}, \quad 0 < |x| < \eta.$$

Rem: Il y a des résultats plus précis (profil en $|x|^{-2/(p-1)} |\log |x||^{-1/(p-1)}$, cf. e.g. Herrero-Velázquez 93) mais sous des hypothèses supplémentaires sur p et au prix de difficultés techniques considérables.

Démonstration du Thm (pour $n = 1$ pour simplifier) par des arguments d'énergie [VOIR QS, Thm 24.3]

8. Exemple de stabilisation complète par la diffusion (et condition de Dirichlet)

a. *La condition d'explosion pour l'EDO $y' = f(y)$*

Prop: Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $f(s) > 0$ pour $s > 0$. Alors toutes les solutions positives de $y' = f(y)$, $t > 0$, explosent en temps fini ssi $\int_1^\infty ds/f(s) < \infty$.

b. *La construction de Fila-Ninomiya-Vázquez (2007)*

Thm: Il existe $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $f(s) > 0$ pour $s > 0$, telle que:

(i) Toutes les solutions de $y' = f(y)$, $t > 0$, explosent en temps fini;

(ii) Toutes les solutions du problème (P) (avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné régulier quelconque) sont globales et bornées.

Rem: Ce résultat est en un sens surprenant: une EDO **non linéaire** peut être complètement stabilisée par une diffusion **linéaire**.

Idée de la dém: Construction (délicate) de f comme une perturbation adéquate de $g(s) = s^p$, $p > 1$, sur une suite de petits intervalles tendant vers l'infini, de façon à garantir l'existence d'une suite de solutions stationnaires régulières à des niveaux arbitrairement élevés (voir [QS, Section 19.3] pour les détails).

Chapitre 2. L'influence de la dimension d'espace sur l'effet de la diffusion dans l'espace entier

[VOIR QS, Chap 18 et 20.1]

1. Position du problème

On s'attend à ce que l'effet stabilisateur éventuel de la diffusion soit moins important dans \mathbb{R}^n que dans un borné avec conditions de Dirichlet (pas d'effet d'extraction d'énergie depuis le milieu extérieur au niveau du bord; du point de vue fonctionnel, l'opérateur moins Laplacien à un spectre continu d'infimum nul, et non plus discret d'infimum positif).

Le phénomène intéressant est que le résultat dépend de la dimension. On va étudier le cas du problème modèle (u^p) ainsi qu'une équation (et un système) issus de la Biologie.

Problème étudié dans ce chapitre:

$$(P) \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = f(u), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Le problème (P) a une unique solution maximale, classique, $u \in C^{1,2}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$, $u \in C_b([0, T'] \times \mathbb{R}^n)$ pour tout $T' < T$.

De plus, on a le principe de comparaison pour les sur- et sous-solutions ayant cette régularité.

2. Rappels sur l'équation de la chaleur linéaire dans \mathbb{R}^n .

VOIR [QS, Chap 48.2], [CH], [Br], et les références citées

La solution v de (P) avec $f \equiv 0$ est donnée par $v(t, \cdot) = G_t * u_0$ (convolution en x), où G_t est le noyau Gaussien $G_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$. La solution v est en fait bien définie pour tout $u_0 \in Y := L^1 + L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Exercice: vérifier par calcul direct que $G(t, x) = G_t(x)$ est solution de $v_t - \Delta v = 0$ pour $t > 0$. Retrouver le résultat par la transformée de Fourier.

Propriété de semi-groupe $G_{t+s} = G_t * G_s$. De plus $G_t \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ pour $t \rightarrow 0^+$. (Vérifier ces propriétés en exercice.)

On note $(e^{t\Delta})_{t \geq 0}$ le semi-groupe d'opérateurs (sur Y) correspondant (i.e. $e^{t\Delta}\phi := G_t * \phi$).

Thm: (Estimations L^p - L^q)

$$\|e^{t\Delta}\phi\|_q \leq Ct^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\phi\|_p, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty, \quad \phi \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Dém: par l'inégalité de convolution de Young (ou à la main, par Hölder, Fubini, ...).

Rem: (Vitesse maximale de décroissance) Si $0 \leq \phi \neq 0$, alors $\|e^{t\Delta}\phi\|_\infty \geq Ct^{-n/2}$ pour $t \geq 1$ (exercice: le démontrer à partir de la formule de convolution).

3. Le résultat de Fujita (1963)

Thm: Considérons le problème (P) pour $f(u) = u^p$ et $u_0 \geq 0$.

(i) Si $p > 1 + (2/n)$, alors il existe des solutions globales positives.

(ii) Si $1 < p \leq 1 + (2/n)$, alors il n'existe pas de solutions globales $u \geq 0$ non triviales.

Rem: Le résultat (ii) reste vrai plus généralement pour les sur-solutions, c-à-d $u \in C^{1,2}((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant $u_t - \Delta u \geq u^p$ (et même en fait pour les sur-solutions au sens des distributions).

La partie (i) est conséquence de la:

Prop: Supposons $0 \leq u_0 \leq \varepsilon G_1$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Alors u est globale et

$$u(t, x) \leq \varepsilon(t+1)^{-1/(p-1)} e^{-|x|^2/4(t+1)}, \quad t > 0.$$

Dém par construction d'une sur-solution de la forme $\varepsilon(t+1)^\alpha G_{t+1}(x)$ (voir [QS, Rem 20.4(i)] pour les détails)

Dém du (ii) à la prochaine séance.