Philippe SOUPLET Mars 2011

PRESENTATION SYNTHETIQUE DES TRAVAUX DE RECHERCHE

I. Equations et systèmes elliptiques

1. *The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions* [63], Advances in Mathematics 221 (2009), 1409-1427.

Dans ce travail je m'intéresse à la **conjecture de Lane-Emden** (étudiée en particulier par Serrin, Mitidieri, De Figuereido, Felmer, Busca, Manásevich, Zou, Reichel). Il s'agit de montrer un résultat de type Liouville pour le système elliptique

$$\begin{cases} -\Delta u = v^p, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ -\Delta v = u^q, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

avec $p, q > 0$, à savoir la non-existence de solutions classiques positives si le point (p, q) est situé en dessous de "l'hyperbole de Sobolev" :

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{n-2}{n}.$$

Cette condition, qui est optimale, est l'analogue naturel de l'exposant de Sobolev du cas scalaire. La conjecture n'était prouvée que pour $n \leq 3$, avec des résultats partiels en (p, q) pour $n \geq 4$. Dans ce travail, **je démontre la conjecture en dimension** $n = 4$ et j'obtiens une nouvelle région de non-existence en (p, q) pour $n \geq 5$. La preuve, qui est très délicate, est basée sur une combinaison d'identités de type Rellich-Pohozaev, d'inégalités de Sobolev et d'interpolation sur S^{n-1} et des arguments de "feedback" et de mesure. D'un point de vue heuristique, l'efficacité de la méthode provient essentiellement de ce qu'une dimension d'espace est "gagnée" via l'identité de Pohozaev car, en appliquant des arguments d'analyse fonctionnelle sur la sphère-unité $(n-1)$-dimensionnelle plutôt que directement sur $B_R \subset R^n$, certains effets régularisants peuvent être exploités sous des hypothèses moins restrictives sur la non-linéarité.

Notons que, même dans le cas scalaire, cette méthode donne une démonstration complètement nouvelle du résultat classique de Gidas et Spruck.

Récemment, dans [70, 71], ces techniques ont été étendues pour traiter des systèmes elliptiques de Schrödinger intervenant dans des modèles de multi-condensats de Bose-Einstein. Ceci a permis d'obtenir des théorèmes de Liouville et des estimations a priori sous des hypothèses de croissance optimale (jusqu'à l'exposant de Sobolev), améliorant ainsi des résultats de Dancer, Weth, Terracini, ... Notons que ces systèmes, étant généralement non coopératifs, ne peuvent être traités par les méthodes de type "moving planes".

2. *A priori estimates and existence for elliptic systems via bootstrap in weighted Lebesgue spaces* [47] (avec P. Quittner)
   Archive Rational Mech. Anal., 174 (2004), 49-81

Nous développons une méthode nouvelle et générale pour établir la **regularité et l'estimation a priori** des solutions pour les systèmes elliptiques sur-linéaires de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v), \quad x \in \Omega \\ -\Delta v = g(x, u, v), \quad x \in \Omega \\ u = v = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Cette méthode est basée sur une procédure de "bootstrap", alternativement sur les deux équations, dans les espaces L^q_δ, espaces de Lebesgue pondérés par la fonction distance au bord. On en déduit des résultats d'existence par les arguments usuels de degré topologique. En comparaison avec les méthodes existantes, un avantage de celle-ci est de ne supposer que des **hypothèses unilatérales de croissance** sur les non-linéarités (pas de monotonie ni de structure variationnelle). Elle fournit par conséquent une alternative utile aux méthodes classiques de changements d'échelles ou d'hyperplans mobiles (moving planes). De plus, elle s'applique aux solutions très faibles, sous des hypothèses de croissance optimales. Ce travail améliore significativement les résultats connus pour plusieurs systèmes provenant de modèles physiques.

3. *Optimal regularity conditions for nonlinear elliptic problems via L^p_δ spaces* [51]
Duke Math. J., 127 (2005), 175-192

Dans cet article, j'ai **construit des solutions faibles singulières** pour des équations et des systèmes elliptiques de la forme (1). Un aspect typique est la localisation des singularités sur le bord. Dans le cas scalaire, ces résultats expliquent le rôle de l'exposant $p_{BT} = (n+1)/(n-1)$, qui apparaissait dans le travail classique de Brezis et Turner (1977) et était généralement considéré comme purement technique dans ce contexte. (En effet l'exposant critique conjecturé pour les estimations a priori uniformes était l'exposant de Sobolev $p_S = (n+2)/(n-2)$). L'exposant p_{BT} s'avère être le **seuil pour la régularité des solutions très faibles**, et un phénomène analogue s'observe pour les systèmes. Les espaces L^q_δ jouent ici un rôle-clé, et nous établissons au passage l'optimalité des estimations linéaires L^q_δ obtenues dans [20] (voir le point suivant). Ce résultat a stimulé des développements ultérieurs, en particulier à travers les travaux récents de McKenna et Reichel, et de Del Pino, Musso et Pacard.

4. *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. Part I: Elliptic equations and systems* [58] (avec P. Poláčik et P. Quittner)
Duke Math. J., 139 (2007), 555-579

Dans ce travail, nous avons découvert de nouvelles connexions entre les **théorèmes de type Liouville non linéaires** (un exemple classique est celui de Gidas et Spruck (1981)), et les **propriétés locales des solutions positives problèmes elliptiques sur-linéaires et quasi-linéaires.** Plus précisément, nous développons une méthode générale pour déduire des estimations universelles des solutions locales à partir de théorèmes de type Liouville. Cette méthode est basée sur des arguments de changements d'échelles et sur une propriété cruciale de "doublement" (et elle est différente de la méthode classique de changement d'échelle de Gidas-Spruck, qui s'applique seulement aux problèmes aux limites). Comme conséquence heuristique importante de notre approche, il apparaît que les théorèmes de type Liouville non linéaires et les résultats de bornage universels pour les solutions locales sont essentiellement équivalents.

Cette méthode nous permet d'obtenir des résultats nouveaux sur les singularités d'équations et de systèmes elliptiques, sous des conditions de croissance optimales qui, au contraire des travaux précédents, ne font intervenir que le comportement asymptotique de la non-linéarité. Pour les systèmes de type Lane-Emden, ces résultats sont les premiers à couvrir la totalité de la zone sous-critique. De plus la méthode fournit un outil important pour l'étude de la conjecture de Lane-Emden (voir point 1), car elle permet de réduire le problème au cas des solutions bornées (ce qui, combiné au résultat de Serrin-Zou, entraînait la validité de la conjecture en dimension 3). De nouvelles applications de nos techniques sont apparues dans des travaux récents de Bidaut-Ponce-Véron, Chen-Li, Dancer, Del Pino-Kowalczyk-Pacard-Wei, Vétois, ...

II. Equations et systèmes paraboliques

5. *Linear and nonlinear heat equations in L^q_δ spaces and universal bounds for global solutions* [20] (avec M. Fila et F. Weissler)
   Mathematische Annalen, 320 (2001), 87-113

Dans ce travail nous étudions une notion nouvelle de **borne universelle** pour toutes les solutions globales positives de problèmes paraboliques sur-linéaires, un exemple typique étant l'équation

$$u_t - \Delta u = u^p \tag{2}$$

avec conditions aux limites de Dirichlet. Toute solution ou bien cesse d'exister en un temps fini, ou bien est absorbée après un temps $\tau > 0$ arbitrairement court par un "attracteur" compact $B(\tau) \subset L^\infty$, indépendant de la solution. Initialement obtenu pour $p < p_{BT}$, le résultat a ensuite été étendu a la région sous-critique $p < p_S$ dans [40] (on sait que la propriété est fausse pour $p \geq p_S$).

Des résultats sur les bornes universelles ont par la suite été établis, seul ou en collaboration (cf. [31, 35, 37, 38, 40, 59]) ou par d'autres chercheurs, pour divers autres problèmes: systèmes, équations avec conditions aux limites non linéaires, équations dégénérées de types milieux poreux ou diffusion rapide. Cf. également le travail de mon étudiant P. Rouchon concernant les problèmes non locaux.

Comme outil principal pour établir les bornes universelles obtenues dans [20], nous avons développé dans cet article une théorie de la régularité elliptique et parabolique **dans les espaces** L^q_δ, espaces de Lebesgue pondérés par la distance au bord. D'autres applications intéressantes de cette théorie sont apparues par la suite (cf. points 2, 3).

6. *Singularity and decay estimates in superlinear problems via Liouville-type theorems. Part II: Parabolic equations* [59] (avec P. Poláčik et P. Quittner)
   Indiana Univ. Math. J., 56 (2007), 879-908

Dans cet article, des progrès significatifs ont été réalisés dans la compréhension de la nature des bornes universelles, qui s'avèrent être fortement liées à la validité de **Théorèmes de type Liouville paraboliques**. De plus, la portée de ces estimations est maintenant étendue à toutes les solutions locales positives: toute solution positive de (2) sur $\Omega \times (0, T)$ avec conditions de Dirichlet satisfait

$$\|u(t)\|_\infty \leq C(t^{-\alpha} + (T-t)^{-\beta}), \tag{3}$$

avec $\beta = 1/(p-1)$, $\alpha = \alpha(n,p) > 0$ et C indépendante de u.

Ceci implique en particulier des **vitesses d'explosions initiales** universelles, et ces vitesses révèlent des différences intéressantes entre les problèmes de Dirichlet et de Cauchy (ou Neumann) : l'exposant optimal α dépend des conditions aux bord, un phénomène qui n'existe pas pour les vitesses d'explosion finales. (Notons au passage que les espaces L^q_δ jouent à nouveau un rôle important, dans la détermination de l'exposant α optimal pour p proche de 1).

Comme autre conséquence, nous établissons la vitesse (finale) d'explosion **sans hypothèse de convexité sur** Ω, une hypothèse qui était nécessaire dans les travaux classiques de Giga et Kohn. Une propriété intéressante, toujours liée à l'estimation (3), est l'existence d'un **taux de décroissance universel**, donné par $C(n,p)t^{-1/(p-1)}$, pour toutes les solutions globales positives du problème de Cauchy associé à (2). Jusqu'à présent ceci n'est démontré jusqu'à $p = p_S$ que dans le cas radial, mais on conjecture que ceci reste vrai dans le cas général.

7. *Grow-up rate and refined asymptotics for a two-dimensional Patlak-Keller-Segel model in a disk* (avec N. Kavallaris),
   SIAM J. Math. Analysis 41 (2009), 128-157

   On considère le système de Keller-Segel

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla c) \\ -\Delta c = u \end{cases}$$

(avec condition de flux nul), qui intervient dans la modélisation des phénomènes de chimiotaxie (formation de spores). En dimension 2 d'espace et en géométrie radiale, on établit l'asymptotique précise du phénomène de concentration de masse en temps infini, qui se produit pour la valeur critique de la masse initiale. Ceci donne une démonstration rigoureuse des résultats formels de Sire et Chavanis (Phys. Rev. E, 2002).

8. *The influence of space dimension on the large-time behavior in a reaction-diffusion system modeling diallelic selection* (avec M. Winkler),
   J. Math. Biology, 62 (2011), 391-421

   Le système suivant :

$$(4) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + ru - \tau_1 \dfrac{(u+v/2)^2}{u+v+w} \\ v_t = \Delta v + rv - \tau_2 \dfrac{(u+v/2)(w+v/2)}{u+v+w} \\ w_t = \Delta w + rw - \tau_3 \dfrac{(w+v/2)^2}{u+v+w}, \end{cases}$$

où $\tau_i, r > 0$ sont des constantes, modélise la **transmission d'un gêne avantageux au sein d'une population biologique.** Le comportement asymptotique a été étudié par Aronson et Weinberger (1975-77) sous l'hypothèse de certaines approximations qui conduisent à une équation scalaire simplifiée de type Fisher-Kolmogorov. Avec M. Winkler (Essen), nous avons récemment élucidé le comportement asymptotique dans le cas récessif $\tau_1 = \tau_2 > \tau_3$ pour lequel nous avons mis en évidence l'influence de la dimension d'espace sur l'éventuelle extinction en temps grand du gêne désavantageux. Ceci confirme pour le système complet les effets observés par Aronson et Weinberger dans le modèle récessif simplifié.

9. *Fast rate of formation of dead-core for the heat equation with strong absorption and applications to fast blow-up* [50] (avec J.-S. Guo)
   Mathematische Annalen, 331 (2005), 651-667

   Nous étudions la **formation du "noyau inerte"** (dead-core) pour l'équation de diffusion-absorption $u_t - u_{xx} + u^p = 0$, avec $0 < p < 1$ et données initiales et au bord positives. Cette équation intervient dans un modèle simplifié de réaction isothermique, et la question est de décrire l'apparition de zones non réactives, via la consommation localisée du réactif. En dépit de sa simplicité, cette équation révèle un phénomène inattendu : nous montrons que la vitesse de formation du noyau inerte n'est pas auto-similaire. Plus précisément, elle est **plus rapide que celle donnée par l'équation différentielle ordinaire** $y' + y^p = 0$ (en contraste avec la situation observée dans de nombreux problèmes paraboliques). A l'aide de ce résultat, dans un contexte différent, nous construisons pour une non-linéarité adéquate (dépendant du gradient) le premier exemple connu d'explosion rapide, ou de type II, pour un problème unidimensionnel.

10. *Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source* [12]
    J. Differential Equations, 153 (1999), 374-406

    Dans cet article j'ai développé une méthode nouvelle pour étudier le comportement asymptotique à l'explosion des solutions du problème de Dirichlet associé aux équations paraboliques non locales en espace.

Cette méthode founit une description très précise de **l'ensemble, de la vitesse et du profil d'explosion globale**, ainsi que du **phénomène de couche limite**. La méthode a été depuis utilisée et généralisée par de nombreux auteurs (plus de 50 citations dans les Math. Reviews).

11. *Single-point blow-up for a semilinear parabolic system* [61],
    J. Eur. Math. Soc. 11 (2009), 169-188

    Considérons les solutions positives du système

$$u_t - \Delta u = v^p, \qquad v_t - \Delta v = u^q$$

dans une boule ou dans l'espace entier, avec $p, q > 1$. On dispose de relativement peu d'information sur l'ensemble d'explosion et l'asymptotique en temps-espace pour les systèmes paraboliques semi-linéaires. Dans ce travail je montre **l'explosion en seul point** pour une grande classe de solutions radiales décroissantes et tous $p, q > 1$. En particulier, ceci résout un problème resté ouvert depuis l'article de A. Friedman et Y. Giga (1987), où ceci n'avait pu être démontré que sous l'hypothèse très restrictive $p = q$. J'obtiens également des estimations inférieures ponctuelles sur les profils à l'instant d'explosion. Pour la démonstration de l'explosion en seul point, on a dû vaincre d'importantes difficultés techniques, qui ont nécessité la combinaison de techniques délicates inspirées par Andreucci-Herrero-Velázquez, et de plusieurs idées nouvelles.

12. *Sharp gradient estimate and Yau's Liouville theorem for the heat equation on noncompact manifolds* [54] (avec Q. Zhang)
    Bull. London Math. Soc., 38 (2006), 1045-1053

    Nous obtenons des estimations localisées du gradient de la solution de l'équation de la chaleur sur les variétés Riemanniennes non compactes à courbure de Ricci positive. Comme conséquence, des résultats de type Liouville parabolique ont été obtenus, qui généralisent les résultats ellliptiques de Li et Yau. Nos techniques et résultats ont été récemment utilisés dans le travail de Ecker, Knopf, Ni et Topping sur le flot de Ricci.

13. *Série de travaux* [24, 26, 34, 42, 46, 52, 53, 55, 65] : Comportement asymptotique pour les équations de Hamilton-Jacobi diffusives, du type $u_t - \Delta u = a|\nabla u|^p$

    L'étude des solutions de cette classe d'équations révèle une grande richesse de phénomènes. Cette série de travaux en donne une description détaillée. Nous mentionnons brièvement les points principaux. Le cas $a > 0$ intervient dans le modèle de Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) qui décrit la croissance d'une surface dans les processus de déposition de particules. De plus cette équation peut être vue comme un cas-type dans la théorie des EDP paraboliques, à savoir l'exemple le plus simple d'une EDP parabolique avec non-linéarité dépendant des dérivées premières de u en espace.

    Mon travail le plus important sur ce problème est l'article :

Single-point gradient blow-up on the boundary for diffusive Hamilton-Jacobi equations in planar domains (avec Yuxiang Li) [65], Comm. Math. Phys., 293 (2010), 499-517,

où nous avons mis en évidence un phénomène complètement nouveau **d'explosion du gradient en un seul point du bord** en dimension deux, pour le problème de Dirichlet avec $p > 2$ et $a > 0$. Des résultats de localisation et de non-dégérescence des points d'explosion sont également obtenus en toute dimension.

Dans [26], développement d'une théorie locale détaillée du problème de Cauchy pour les données initiales L^q ou mesure. Dans le cas répulsif $a > 0$, $u_0 \geq 0$, mise en évidence de l'exposant critique $q_c = n(p-1)/(2-p)_+$ pour l'existence et pour l'unicité. Dans le cas d'absorption $a < 0$, $u_0 \geq 0$, absence d'exposant critique, mais il y a non-existence pour les données mesures alors qu'il y a existence dans L^1.

Détermination des exposants critiques intervenant dans le problème de la croissance de masse en temps grand pour le problème de Cauchy; étude du comportement asymptotique [34, 52].

Pour le problème de Dirichlet avec $p > 2$, $n = 1$ et $a > 0$, obtention de la classification complète des solutions globales. Dans le cas sous-critique [42], il y a convergence dans C^1 de toute solution globale vers l'unique solution stationnaire. Dans le cas critique [53], il y a apparition d'une singularité de type choc en temps infini; étude détaillée de la formation de la singularité par des techniques de "matched asymptotic expansions" (rigoureuses).

Dans [55], pour le problème de Dirichlet associé à l'équation $u_t - \Delta u = |\nabla u|^p + h(x)$ ($p > 2$), l'analogue du résultat classique de Brezis, Cazenave *et al.* a été obtenu : l'existence d'une solution globale classique est équivalente à l'existence d'une solution faible stationnaire. De plus des exemples de solutions globales bornées dans L^∞ mais pas dans C^1 sont construits.

Dans [24], pour le problème de Dirichlet associé à $u_t - \Delta u = F(|\nabla u|)$, obtention d'une condition suffisante optimale sur F (sous forme intégrale) pour l'apparition du phénomène d'explosion du gradient. Ceci complète un résultat de Lieberman (1986), qui avait montré que la condition était nécessaire. D'autre part, dans le travail [46], nous montrons que la condition suffisante d'existence classique de type Bernstein (croissance sous-quadratique par rapport au gradient) peut être remplacée par une condition unilatérale plus faible.