
ERRATA À « SUR UNE CONJECTURE DE KOTTWITZ AU BORD »

par

Benoît Stroh

Je remercie Sophie Morel de m'avoir signalé une erreur dans l'article [S] ainsi qu'une manière de la corriger en utilisant certains de ses résultats.

L'erreur se situe dans la démonstration du théorème et plus précisément dans la déduction de l'égalité

$$j_{!*} \circ \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V]) = \sum_{w \in W_{\mathcal{D}}} m_w j_{!*} \underline{\mathcal{I}\mathcal{C}}_V^w(R)$$

à partir de l'égalité

$$\mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V]) = \sum_{w \in W_{\mathcal{D}}} m_w (\underline{\mathcal{I}\mathcal{C}}_V^w(R)).$$

En effet, le prolongement intermédiaire $j_{!*} \circ \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V])$ du faisceau mixte non pur $\mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V])$ peut très bien avoir des supports concentrés au bord de la compactification minimale, c'est-à-dire dans le complémentaire de l'image de j . Il faudrait montrer que cela n'arrive pas pour conclure la démonstration de manière correcte.

Voilà une autre démonstration rapide qui utilise plusieurs résultats de Morel. Nous utilisons librement les notations de [S]. Morel a introduit dans [M1, prop.6.1] la catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V \times \text{Spec}(\mathbb{Q}))$ des faisceaux pervers horizontaux sur $\mathcal{A}_V \times \text{Spec}(\mathbb{Q})$ qui admettent une filtration par le poids. Pour toute représentation R de $\text{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$, le faisceau pervers $\mathcal{F}_V(R)[d_V]$ est bien sûr dans $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V \times \text{Spec}(\mathbb{Q}))$ puisqu'il est mixte et semi-simple. Il résulte alors de [M1, coro.8.1.4] et des calculs effectués dans [M2] que pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, tout $R \in D^b(\text{GSp}(V \otimes \mathbb{Q}))$ tel que $H^n(R)$ soit pur de poids a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $V' \in \mathfrak{C}_V$, le complexe $i_{V'}^* \circ j_{!*}(\mathcal{F}_V(R))$ est égal à

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V'} \cdot \mathcal{F}_{V'} \left(\mathbf{R}\text{Inv} \left(\Gamma_{V'}^l, \mathbf{R}\text{Inv}(\text{Lie}(N_{V'}), R)_{a, V'} \right) \right)$$

dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_{V'} \times \text{Spec}(\mathbb{Q}))$. En sommant sur les $V' \in \mathfrak{C}_V$ on obtient égalité entre $j_{!*}(\mathcal{F}_V(R))$ et

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V} \sum_{V'' \in \mathfrak{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V''} \cdot i_{V''} \left(\mathcal{F}_{V''} \left(\mathbf{R}\text{Inv} \left(\Gamma_{V''}^l, \mathbf{R}\text{Inv}(\text{Lie}(N_{V''}), R)_{a, V''} \right) \right) \right)$$

dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_{V'}^* \times \text{Spec}(\mathbb{Q}))$. On applique à présent le morphisme $\mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*}$ du groupe de Grothendieck de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_{V'}^* \times \text{Spec}(\mathbb{Q}))$ dans le groupe de Grothendieck de la

catégorie des faisceaux pervers de Weil sur $\mathcal{A}_V^* \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ et l'on obtient égalité entre $\mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}_V(R))$ et

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V} \sum_{V \bullet \in \mathfrak{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V \bullet} \cdot \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ i_{V'!} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathbf{R}\text{Inv} \left(\Gamma_{V \bullet}^l, \mathbf{R}\text{Inv}(\text{Lie}(N_{V \bullet}), R)_{a, V \bullet} \right) \right) \right) .$$

Mais $\mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}_V(R)) = j_{!*} \circ \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R))$ d'après [S, coro.4.4]. Il résulte également de la démonstration de [S, coro.4.3] que le morphisme d'adjonction

$$\begin{aligned} & i_{V'!} \circ \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_{V'}} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathbf{R}\text{Inv} \left(\Gamma_{V \bullet}^l, \mathbf{R}\text{Inv}(\text{Lie}(N_{V \bullet}), R)_{a, V \bullet} \right) \right) \right) \\ & \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ i_{V'!} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathbf{R}\text{Inv} \left(\Gamma_{V \bullet}^l, \mathbf{R}\text{Inv}(\text{Lie}(N_{V \bullet}), R)_{a, V \bullet} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$. On obtient donc égalité entre $j_{!*} \circ \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R))$ et

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V} \sum_{V \bullet \in \mathfrak{C}_{V'}/\Gamma_V} (-1)^{\sharp V \bullet} \cdot i_{V'!} \circ \mathbf{R}\Psi_{\mathcal{A}_{V'}} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathbf{R}\text{Inv} \left(\Gamma_{V \bullet}^l, \mathbf{R}\text{Inv}(\text{Lie}(N_{V \bullet}), R)_{a, V \bullet} \right) \right) \right)$$

dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux pervers de Weil sur $\mathcal{A}_V^* \times \text{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. Il suffit alors d'appliquer $i_{V'}^*$, avec V' fixé pour en déduire le résultat.

Références

- [M1] S. MOREL – *Complexes mixtes sur un schéma de type fini sur \mathbb{Q}* , preprint.
[M2] S. MOREL – *Complexes pondérés des compactifications de Baily-Borel. Le cas des variétés modulaires de Siegel*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), p. 23-61.
[S] B. STROH – *Sur une conjecture de Kottwitz au bord*, Annales Éc. Norm. Sup **45** tome 1, p. 143-165.

15 février 2013

BENOÎT STROH • Courriel : stroh@math.univ-paris13.fr, C.N.R.S, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France