ERRATA À « SUR UNE CONJECTURE DE KOTTWITZ AU BORD »

par

Benoît Stroh

Je remercie Sophie Morel de m'avoir signalé une erreur dans l'article [**S**] ainsi qu'une manière de la corriger en utilisant certains de ses résultats.

L'erreur se situe dans la démonstration du théorème et plus précisément dans la déduction de l'égalité

$$j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V]) \;=\; \sum_{w \in W_{\mathcal{D}}} m_w \; j_{!*}\, \underline{\mathcal{IC}}^w_V(R))$$

à partir de l'égalité

$$\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V]) \;=\; \sum_{w \in W_{\mathcal{D}}} m_w \; (\underline{\mathcal{IC}}^w_V(R))\,.$$

En effet, le prolongement intermédiaire $j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V])$ du faisceau mixte non pur $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R)[d_V])$ peut très bien avoir des supports concentrés au bord de la compactification minimale, c'est-à-dire dans le complémentaire de l'image de j. Il faudrait montrer que cela n'arrive pas pour conclure la démonstration de manière correcte.

Voilà une autre démonstration rapide qui utilise plusieurs résultats de Morel. Nous utilisons librement les notations de [**S**]. Morel a introduit dans [**M1**, prop.6.1] la catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}))$ des faisceaux pervers horizontaux sur $\mathcal{A}_V \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ qui admettent une filtration par le poids. Pour toute représentation R de $\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q})$, le faisceau pervers $\mathcal{F}_V(R)[d_V]$ est bien sûr dans $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}))$ puisqu'il est mixte et semi-simple. Il résulte alors de [**M1**, coro.8.1.4] et des calculs effectués dans [**M2**] que pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, tout $R \in D^b(\mathrm{GSp}(V \otimes \mathbb{Q}))$ tel que $\mathrm{H}^n(R)$ soit pur de poids a pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $V' \in \mathfrak{C}_V$, le complexe $i^*_{V'} \circ j_{!*}(\mathcal{F}_V(R))$ est égal à

$$\sum_{V^\bullet \in \mathscr{C}_{V'}/\ V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot \mathcal{F}_{V'}\Big(\mathrm{RInv}\Big(\,\Gamma^l_{V^\bullet},\ \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}),\ R)_{a,V^\bullet}\Big)\Big)$$

dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_{V'} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}))$. En sommant sur les $V' \in \mathfrak{C}_V$ on obtient égalité entre $j_{!*}(\mathcal{F}_V(R))$ et

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V} \sum_{V^\bullet \in \mathscr{C}_{V'}/\ V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot\ i_{V'_!}\Big(\mathcal{F}_{V'}\Big(\mathrm{RInv}\Big(\,\Gamma^l_{V^\bullet},\ \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}),\ R)_{a,V^\bullet}\Big)\Big)\Big)$$

dans le groupe de Grothendieck de $\mathcal{M}(\mathcal{A}^*_V \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}))$. On applique à présent le morphisme $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}^*_V}$ du groupe de Grothendieck de $\mathcal{M}(\mathcal{A}^*_V \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}))$ dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux pervers de Weil sur $\mathcal{A}_V^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ et l'on obtient égalité entre $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}_V(R))$ et

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V} \sum_{V^\bullet \in \mathscr{C}_{V'}/\ V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ i_{V'!} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathrm{RInv}\left(\Gamma^l_{V^\bullet},\ \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}),\ R)_{a,V^\bullet}\right)\right)\right).$$

Mais $\mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ j_{!*}(\mathcal{F}_V(R)) = j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R))$ d'après [**S**, coro.4.4]. Il résulte également de la démonstration de [**S**, coro.4.3] que le morphisme d'adjonction

$$\begin{aligned} & i_{V'!} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_{V'}} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathrm{RInv}\left(\Gamma^l_{V^\bullet},\ \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}),\ R)_{a,V^\bullet}\right)\right)\right) \\ \xrightarrow{\sim}\ & \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V^*} \circ i_{V'!} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathrm{RInv}\left(\Gamma^l_{V^\bullet},\ \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}),\ R)_{a,V^\bullet}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour tout $V' \in \mathfrak{C}_V$. On obtient donc égalité entre $j_{!*} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_V}(\mathcal{F}_V(R))$ et

$$\sum_{V' \in \mathfrak{C}_V} \sum_{V^\bullet \in \mathscr{C}_{V'}/\ V} (-1)^{\sharp V^\bullet} \cdot i_{V'!} \circ \mathrm{R}\Psi_{\mathcal{A}_{V'}} \left(\mathcal{F}_{V'} \left(\mathrm{RInv}\left(\Gamma^l_{V^\bullet},\ \mathrm{RInv}(\mathrm{Lie}(N_{V^\bullet}),\ R)_{a,V^\bullet}\right)\right)\right)$$

dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux pervers de Weil sur $\mathcal{A}_V^* \times \mathrm{Spec}(\bar{\mathbb{F}}_p)$. Il suffit alors d'appliquer $i_{V'}^*$ avec V' fixé pour en déduire le résultat.

Références

[M1] S. Morel – *Complexes mixtes sur un schéma de type fini sur* $\mathbb{Q}$, preprint.

[M2] S. Morel – *Complexes pondérés des compactifications de Baily-Borel. Le cas des variétés modulaires de Siegel*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), p. 23-61.

[S] B. Stroh – *Sur une conjecture de Kottwitz au bord*, Annales Éc. Norm. Sup **45** tome 1, p. 143-165.

15 février 2013

Benoît Stroh • *Courriel :* stroh@math.univ-paris13.fr, C.N.R.S, Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France