
SOUS-GROUPES CANONIQUES PARTIELS

par

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Résumé. — La réduction des variétés de Siegel modulo un nombre premier p est stratifiée par le rang multiplicatif du groupe p -divisible de la variété abélienne universelle. Pour $r \geq 0$, le sous-groupe multiplicatif maximal de la restriction du groupe de p -torsion de la variété abélienne universelle à la r -ième strate se relève canoniquement sur le tube de cette strate et définit un « sous-groupe canonique partiel de rang r ». Nous montrons qu’il existe un voisinage strict du tube sur lequel ce sous-groupe s’étend de manière finie et plate. Sur la strate ordinaire et au voisinage de celle-ci, on retrouve le sous-groupe canonique usuel étudié par Abbès et Mokrane, et Andreatta et Gasbarri.

Abstract. — The reduction of Siegel varieties modulo a prime number p is stratified by the multiplicative rank of the p -divisible group of the universal abelian variety. For $r \geq 0$, the maximal multiplicative subgroup of the restriction of the p -torsion group of the universal abelian variety to the r -th stratum lifts canonically to the tube of this stratum and defines a « partial canonical subgroup of rank r ». We show that there exists a strict neighbourhood of the tube on which this subgroup extends in a finite flat way. On the ordinary stratum and its neighbourhood, we recover the usual canonical subgroup studied by Abbes and Mokrane, and Andreatta and Gasbarri.

Soient $1 \leq r \leq g$ deux entiers, p un nombre premier et $n \geq 3$ un entier non divisible par p . Notons $\mathcal{A}_{g,n}$ le schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ qui paramètre les variétés abéliennes principalement polarisées de genre g munies d’une structure de niveau principale en n , et notons G le schéma abélien universel sur $\mathcal{A}_{g,n}$. Soit $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ la compactification toroïdale de $\mathcal{A}_{g,n}$ associée au choix d’une décomposition polyédrale admissible polarisée [FC90, ch. IV]; c’est un schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. D’après [FC90, th. IV.5.7], il existe un schéma semi-abélien canonique sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ qui prolonge le schéma abélien universel; notons encore G ce schéma semi-abélien. L’ensemble des points $x \in \overline{\mathcal{A}}_{g,n} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ tels que le groupe de p -torsion $G_x[p]$ soit de rang multiplicatif p^r définit un sous-schéma localement fermé

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p).$$

De même, l’ensemble des $x \in \overline{\mathcal{A}}_{g,n} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$ tels que $G_x[p]$ soit de rang multiplicatif $\leq p^r$ définit un sous-schéma fermé

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p).$$

Nous verrons que $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ est ouvert dans $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}$; il est dense d'après le théorème principal de [Oo91], mais nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite. Nous verrons qu'il existe un sous-groupe multiplicatif H_{mul}^r de $G[p]$ qui est fini, plat et totalement isotrope de rang p^r sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ et qui est fibre à fibre le sous-groupe multiplicatif maximal de $G[p]$. Notons

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{rig}}$$

la variété analytique rigide associée à $\overline{\mathcal{A}}_{g,n} \times \text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$, et notons $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$ et $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}[$ les tubes de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ et de

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}$$

dans $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{rig}}$. D'après le théorème de rigidité des tores [SGA 3 IV th. 3.bis], H_{mul}^r se relève canoniquement en un sous-groupe H_{can}^r de $G[p]$ qui est fini, plat et totalement isotrope de rang p^r sur $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$. Le but de cet article est de démontrer que le sous-groupe H_{can}^r surconverge, c'est-à-dire qu'il se prolonge à des voisinages stricts du tube.

Théorème principal. — *Il existe un voisinage strict U de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$ dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}[$ et un sous-groupe $H_{\text{can},U}^r$ de $G_U[p]$ qui est fini et plat de rang p^r sur U et qui prolonge H_{can}^r . Le sous-groupe $H_{\text{can},U}^r$ est unique et totalement isotrope dès que toute composante connexe de U rencontre $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$.*

On appelle $H_{\text{can},U}^r$ un « sous-groupe canonique partiel de rang p^r sur U ». Le sous-groupe canonique partiel de rang p^r est unique sur l'union des composantes connexes de U qui rencontrent $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$; remarquons d'ailleurs que cette union est encore un voisinage strict de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$.

Remarque. — Il n'existe pas de sous-groupe canonique partiel de rang p^r hors de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}[$. En effet, lorsque $G[p]$ est de rang multiplicatif $> p^r$, il n'admet aucun sous-groupe multiplicatif privilégié de rang p^r .

Dans le cas où $r = g$, le sous-groupe canonique partiel n'est autre que le sous-groupe canonique habituel; son existence a été prouvée par Lubin et Katz [Ka72] lorsque $g = 1$ puis indépendamment par Abbès et Mokrane [AM04], Andreatta et Gasbarri [AG07] et Fargues [Far10] pour g quelconque. Ces auteurs définissent des filtrations sur le groupe de p -torsion des schémas abéliens. Ils relient ensuite ces filtrations à l'invariant de Hodge des schémas abéliens. Cela leur permet d'obtenir l'équation de voisinages stricts où le sous-groupe canonique est défini. Pour les variétés de Hilbert, Kisin et Lai [KL05] ont construit le sous-groupe canonique par des méthodes de géométrie rigide. Notre travail s'inscrit dans cette lignée. Nos résultats sont utilisés par le premier auteur de cet article dans un travail en cours sur le prolongement analytique des formes de Siegel p -adiques : les sous-groupes canoniques partiels constituent un outil essentiel pour la compréhension de la dynamique des correspondances de Hecke.

Supposons à nouveau r quelconque et expliquons les grandes lignes de la démonstration de l'assertion d'existence du théorème. L'idée générale est d'appliquer un théorème de surconvergence du tube dû à Berthelot [Ber96] à un morphisme d'oubli du niveau pour montrer que ce dernier réalise un isomorphisme sur certains voisinages stricts; le sous-groupe canonique partiel sera obtenu *via* l'isomorphisme inverse. Notons $\mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}}$ l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées de genre g munies d'une structure de niveau

principale en n et d'un sous-groupe fini, plat, totalement isotrope, tué par p et de rang p^r . Appelons H le sous-groupe fini et plat universel sur $\mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}}$. L'oubli de H induit un morphisme $\pi : \mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}_{g,n}$. D'après le théorème principal de [St08], il existe une compactification toroïdale $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$ de $\mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}}$ associée au choix combinatoire ayant servi à définir $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$, et un morphisme $\overline{\pi} : \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ étendant π . Le groupe H se prolonge sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$ par adhérence schématique dans le groupe quasi-fini et plat $G[p]$; nous obtenons ainsi un groupe quasi-fini et plat sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$ encore noté H . Définissons des sous-schémas de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ en posant

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r &= \{ s \in \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid H_s = G_s[p]^{\text{mul}} \}, \\ \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r} &= \{ s \in \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid H_s \supset G_s[p]^{\text{mul}} \}, \\ \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\geq r} &= \{ s \in \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid H_s \subset G_s[p]^{\text{mul}} \}. \end{aligned}$$

Nous prouverons que H est fini et plat de rang p^r sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r}$. Le morphisme $\overline{\pi}$ envoie $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r$ sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ et

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r}$$

sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}$. Nous montrerons que $\overline{\pi}$ réalise un isomorphisme entre $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ et est étale en tout point de

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\geq r}.$$

Nous pourrions donc appliquer le théorème [Ber96, th. 1.3.5] au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\text{for}} \\ \sim \downarrow \overline{\pi} & & \downarrow \overline{\pi} & & \downarrow \overline{\pi} \\ \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{for}} \end{array}$$

dans lequel $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{for}}$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\text{for}}$ désignent les complétés formels p -adiques de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ et de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$; nous en déduisons que $\overline{\pi}$ réalise un isomorphisme

$$\overline{\pi} :]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r[\xrightarrow{\sim}]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$$

et qu'il existe des voisinages stricts U et V de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$ et de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r[$ dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}[$ et dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r}[$ tels que $\overline{\pi}$ réalise un isomorphisme de V sur U . Il restera à vérifier que H est fini et plat de rang p^r sur V ; nous pourrions alors définir le sous-groupe canonique partiel de rang p^r sur U par la formule $H_{\text{can}}^r = (\overline{\pi}^{-1})^* H$.

Expliquons à présent pourquoi $\overline{\pi}$ réalise un isomorphisme de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r$ sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ et est étale en tout point de

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\geq r}.$$

Ceci est évident sur les lieux modulaires obtenus par intersection avec $\mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}}$ et avec $\mathcal{A}_{g,n}$: le caractère étale résulte par exemple du théorème de rigidité des tores. Ainsi, il suffira de montrer que $\overline{\pi}$ est étale en tout point du bord de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\geq r}$; cela occupera la majeure partie de l'article. Nous montrerons en fait le caractère étale de $\overline{\pi}$ lorsque $n = 1$ car cette hypothèse simplifie grandement la description explicite des compactifications toroïdales. Nous travaillerons alors non plus avec des schémas mais avec des champs algébriques. Le caractère étale de $\overline{\pi}$ lorsque $n \geq 3$ suivra par changement de base.

Nous nous ramènerons à prouver un énoncé d'étalement sur les espaces de module de 1-motifs. Nous utiliserons une description du morphisme d'oubli du niveau entre espaces de modules de 1-motifs faisant intervenir un morphisme d'oubli du niveau entre variétés de Siegel de genre $< g$, une isogénie entre variétés abéliennes, et une isogénie entre tores. Le caractère étale du morphisme d'oubli entre variétés de Siegel de genre $< g$ résulte de la discussion précédente, et nous montrerons que l'isogénie entre variétés abéliennes est étale, et que l'isogénie entre tores est un isomorphisme.

Remarquons que ni $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$, ni $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$, ni même le morphisme $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ ne vérifient de propriétés modulaires simples. C'est la raison pour laquelle le caractère étale est plus délicat à démontrer au bord : on ne peut pas appliquer directement de critère infinitésimal.

1. Stratification des variétés de Siegel par le rang multiplicatif

Soit $g \geq 1$ un entier et p un nombre premier. Notons \mathcal{A}_g le champ algébrique sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ qui paramètre les schémas abéliens principalement polarisés de genre g , et notons G_0 le schéma abélien universel (noté G dans l'introduction) sur \mathcal{A}_g . Soit $1 \leq r \leq g$ un entier ; posons $\mathcal{D} = \{r\}$. Notons $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$ le champ sur \mathcal{A}_g paramétrant les sous-groupes $H \subset G_0[p]$ qui sont finis, plats et totalement isotropes de rang p^r . Notons H_0 le sous-groupe universel (noté H dans l'introduction) sur $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$ et $G_1 = G_0/H_0$. D'après [dJ93], la donnée du schéma abélien principalement polarisé G_0 et du sous-groupe totalement isotrope $H_0 \subset G_0[p]$ est équivalente à celle d'une chaîne d'isogénie

$$G_0 \xrightarrow{\alpha} G_1 \xrightarrow{\lambda} G_1^t \xrightarrow{\alpha^t} G_0^t,$$

où α^t est duale de α , où λ est une polarisation de G_1 , et où la composée $\alpha^t \circ \lambda \circ \alpha$ est égale à la multiplication par p de la polarisation principale de G_0 . Nous préférons fréquemment parler de chaînes d'isogénies plutôt que de sous-groupes : les conditions d'isotropie s'expriment de manière plus synthétique dans le langage des chaînes.

Soit S le spectre d'un corps de caractéristique p et X un groupe fini de p -torsion sur S . Il existe un dévissage canonique

$$0 \longrightarrow X^{\text{mul}} \longrightarrow X \longrightarrow X^{\text{non-mul}} \longrightarrow 0$$

en groupes finis sur S tels que X^{mul} soit multiplicatif et que $X^{\text{non-mul}}$ n'admette pas de sous-groupe multiplicatif. On appelle rang multiplicatif de X le rang de X^{mul} .

Dans le cas où S est un schéma sur \mathbb{F}_p qui n'est pas nécessairement le spectre d'un corps, et X est un groupe fini et plat de p -torsion sur S , la fonction de S dans \mathbb{N} qui à $s \in S$ associe le rang multiplicatif de X_s est semi-continue supérieurement : elle peut décroître lors de spécialisations.

Définissons plusieurs sous-schémas localement fermés réduits de $\mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et de $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_g^r &= \{ s \in \mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid \text{rg}(G_{0,s}[p]^{\text{mul}}) = p^r \}, \\ \mathcal{A}_g^{\geq r} &= \{ s \in \mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid \text{rg}(G_{0,s}[p]^{\text{mul}}) \geq p^r \}, \\ \mathcal{A}_g^{\leq r} &= \{ s \in \mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid \text{rg}(G_{0,s}[p]^{\text{mul}}) \leq p^r \}, \\ \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r &= \{ s \in \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid H_{0,s} = G_{0,s}[p]^{\text{mul}} \}, \\ \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r} &= \{ s \in \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid H_{0,s} \subset G_{0,s}[p]^{\text{mul}} \}, \\ \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\leq r} &= \{ s \in \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) \mid H_{0,s} \supset G_{0,s}[p]^{\text{mul}} \}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\pi : \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}_g$ envoie $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r$ dans \mathcal{A}_g^r , $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r}$ dans $\mathcal{A}_g^{\geq r}$ et $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\leq r}$ dans $\mathcal{A}_g^{\leq r}$. On déduit de la semi-continuité du rang multiplicatif que les immersions

$$\mathcal{A}_g^r \hookrightarrow \mathcal{A}_g^{\geq r}$$

et

$$\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r \hookrightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r}$$

sont fermées et que les immersions $\mathcal{A}_g^r \hookrightarrow \mathcal{A}_g^{\leq r}$ et $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r \hookrightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\leq r}$ sont ouvertes. De même, les immersions

$$\mathcal{A}_g^{\geq r} \hookrightarrow \mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

et

$$\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r} \hookrightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

sont ouvertes et les immersions

$$\mathcal{A}_g^{\leq r} \hookrightarrow \mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

et

$$\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\leq r} \hookrightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$$

sont fermées. D'après le théorème de Oort [Oo91], \mathcal{A}_g^r est dense dans $\mathcal{A}_g^{\leq r}$. Nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

Exemple 1.1. — Si $r = g$, alors $\mathcal{A}_g^r = \mathcal{A}_g^{\geq r}$ est le lieu ordinaire de $\mathcal{A}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p) = \mathcal{A}_g^{\leq r}$. De même,

$$\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r = \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r}$$

est le lieu ordinaire-multiplicatif et $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\leq r}$ est la composante irréductibles de $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où le sous-groupe universel H_0 est égal au noyau du morphisme de Frobenius de G_0 .

Rappelons qu'un homéomorphisme universel est un morphisme de schémas qui induit une homéomorphisme après tout changement de base.

Lemme 1.2. — *La projection canonique $\pi : \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r \rightarrow \mathcal{A}_g^r$ est un homéomorphisme universel.*

Démonstration. — On vérifie aisément que π est propre. Il suffit donc de montrer qu'elle est universellement bijective. Soit S un schéma sur \mathcal{A}_g^r . Si l'on note

$$S' = S \times_{\mathcal{A}_g^r} \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r,$$

on obtient un schéma abélien G sur S et un sous-groupe H de $G_{S'}[p]$. Pour tout $s \in S$, le rang multiplicatif de $G_s[p]$ est p^r . Le groupe $G_s[p]$ contient donc un unique sous-groupe multiplicatif de rang p^r , à savoir $G_s[p]^{\text{mul}}$. Comme l'ensemble sous-jacent à $\pi^{-1}(s)$ est en bijection avec celui des sous-groupes multiplicatifs de rang p^r de $G_s[p]$, on voit que π induit une bijection entre S et S' . \square

Proposition 1.3. — *La projection canonique $\pi : \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}_g$ est étale en tout point de $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r}$ et induit une surjection de $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r}$ sur $\mathcal{A}_g^{\geq r}$.*

Démonstration. — La surjectivité est évidente. Pour montrer l'étalement, on applique le critère infinitésimal. Soit S un schéma affine et S' un sous-schéma fermé de S défini par un idéal de carré nul. On se donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S' & \longrightarrow & \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^{\geq r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathcal{A}_g \end{array}$$

et l'on veut montrer qu'il existe une unique factorisation $S \rightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$. Le diagramme précédent induit un schéma abélien G sur S et un groupe fini et plat $H \subset G_{S'}[p]$ dont toutes les fibres sont multiplicatives. Le sous-groupe H de $G_{S'}$ est donc multiplicatif sur S' , et s'étend de manière unique en un sous-groupe multiplicatif de G par le théorème de rigidité des tores [SGA 3 IV th. 3.bis]. On a bien obtenu une factorisation $S \rightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}$. \square

Le corollaire suivant résulte du lemme 1.2 et de la proposition 1.3 en remarquant que tout homéomorphisme universel étale est un isomorphisme.

Corollaire 1.4. — *Le morphisme d'oubli du niveau induit un isomorphisme $\pi : \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_g^r$.*

L'isomorphisme inverse $\mathcal{A}_g^r \rightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r$ permet d'obtenir un sous-groupe $H_0 \subset G_0[p] \times_{\mathcal{A}_g} \mathcal{A}_g^r$ fini, plat et multiplicatif, tel que pour tout $s \in \mathcal{A}_g^r$, on ait

$$H_{0,s} = G_{0,s}[p]^{\text{mul}}.$$

Nous aurions pu déduire cela directement de [HT01, coro. II.1.2].

Remarque 1.5. — Dans le cas où $r = g$, le groupe H_0 coïncide avec le noyau du morphisme de Frobenius de $G_0 \times \mathcal{A}_g^r$.

2. Stratification sur les compactifications toroïdales

2.1. Rappels. — Dans ce paragraphe, nous rappelons les propriétés des compactifications toroïdales qui seront utilisées dans la suite. Commençons par fixer quelques notations.

Soit $V = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z} e_i$ un \mathbb{Z} -module libre de rang $2g$ muni d'une base (e_i) . Munissons V de l'accouplement symplectique donné par la formule

$$\left\langle \sum_{i=1}^{2g} a_i e_i, \sum_{j=1}^{2g} b_j e_j \right\rangle = a_1 b_{2g} - a_{2g} b_1 + a_2 b_{2g-1} - a_{2g-1} b_2 + \cdots + a_g b_{g+1} - a_{g+1} b_g.$$

Notons \mathfrak{C} l'ensemble des sous-modules facteurs directs totalement isotropes de V . Pour tout $V' \in \mathfrak{C}$, notons $C(V/V'^{\perp})$ le cône des formes quadratiques semi-définies positives à radical rationnel sur $V/V'^{\perp} \otimes \mathbb{R}$. Toute inclusion $V'' \subset V'$ entre éléments de \mathfrak{C} induit une inclusion $C(V/V''^{\perp}) \subset C(V/V'^{\perp})$. Définissons un complexe conique en posant

$$\mathcal{C} = \left(\coprod_{V' \in \mathfrak{C}} C(V/V'^{\perp}) \right) / \sim$$

où \sim est la relation d'équivalence engendrée par les inclusions $C(V/V''^{\perp}) \subset C(V/V'^{\perp})$ pour tous $V'', V' \in \mathfrak{C}$ vérifiant $V'' \subset V'$.

Notons $\Gamma = \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ le groupe des similitudes symplectiques de V . Ce groupe agit d'une manière compatible sur \mathfrak{C} et sur \mathcal{C} . Associons à $\mathcal{D} = \{r\}$ une chaîne de V en posant

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{\bullet} &= (\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0 \subset \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1 \subset \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^2 \subset \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^3) \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0 &= p \cdot V \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1 &= (\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z} \cdot e_i) \oplus (\oplus_{i>r} p \mathbb{Z} \cdot e_i) \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^2 &= \{v \in V \mid \langle v, \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1 \rangle \in p \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^3 &= V\end{aligned}$$

Le stabilisateur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{\bullet}$ dans Γ est le groupe parahorique habituellement associé à \mathcal{D} : il est formé des matrices de Γ dont la réduction modulo p est triangulaire supérieure par blocs, le premier bloc étant de taille $r \times r$.

Choisissons désormais une décomposition polyédrale rationnelle Γ -admissible \mathcal{S} de \mathcal{C} comme dans [St08, par. 3.2.3]. Cette décomposition est en particulier $\Gamma_{\mathcal{D}}$ -admissible. Les constructions effectuées dans [FC90, ch. IV] et dans [St08] permettent d'associer à \mathcal{S} deux champs algébriques $\overline{\mathcal{A}}_g$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ propres sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, ainsi qu'un diagramme cartésien

$$(2.1.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \overline{\pi} \\ \mathcal{A}_g & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont des immersions ouvertes d'image dense. Les champs $\overline{\mathcal{A}}_g$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ sont munis de stratifications respectivement paramétrées par \mathfrak{C}/Γ et par $\mathfrak{C}/\Gamma_{\mathcal{D}}$. Le morphisme $\overline{\pi}$ respecte ces stratifications, et la flèche induite par $\overline{\pi}$ sur l'ensemble des strates est la projection canonique $\mathfrak{C}/\Gamma \rightarrow \mathfrak{C}/\Gamma_{\mathcal{D}}$.

Remarque 2.2. — Les champs $\overline{\mathcal{A}}_g$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ sont également munis de stratifications paramétrées par les ensembles finis \mathcal{S}/Γ et $\mathcal{S}/\Gamma_{\mathcal{D}}$. Ces stratifications raffinent celles paramétrées par \mathfrak{C}/Γ et $\mathfrak{C}/\Gamma_{\mathcal{D}}$ d'une manière compatible au morphisme de \mathcal{S} dans \mathfrak{C} qui envoie σ sur l'unique V' tel que σ soit inclus dans l'intérieur de $C(V/V'^{\perp})$. Dans la suite de l'article, nous n'utiliserons pas les stratifications d'origine combinatoire paramétrées par \mathcal{S}/Γ et $\mathcal{S}/\Gamma_{\mathcal{D}}$.

Description du bord des compactifications. — Rappelons que l'on peut donner un sens au hensélisé d'un champ algébrique X le long d'un sous-champ fermé Y : c'est la limite projective des champs algébriques munis d'un morphisme affine étale vers X induisant un isomorphisme au-dessus de Y . Cette limite projective existe dans la 2-catégorie des champs algébriques puisque les flèches de transition sont affines. Dans le cas où X est un schéma et Y un point fermé, la définition précédente coïncide avec celle du hensélisé habituel, car les ouverts étales affines sont cofinaux parmi tous les ouverts étales. Dans le cas général, la complétion formelle de X le long de Y coïncide avec celle du hensélisé de X le long de Y . Notons X^{h_Y} le hensélisé de X le long de Y .

Soit $V' \in \mathfrak{C}$. Notons $Z_{V'}$ et $Z_{V', \mathscr{D}}$ les strates de $\overline{\mathcal{A}}_g$ et de $\overline{\mathcal{A}}_{g, \mathscr{D}}$ paramétrées par V' . Nous appelons « hensélisé du diagramme (2.1) le long de la V' -strate » le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{g, \mathscr{D}} \times_{\overline{\mathcal{A}}_{g, \mathscr{D}}} \overline{\mathcal{A}}_{g, \mathscr{D}}^{h_{Z_{V'}, \mathscr{D}}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g, \mathscr{D}}^{h_{Z_{V'}, \mathscr{D}}} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \overline{\pi} \\ \mathcal{A}_g \times_{\overline{\mathcal{A}}_g} \overline{\mathcal{A}}_g^{h_{Z_{V'}}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g^{h_{Z_{V'}}} \end{array}$$

De même pour tout diagramme cartésien stratifié analogue à (2.1). D'après [FC90, th. IV.5.7] et [St08, th. 3.2.7.1], le hensélisé du diagramme (2.1) le long de la V' -strate est canoniquement isomorphe au quotient par un groupe discret du hensélisé d'un diagramme

$$(2.2.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{V', \mathscr{D}} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{V', \mathscr{D}} \\ \downarrow \pi_{V'} & & \downarrow \overline{\pi}_{V'} \\ \mathcal{M}_{V'} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}_{V'} \end{array}$$

le long d'une strate ; toutes les notations employées seront expliquées dans la suite de ce paragraphe. On en déduit une description du complété formel de $\overline{\mathcal{A}}_g$ et de $\overline{\mathcal{A}}_{g, \mathscr{D}}$ le long des strates.

Il nous faut à présent expliquer le diagramme (2.2.A). En un mot : $\mathcal{M}_{V'}$ est l'espace de modules des 1-motifs de genre g principalement polarisés et rigidifiés par V' [St08, déf. 1.4.3], et le morphisme $\mathcal{M}_{V', \mathscr{D}} \rightarrow \mathcal{M}_{V'}$ paramètre les structures de niveau parahoriques sur le 1-motif universel qui sont de type \mathscr{D} en p et rigidifiées par V' [St08, par. 1.4.9]. Le champ $\mathcal{M}_{V', \mathscr{D}}$ paramètre donc certains sous-groupes finis, plats et totalement de rang p^r du groupe des points de p -torsion du 1-motif universel [St08, par. 1.2.4]. Rappelons que le groupe des points de p -torsion d'un 1-motif est muni d'une filtration à trois crans dont les gradués sont appelés « partie torique », « partie abélienne » et « partie périodique ». Le champ $\mathcal{M}_{V', \mathscr{D}}$ paramètre les sous-groupes H dont les parties toriques, abéliennes et périodiques sont déterminées par la position relative de la chaîne $\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^\bullet$ et du drapeau ($V' \subset V'^\perp \subset V$) : l'existence d'une rigidification par V' impose notamment que le rang torique de H soit égal au cardinal du noyau de

$$(\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^0 \cap V') \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow (\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^1 \cap V') \otimes \mathbb{F}_p$$

(qui est égal au cardinal du noyau de $(\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^2 / \mathcal{V}_{\mathscr{D}}^2 \cap V'^\perp) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow (\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^3 / \mathcal{V}_{\mathscr{D}}^3 \cap V'^\perp) \otimes \mathbb{F}_p$ comme on le voit par dualité), que le rang abélien de H soit égal au cardinal du noyau de

$$(\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^0 \cap V'^\perp / \mathcal{V}_{\mathscr{D}}^0 \cap V') \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow (\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^1 \cap V'^\perp / \mathcal{V}_{\mathscr{D}}^1 \cap V') \otimes \mathbb{F}_p,$$

et que le rang périodique de H soit égal au cardinal du noyau de

$$(\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^0 / \mathcal{V}_{\mathscr{D}}^0 \cap V'^\perp) \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow (\mathcal{V}_{\mathscr{D}}^1 / \mathcal{V}_{\mathscr{D}}^1 \cap V'^\perp) \otimes \mathbb{F}_p.$$

Terminons l'explication rapide le diagramme (2.2.A) : les immersions ouvertes $\mathcal{M}_{V'} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}$ et $\mathcal{M}_{V', \mathscr{D}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V', \mathscr{D}}$ sont des plongements toroïdaux localement de type fini associés à la restriction de \mathscr{S} à $C(V/V'^\perp)$.

Passons à une description plus précise des champs algébriques $\mathcal{M}_{V'}$ et $\mathcal{M}_{V',\mathcal{D}}$: il existe un diagramme commutatif de champs algébriques sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$

$$(2.2.B) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_{V',\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{V',\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{V',\mathcal{D}} \\ \downarrow \pi_{V'} & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_{V'} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{V'} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{V'} \end{array}$$

dans lequel

- i. $\mathcal{A}_{V'}$ est la variété de Siegel qui paramètre les schémas abéliens principalement polarisés de genre $g - \text{rg}(V')$,
- ii. $\mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}$ est la variété de Siegel qui paramètre les schémas abéliens principalement polarisés de genre $g - \text{rg}(V')$ munis d'un sous-groupe fini, plat et totalement isotrope de rang égal au cardinal du noyau de

$$(\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0 \cap V'^{\perp} / \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0 \cap V') \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow (\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1 \cap V'^{\perp} / \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1 \cap V') \otimes \mathbb{F}_p,$$

- iii. $\mathcal{B}_{V'} \rightarrow \mathcal{A}_{V'}$ paramètre les extensions

$$0 \longrightarrow T_0 \longrightarrow \tilde{G}_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0,$$

où $T_0 = \text{Hom}(V/V'^{\perp}, \mathbb{G}_m)$ et A_0 est la variété abélienne universelle sur $\mathcal{A}_{V'}$,

- iv. $\mathcal{B}_{V',\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}$ paramètre les diagrammes commutatifs d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_0 & \longrightarrow & \tilde{G}_0 & \longrightarrow & A_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T_1 & \longrightarrow & \tilde{G}_1 & \longrightarrow & A_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T'_1 & \longrightarrow & \tilde{G}'_1 & \longrightarrow & A_1^t \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & T'_0 & \longrightarrow & \tilde{G}'_0 & \longrightarrow & A_0^t \longrightarrow 0 \end{array}$$

où la chaîne $T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T'_1 \rightarrow T'_0$ est fixée par les formules $T_i = \text{Hom}(\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^{3-i}/V'^{\perp}, \mathbb{G}_m)$ et $T'_i = \text{Hom}(\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^i/V'^{\perp}, \mathbb{G}_m)$ pour $i = 0$ et 1 , où la chaîne $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_1^t \rightarrow A_0^t$ est fixée et provient de la chaîne d'isogénies universelles sur $\mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}$, et où le composé vertical $\tilde{G}_0 \rightarrow \tilde{G}'_0$ est la multiplication d'un isomorphisme par p et $A_0 \rightarrow A_0^t$ est la multiplication de la polarisation principale par p ,

- v. $\mathcal{M}_{V'} \rightarrow \mathcal{B}_{V'}$ paramètre les 1-motifs principalement polarisés $[V/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}_0]$,

vi. $\mathcal{M}_{V',\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{B}_{V',\mathcal{G}}$ paramètre les diagrammes commutatifs de 1-motifs

$$\begin{array}{ccc}
 [\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}_0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^1/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^2/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}'_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^3/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}'_0
 \end{array}$$

où la chaîne $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0/V'^{\perp}$ est fixée et est déterminée par $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^{\bullet}$, où la chaîne $\tilde{G}_0 \rightarrow \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}'_1 \rightarrow \tilde{G}'_0$ est fixée et provient de la chaîne d'isogénies universelles sur $\mathcal{B}_{V',\mathcal{G}}$, où le 1-motif $[\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^3/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}'_0]$ est dual de $[\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}_0]$ et la composée des flèches verticales est la multiplication d'une polarisation principale de $[\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}_0]$ par p .

Dans le diagramme (2.2.B), les flèches verticales correspondent à l'oubli du niveau, et sont définies de manière évidente en utilisant l'isomorphisme $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0 \xrightarrow{\sim} V$ de multiplication par p . Le morphisme $\mathcal{B}_{V'} \rightarrow \mathcal{A}_{V'}$ est un schéma abélien par la formule de Barsotti-Weil, et le morphisme $\mathcal{M}_{V'} \rightarrow \mathcal{B}_{V'}$ est un torseur sous le tore $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Sym}^2(V/V'^{\perp}), \mathbb{G}_m)$. D'après [St08, par. 1.4.7], le morphisme $\mathcal{B}_{V',\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{A}_{g,\mathcal{G}}$ est également un schéma abélien et $\mathcal{M}_{V',\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{B}_{V',\mathcal{G}}$ un torseur sous un tore.

Enfin, $\mathcal{M}_{V'} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}$ et $\mathcal{M}_{V',\mathcal{G}} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}$ sont les fibrés en plongements toroïdaux sur $\mathcal{B}_{V'}$ et $\mathcal{B}_{V',\mathcal{G}}$ associés à la restriction de \mathcal{S} à $C(V/V'^{\perp})$. Ce sont des champs algébriques localement de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ munis de stratifications respectivement paramétrées par $\{V'' \in \mathfrak{C} \mid V'' \subset V'\}/\Gamma$ et par $\{V'' \in \mathfrak{C} \mid V'' \subset V'\}/\Gamma_{\mathcal{G}}$. Notons $Y_{V'}$ et $Y_{V',\mathcal{G}}$ les strates paramétrées par V' : ce sont les uniques strates fermées. Notons $\Gamma_{V'}$ le stabilisateur de V' dans Γ , et $\Gamma_{V',\mathcal{G}} = \Gamma_{V'} \cap \Gamma_{\mathcal{G}}$. Le groupe discret $\Gamma_{V'}$ agit sans point fixe sur $\overline{\mathcal{M}}_{V'}$ en préservant $Y_{V'}$, et le quotient $\mathcal{M}_{V'}/\Gamma_{V'}$ est de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Il en est de même pour $\Gamma_{V',\mathcal{G}}$ et $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}$. Nous pouvons à présent préciser le lien entre compactifications toroïdales et espaces de modules de 1-motifs. La proposition suivante résulte de [FC90, th. IV.5.7] et de [St08, th. 3.2.7.1].

Proposition 2.3. — *Il existe des isomorphismes canoniques stratifiés*

$$\overline{\mathcal{M}}_{V'}^{h_{Y_{V'}}} / \Gamma_{V'} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{A}}_g^{h_{Z_{V'}}} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^{h_{Y_{V',\mathcal{G}}}} / \Gamma_{V',\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^{h_{Z_{V',\mathcal{G}}}} .$$

En particulier, il existe des isomorphismes $Y_{V'}/\Gamma_{V'} \xrightarrow{\sim} Z_{V'}$ et $Y_{V',\mathcal{G}}/\Gamma_{V',\mathcal{G}} \xrightarrow{\sim} Z_{V',\mathcal{G}}$.

2.4. Définition de la stratification. — Nous prolongeons à présent aux compactifications toroïdales les sous-schémas définis dans la première partie. Nous raisonnerons pour cela strate de bord par strate de bord, en expliquant quelles strates et quels sous-schémas de chacune de ces strates considérer. Nous verrons à la fin de ce paragraphe que les sous-schémas construits peuvent être décrit comme le lieu des compactifications toroïdales où le rang multiplicatif d'un groupe quasi-fini et plat est fixé ; cela fera le lien avec les définitions de l'introduction de l'article.

Introduisons au préalable quelques notations :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^r &= \{ V' \in \mathfrak{C} \mid \text{rg}(V') \leq r \} \\ \mathfrak{C}^{\geq r} &= \mathfrak{C} \\ \mathfrak{C}^{\leq r} &= \mathfrak{C}^r \\ \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^r &= \{ V' \in \mathfrak{C} \mid \mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0/V'^{\perp} = \mathcal{V}_{\mathcal{G}}^1/V'^{\perp} = \mathcal{V}_{\mathcal{G}}^2/V'^{\perp} \} \\ \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^{\geq r} &= \{ V' \in \mathfrak{C} \mid \mathcal{V}_{\mathcal{G}}^0/V'^{\perp} = \mathcal{V}_{\mathcal{G}}^1/V'^{\perp} \} \\ \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^{\leq r} &= \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^r. \end{aligned}$$

Pour tout $V' \in \mathfrak{C}^r$ (resp. $\mathfrak{C}^{\geq r}$, $\mathfrak{C}^{\leq r}$), appelons $\mathcal{A}_{V'}^r$ (resp. $\mathcal{A}_{V'}^{\geq r}$, $\mathcal{A}_{V'}^{\leq r}$) le sous-schéma localement fermé de $\mathcal{A}_{V'} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où le rang multiplicatif est égal (resp. supérieur, inférieur) à $p^{r-\text{rg}(V')}$. Avec les notations de la première partie, on a donc

$$\mathcal{A}_{V'}^r = \mathcal{A}_{g-\text{rg}(V')}^{r-\text{rg}(V')} \quad \mathcal{A}_{V'}^{\geq r} = \mathcal{A}_{g-\text{rg}(V')}^{\geq r-\text{rg}(V')} \quad \mathcal{A}_{V'}^{\leq r} = \mathcal{A}_{g-\text{rg}(V')}^{\leq r-\text{rg}(V')}.$$

De même, notons $\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}^r$ le sous-schéma localement fermé de $\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où le rang multiplicatif est $p^{r-\text{rg}(V')}$ et où $\text{Ker}(A_0 \rightarrow A_1)$ est multiplicatif, et ainsi de suite pour $\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}^{\geq r}$ et $\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}^{\leq r}$. Définissons $\mathcal{B}_{V'}^r$, $\mathcal{B}_{V'}^{\geq r}$, $\mathcal{B}_{V'}^{\leq r}$, $\mathcal{B}_{V',\mathcal{G}}^r$, ..., $Y_{V'}^r$, ..., $Y_{V',\mathcal{G}}^r$, ..., $\mathcal{M}_{V'}^r$, ..., $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^r$, ... par produits fibrés. Par exemple :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{V'}^r &= \mathcal{B}_{V'} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V'}^r & \mathcal{B}_{V'}^{\geq r} &= \mathcal{B}_{V'} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V'}^{\geq r} & \mathcal{B}_{V',\mathcal{G}}^r &= \mathcal{B}_{V',\mathcal{G}} \times_{\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}^r \\ Y_{V'}^r &= Y_{V'} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V'}^r & Y_{V',\mathcal{G}}^r &= Y_{V',\mathcal{G}} \times_{\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}^r & \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^r &= \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}} \times_{\mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{G}}^r. \end{aligned}$$

Les immersions $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}^{\geq r}$, $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^{\geq r}$, $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^{\leq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^{\leq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont fermées ; les immersions $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}^{\leq r}$, $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^{\leq r}$, $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^{\geq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}}^{\geq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{G}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont ouvertes.

Remarque 2.5. — En vertu du théorème de Oort [Oo91], on peut voir que $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^r$ est dense dans $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^{\leq r}$; nous n'utiliserons pas ce fait dans la suite.

En quotientant $Y_{V'}^r$, $Y_{V'}^{\geq r}$ et $Y_{V'}^{\leq r}$ par $\Gamma_{V'}$ (resp. $Y_{V',\mathcal{G}}^r$, $Y_{V',\mathcal{G}}^{\geq r}$ et $Y_{V',\mathcal{G}}^{\leq r}$ par $\Gamma_{V',\mathcal{G}}$), l'on obtient des sous-schémas localement fermés $Z_{V'}^r$, $Z_{V'}^{\geq r}$ et $Z_{V'}^{\leq r}$ de $\overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ (resp. $Z_{V',\mathcal{G}}^r$, $Z_{V',\mathcal{G}}^{\geq r}$ et $Z_{V',\mathcal{G}}^{\leq r}$ de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$).

Remarque 2.6. — Lorsque $V' = 0$, on a $Z_{V'} = \mathcal{A}_g$, $Z_{V'}^r = \mathcal{A}_g^r$, $Z_{V',\mathcal{G}} = \mathcal{A}_{g,\mathcal{G}}$, $Z_{V',\mathcal{G}}^r = \mathcal{A}_{g,\mathcal{G}}^r$ et ainsi de suite.

Nous prolongeons les sous-schémas localement fermés définis dans la première partie aux compactifications toroïdales en posant

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}_g^r &= \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}^r} Z_{V'}^r & \overline{\mathcal{A}}_g^{\geq r} &= \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}^{\geq r}} Z_{V'}^{\geq r} & \overline{\mathcal{A}}_g^{\leq r} &= \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}^{\leq r}} Z_{V'}^{\leq r} \\ \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^r &= \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^r} Z_{V',\mathcal{G}}^r & \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^{\geq r} &= \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^{\geq r}} Z_{V',\mathcal{G}}^{\geq r} & \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^{\leq r} &= \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}_{\mathcal{G}}^{\leq r}} Z_{V',\mathcal{G}}^{\leq r} \end{aligned}$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^{\leq r} & \longleftarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^r & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{G}}^{\geq r} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \overline{\mathcal{A}}_g^{\leq r} & \longleftarrow & \overline{\mathcal{A}}_g^r & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_g^{\geq r} \end{array}$$

Dans la proposition suivante, nous explicitons la structure locale de chacun des schémas définis plus haut. La démonstration est immédiate à partir de la proposition **2.3** et de la construction.

Proposition 2.7. — *Pour tout $V' \in \mathfrak{C}^r$, il existe un isomorphisme canonique stratifié*

$$(\overline{\mathcal{M}}_{V'}^r)^{h_{V'}^r} / \Gamma_{V'} \xrightarrow{\sim} (\overline{\mathcal{A}}_g^r)^{h_{Z_{V'}}^r}.$$

Il en est de même pour $\overline{\mathcal{A}}_g^{\geq r}$, $\overline{\mathcal{A}}_g^{\leq r}$, $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^r$, $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\geq r}$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\leq r}$.

Nous avons montré précédemment que $\mathcal{A}_{V'}^r$ était fermé dans $\mathcal{A}_{V'}^{\geq r}$. En utilisant la proposition **2.7**, nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 2.8. — *Les immersions $\overline{\mathcal{A}}_g^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^{\geq r}$, $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\geq r}$, $\overline{\mathcal{A}}_g^{\leq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\leq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont fermées. Les immersions $\overline{\mathcal{A}}_g^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^{\leq r}$, $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^r \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\leq r}$, $\overline{\mathcal{A}}_g^{\geq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\geq r} \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ sont ouvertes.*

Remarquons que $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^r$ est le sous-schéma de $\overline{\mathcal{M}}_{V'} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où le groupe $\tilde{G}_0[p]$ est de rang multiplicatif p^r . En effet il existe sur $\overline{\mathcal{M}}_{V'} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ une suite exacte $0 \rightarrow T_0[p] \rightarrow \tilde{G}_0[p] \rightarrow A_0[p] \rightarrow 0$ dans laquelle le groupe $T_0[p]$ est de rang multiplicatif $p^{\text{rg}(V')}$, et dans laquelle $A_0[p]$ est de rang multiplicatif $p^{r-\text{rg}(V')}$ exactement sur $\overline{\mathcal{M}}_{V'}^r$. De même, $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathscr{D}}^r$ est le sous-schéma de $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathscr{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où $\text{Ker}(\tilde{G}_0 \rightarrow \tilde{G}_1)$ est de rang p^r et égal à $\tilde{G}_0[p]^{\text{mul}}$.

Rappelons que d'après [FC90, th. IV.5.7], le schéma abélien universel G_0 sur \mathcal{A}_g s'étend en un schéma semi-abélien sur $\overline{\mathcal{A}}_g$ que l'on note encore G_0 . On étend le sous-groupe universel H à $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}$ en prenant son adhérence dans le groupe quasi-fini et plat $G_0[p]$; on note encore H le groupe quasi-fini et plat obtenu sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}$. Pour tout $V' \in \mathfrak{C}$, la restriction de G_0 à $Z_{V'}$ correspond à la restriction de \tilde{G}_0 à $Y_{V'}$ par les isomorphismes de la proposition **2.3**. De même, la restriction de H à $Z_{V',\mathscr{D}}$ correspond à la restriction de $\text{Ker}(\tilde{G}_0 \rightarrow \tilde{G}_1)$ à $Y_{V',\mathscr{D}}$. La proposition **2.7** montre par conséquent que $\overline{\mathcal{A}}_g^r$ est le sous-schéma de $\overline{\mathcal{A}}_g \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où le rang multiplicatif de $G_0[p]$ est p^r ; nous avons utilisé cette propriété pour définir $\overline{\mathcal{A}}_g^r$ dans l'introduction. De même, $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^r$ est le sous-schéma de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{F}_p)$ où H est multiplicatif de rang p^r et égal à $G_0[p]^{\text{mul}}$. En particulier, H est fini et plat sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^r$.

2.9. Oubli du niveau. — Nous montrons que le morphisme d'oubli du niveau $\bar{\pi}$ se comporte exactement de la même manière qu'avant compactification.

Proposition 2.10. — *Le morphisme $\bar{\pi} : \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_g$ est étale en tout point de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\geq r}$ et induit une surjection de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\geq r}$ sur $\overline{\mathcal{A}}_g^{\geq r}$.*

Démonstration. — L'énoncé de surjectivité est clair. On déduit de la proposition **2.7** que pour montrer que

$$\bar{\pi} : \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}} \longrightarrow \overline{\mathcal{A}}_g$$

est étale en tout point de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathscr{D}}^{\geq r}$, il suffit de montrer que pour tout $V' \in \mathfrak{C}_{\mathscr{D}}^{\geq r}$, le morphisme

$$\bar{\pi}_{V'} : \overline{\mathcal{M}}_{V',\mathscr{D}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}$$

est étale en tout point de $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathscr{D}}^{\geq r}$. Nous allons démontrer ceci par dévissage. D'après la proposition **1.3**, le morphisme naturel

$$\mathcal{A}_{V',\mathscr{D}} \longrightarrow \mathcal{A}_{V'}$$

est étale en tout point de $\mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}^{\geq r}$. On en déduit que la flèche $\mathcal{B}_{V'} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{B}_{V'}$ est étale en tout point de $\mathcal{B}_{V'}^{\geq r} \times_{\mathcal{A}_{V'}^{\geq r}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}^{\geq r}$. Puis le morphisme naturel

$$\mathcal{B}_{V',\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{B}_{V'} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}$$

est étale en tout point de $\mathcal{B}_{V',\mathcal{D}}^{\geq r}$. En effet, $\mathcal{B}_{V',\mathcal{D}}$ paramètre les diagrammes

$$(2.10.A) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0/V'^{\perp} & \longrightarrow & A_0 \\ \downarrow \sim & & \downarrow f \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1/V'^{\perp} & \longrightarrow & A_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^2/V'^{\perp} & \longrightarrow & A_1^t \\ \downarrow & & \downarrow f^t \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^3/V'^{\perp} & \longrightarrow & A_0^t \end{array}$$

donc le morphisme $\mathcal{B}_{V',\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{B}_{V'} \times_{\mathcal{A}_{V'}} \mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}$ est un $\text{Ker}(f^t)$ -torseur, et f^t est étale en tout point de $\mathcal{A}_{V',\mathcal{D}}^{\geq r}$ par définition. On en déduit que la flèche

$$\mathcal{M}_{V'} \times_{\mathcal{B}_{V'}} \mathcal{B}_{V',\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{M}_{V'}$$

est étale en tout point de $\mathcal{M}_{V'}^{\geq r} \times_{\mathcal{B}_{V'}^{\geq r}} \mathcal{B}_{V',\mathcal{D}}^{\geq r}$. Il est équivalent de montrer que le morphisme

$$\mathcal{M}_{V',\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{M}_{V'}$$

est étale, de montrer que $\mathcal{M}_{V',\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{V'} \times_{\mathcal{B}_{V'}} \mathcal{B}_{V',\mathcal{D}}$, et de montrer que les tores relatifs aux toreseurs $\mathcal{M}_{V',\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{B}_{V',\mathcal{D}}$ et $\mathcal{M}_{V'} \rightarrow \mathcal{B}_{V'}$ sont les mêmes, à savoir $\underline{\text{Hom}}(\text{Sym}^2(V/V'^{\perp}), \mathbb{G}_m)$. Cela résulte du fait que $\mathcal{M}_{V',\mathcal{D}}$ paramètre les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}_0 \\ \downarrow \sim & & \downarrow \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^2/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}'_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^3/V'^{\perp} & \longrightarrow & \tilde{G}'_0 \end{array}$$

qui relèvent le diagramme 2.10.A, que sur $\mathcal{M}_{V'} \times_{\mathcal{B}_{V'}} \mathcal{B}_{V',\mathcal{D}}$ on connaît $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}_0$, $\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^3/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}'_0$ et $\tilde{G}_0 \rightarrow \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{G}'_1 \rightarrow \tilde{G}'_0$, et que par hypothèse, les 1-motifs $[\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}_1]$ et $[\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^2/V'^{\perp} \rightarrow \tilde{G}'_1]$ doivent être duaux. Il reste à prouver que le morphisme

$$\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{D}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}$$

est étale en tout point de $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{D}}^{\geq r}$; cela est évident car les données combinatoires et les structures entières utilisées pour définir ces deux plongements toroïdaux sont les mêmes, à savoir $\mathcal{S}|_{C(V/V'^{\perp})}$ et $\mathrm{Sym}^2(V/V'^{\perp})$. \square

Corollaire 2.11. — *Le morphisme $\overline{\pi} : \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}^r \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^r$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.10, $\overline{\pi}$ est étale et surjectif. Il est en particulier quasi-fini et plat, et le cardinal de ses fibres géométriques décroît par spécialisation. Comme $\pi : \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r \rightarrow \mathcal{A}_g^r$ est universellement injectif d'après le lemme 1.2, on voit que les fibres géométriques $\overline{\pi}$ sont des singletons : $\overline{\pi}$ est un homéomorphisme universel. C'est donc un isomorphisme puisqu'il est étale. \square

Remarque 2.12. — Montrer directement l'universelle injectivité de $\overline{\pi} : \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}^r \rightarrow \overline{\mathcal{A}}_g^r$ aurait posé un petit problème de présentation, car cette question ne se réduit pas immédiatement à l'étude de $\overline{\mathcal{M}}_{V',\mathcal{D}}^r \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{V'}^r$: il faut tenir compte de l'action de Γ et de $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Nous avons contourné ce problème en montrant d'abord le caractère étale, puis en utilisant la densité de $\mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}^r$ dans $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}^r$.

2.13. Un sous-champ ouvert. — Dans ce paragraphe, nous construisons un sous-champ ouvert $\tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ tel que le sous-groupe universel H_0 soit fini et plat de rang p^r sur $\tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ et tel que

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}^r \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p).$$

Cette construction nous sera utile pour vérifier que le sous-groupe canonique partiel est fini et plat sur des voisinages stricts convenables. Notons donc

$$\tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}} = \bigcup_{V' \in \mathfrak{C}_{\mathcal{D}}^r} Z_{V',\mathcal{D}}$$

et rappelons que $\mathfrak{C}_{\mathcal{D}}^r$ est l'ensemble des $V' \in \mathfrak{C}$ tels que $\mathrm{rg}(V') \leq r$ et

$$\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0/V'^{\perp} = \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1/V'^{\perp} = \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^2/V'^{\perp}.$$

D'après les définitions, il est clair que $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}^r \hookrightarrow \tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$. Si V'' et V' sont deux éléments de \mathfrak{C} , on sait que $Z_{V',\mathcal{D}}$ est inclus dans l'adhérence de $Z_{V'',\mathcal{D}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ si et seulement si V'' est inclus dans $\gamma \cdot V'$ pour un élément γ de $\Gamma_{\mathcal{D}}$. Nous en déduisons que $\tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ est un sous-schéma ouvert de $\overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$. De plus, pour tout $V' \in \mathfrak{C}$, la restriction de H_0 à $Z_{V',\mathcal{D}}$ est finie et plate de rang

$$p^{r - \mathrm{rg}(\mathrm{Ker}(\mathcal{V}_{\mathcal{D}}^0/V'^{\perp} + pV \rightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{D}}^1/V'^{\perp} + pV))}.$$

Ainsi, H_0 est fini et plat de rang p^r sur $\tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$.

3. Construction de sous-groupes canoniques partiels

3.1. Énoncé du théorème principal. — Pour tout schéma X propre sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, on note X^{rig} la variété analytique rigide associée, et pour tout sous-schéma localement fermé Y de $X \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, on note $]Y[$ son tube dans X^{rig} ; s'il y a ambiguïté sur X , on le notera plutôt $]Y[_X$.

La théorie des champs en géométrie analytique rigide existe sûrement, mais n'a jamais été écrite et n'est vraisemblablement pas complètement triviale. Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous rajoutons donc des structures de niveau principales en un entier $n \geq 3$ premier à p à tous les champs $\mathcal{A}_g, \overline{\mathcal{A}}_g, \overline{\mathcal{A}}_g^r, \dots, \mathcal{A}_{g,\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}^r, \dots$. Cela revient juste à considérer les produits fibrés des objets de la liste précédente par le morphisme d'oubli $\mathcal{A}_{g,n} \rightarrow \mathcal{A}_g$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$. Les morphismes étales restent étales, et les isomorphismes des isomorphismes. Mais les champs algébriques sont transformés en schémas, ce qui nous permet d'étudier les variétés analytiques rigides associées.

D'après le corollaire **2.11** et la remarque suivant le corollaire **2.8**, la formule $H_{\text{mul}}^r = (\overline{\pi}^{-1})^* H_0$ définit un groupe multiplicatif fini, plat et totalement isotrope de rang p^r sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$. Le groupe H_{mul}^r est inclus dans le groupe quasi-fini et plat $G_0[p]$ et vérifie

$$H_{\text{mul},s}^r = G_{0,s}[p]^{\text{mul}}$$

pour tout $s \in \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$. Le théorème de rigidité des groupes de type multiplicatif [SGA 3 IV th. 3.bis] montre que H_{mul}^r se relève canoniquement en un sous-groupe $H_{\text{can}}^r \subset G[p]$ qui est fini, plat et totalement isotrope de rang p^r sur $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$. Nous nous demandons s'il existe un voisinage strict sur lequel H_{can}^r se prolonge. Le théorème suivant répond affirmativement à cette question.

Théorème 3.2. — *Il existe un voisinage strict U de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$ dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}[$ et un sous-groupe $H_{\text{can},U}^r$ de $G_0[p]$ fini et plat de rang p^r sur U dont la restriction à*

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$$

est égale à H_{can}^r . Le sous-groupe $H_{\text{can},U}^r$ est unique et totalement isotrope dès que toute composante connexe de U rencontre

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[.$$

Le groupe $H_{\text{can},U}^r$ est appelé « sous-groupe canonique partiel de rang p^r sur U ». Sa restriction à l'union des composantes connexes de U qui rencontrent

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$$

est canonique. Remarquons qu'il résulte de [Ber96, déf. 1.2.1] que cette union disjointe forme encore un voisinage strict de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$.

Remarque 3.3. — Dans le cas où $r = g$, le schéma $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^g$ est le lieu ordinaire de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq g} = \overline{\mathcal{A}}_{g,n}$. Le groupe H_{can}^g relève à

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^g[$$

le noyau du morphisme de Frobenius de G_0 sur $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^g$, et les sous-groupes canoniques partiels de rang p^g sont les sous-groupes canoniques habituels. La démonstration du théorème **3.2** fournit dans ce cas une nouvelle preuve — non-effective — de certains résultats de [AM04] et de [AG07].

La preuve du théorème **3.2** occupe les deux paragraphes suivants. Nous y démontrons respectivement l'unicité puis l'existence.

3.4. Démonstration de l'unicité. — Soit U un voisinage strict de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[$ dont chaque composante connexe rencontre

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[.$$

Montrons qu'il existe au plus un sous-groupe canonique partiel de rang p^r sur U . Notons $\mathcal{A}_{g,n}^{\text{an}}$ et $\mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}}^{\text{an}}$ les champs algébriques rigides localement de type fini obtenus par analytification de

$$\mathcal{A}_{g,n} \times \text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$$

et de

$$\mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}} \times \text{Spec}(\mathbb{Q}_p).$$

L'ouvert $\mathcal{A}_{g,n}^{\text{an}}$ de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{rig}}$ est donc Zariski-dense. Rappelons le résultat suivant de géométrie rigide [Lu, th. 1.6 I)].

Proposition 3.5. — *Soit X une variété rigide lisse et Z un fermé de Zariski de X . Notons V l'ouvert complémentaire de Z dans X . La variété rigide V est irréductible.*

Corollaire 3.6. — *Toutes les composantes connexes de $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{an}}$ rencontrent $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{an}}$.*

Démonstration. — L'ouvert U est réunion de ses composantes connexes, qui sont irréductibles puisque

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\text{rig}}$$

l'est. Les composantes connexes de $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{an}}$ sont en bijection avec celles de U d'après la proposition 3.5. Comme toutes les composantes connexes de U rencontrent

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[,$$

il en est de même des composantes connexes de $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{an}}$. \square

Nous pouvons à présent démontrer qu'il existe au plus un sous-groupe canonique partiel de rang p^r sur U . Soient H et H' deux tels sous-groupes. Leur restriction à $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$ déterminent deux sections s et s' de

$$\pi : \mathcal{A}_{g,n,\mathcal{D}}^{\text{rig}} \rightarrow \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$$

sur $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$ qui coïncident sur $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[\cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$. D'après le principe de prolongement analytique [Ber96, prop. 0.1.13] et le corollaire 3.6, les sections s et s' coïncident sur la variété intègre $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$. Ainsi, les restrictions de H et H' à

$$U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$$

sont égales. Comme $U \cap \mathcal{A}_{g,n}^{\text{rig}}$ est dense dans U et H (resp. H') est fini et plat sur U , le groupe H (resp. H') est égal à l'adhérence de H_U (resp. H'_U) dans G_0 . On a donc $H = H'$ sur U , ce qui termine la démonstration de l'unicité.

3.7. Démonstration de l'existence. — Dans [Ber96, th. 1.3.5], Berthelot étudie le problème général suivant de géométrie rigide. Soit

$$\begin{array}{ccccc} & & Y' & \xrightarrow{i'} & P' \\ & \nearrow j' & \downarrow v & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{i} & P \end{array}$$

un diagramme commutatif où P et P' sont des schémas formels de type fini sur $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p)$, où Y, Y' et X sont des schémas de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, où j et j' sont des immersions ouvertes, et où i et i' sont des immersions fermées. On suppose que u est propre et que v est étale sur un voisinage ouvert de X dans P' . Berthelot montre alors que u induit un isomorphisme entre un voisinage strict de $]X[_{P'}$ dans $]Y'[_{P'}$ et un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$.

Notons $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\mathrm{for}}$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{for}}$ les complétions formelles p -adiques de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}$ et de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$, puis appliquons le résultat de Berthelot au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{for}} \\ \sim \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \bar{\pi} \\ \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\mathrm{for}} \end{array}$$

dans lequel $\bar{\pi}$ est propre, réalise un isomorphisme entre $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r$ et $\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r$ d'après le corollaire **2.11**, et est étale sur un voisinage ouvert de

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\geq r}$$

dans $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{for}}$ d'après la proposition **2.10** et le caractère quasi-compacité de $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$. Nous en déduisons l'existence d'un voisinage strict V de

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r[_$$

dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r}[_$ et d'un voisinage strict U de $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[_$ dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^{\leq r}[_$ tel que $\bar{\pi}$ réalise un isomorphisme entre V et U . Le groupe $(\bar{\pi}^{-1})^*H_0$ est alors quasi-fini et plat sur U , et sa restriction à

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n}^r[_$$

est égale à H_{can}^r . Nous aurons démontré le théorème **3.2** si, quitte à rapetisser U , nous prouvons que $(\bar{\pi}^{-1})^*H_0$ est fini et plat de rang p^r sur U .

Remarque 3.8. — Il est clair que $(\bar{\pi}^{-1})^*H_0$ est fini et plat de rang p^r sur le lieu $U \cap]\mathcal{A}_{g,n}[_$ des variétés abéliennes ayant bonne réduction.

Pour montrer que, quitte à rapetisser U , le groupe $(\bar{\pi}^{-1})^*H_0$ est fini et plat de rang p^r sur U , il suffit de montrer que, quitte à rapetisser V , le groupe H_0 est fini et plat de rang p^r sur V . Notons $\tilde{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}$ le schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/n])$ obtenu par changement de base de $\tilde{\mathcal{A}}_{g,\mathcal{D}}$ via $\mathcal{A}_{g,n} \rightarrow \mathcal{A}_g$ (cf. paragraphe **2.13**). Notons

$$\tilde{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{rig}}$$

la variété analytique localement de type fini associée au schéma $\tilde{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}_p)$. Elle forme un ouvert de Zariski dans

$$\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{rig}}$$

et H_0 est fini et plat de rang p^r sur $\tilde{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{rig}}$. Comme $\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r$ est inclus dans $\tilde{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p)$, tout voisinage strict de

$$]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^r[_$$

dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r}[_$ contient un voisinage strict inclus dans $]\overline{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\leq r}[_ \cap \tilde{\mathcal{A}}_{g,n,\mathcal{D}}^{\mathrm{rig}}$. Quitte à rapetisser V , on peut donc supposer que H_0 est fini et plat de rang p^r sur V , ce qui termine la démonstration du théorème **3.2**.

Remerciements. Nous remercions le rapporteur pour sa relecture attentive de cet article.

Références

- [AG07] F. ANDREATTA & C. GASBARRI – « The canonical subgroup for families of abelian varieties », *Compositio Mathematica* **143** (2007), n° 3, p. 566–602.
- [AM04] A. ABBÈS & A. MOKRANE – « Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p -adiques pour les variétés abéliennes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **99** (2004), p. 117–162.
- [Ber96] P. BERTHELOT – « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre », prépublication (1996), disponible sur perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/
- [dJ93] A. J. DE JONG – « The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with $\Gamma_0(p)$ -level structure », *J. Algebraic Geom.* **2** (1993), n° 4, p. 667–688.
- [Far10] L. FARGUES – « La filtration canonique des points de torsion des groupes p -divisibles », avec la collaboration de Y. Tian, prépublication (2010), disponible sur www.math.u-psud.fr/fargues/Prepublications
- [FC90] G. FALTINGS & C.-L. CHAI – *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 22 (1990), Springer, Berlin.
- [HT01] M. HARRIS & R. TAYLOR – *The geometry and cohomology of simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Stud., vol. 151 (2001), Princeton University Press, Princeton.
- [Ka72] N. KATZ – « p -adic properties of modular schemes and modular forms », in *Modular functions of one variable III*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 350 (1972), p. 69–190, Springer, Berlin.
- [KL05] M. KISIN & K.F. LAI – « Overconvergent Hilbert modular forms », *Amer. J. Math.* **127** (2005), p. 735–783.
- [Lu] W. LÜTKEBOHMERT – « Der Satz von Remmert-Stein in der nichtarchimedischen Funktionentheorie », *Math. Z.* **139** (1974), p. 69–84.
- [Oo91] F. OORT – « Moduli of abelian varieties and Newton polygons », *C.R.A.S.* **312** série 1 (1991), p. 385–389.
- [St08] B. STROH – « Compactifications de variétés de Siegel aux places de mauvaise réduction », à paraître à Bull. Soc. Math. Fr. (2010), n° ArXiv 0810.0117.
- [Yu04] C.-F. YU – « Irreducibility of the Siegel moduli spaces with parahoric level structure », *Int. Math. Res. Not.* **48** (2004), p. 2593–2597.

20 mars 2009

VINCENT PILLONI ET BENOÎT STROH • Courriel : pilloni@math.columbia.edu

Courriel : stroh@math.univ-paris13.fr, Columbia University, Rm 525, MC 4441, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA • Université Paris 13, LAGA, 99 avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse France