XVI. FONCTIONS DE DIMENSION

par

Vincent Pilloni et Benoît Stroh

Nous définissons la notion de fonction de dimension sur un schéma X et nous montrons l'existence de telles fonctions localement pour la topologie étale si X est quasi-excellent.

1. Universelle caténarité des schémas henséliens

Dans cette partie, nous rappelons les notions de *caténarité* et d'*universelle caténarité*. Le lecteur pourra consulter l'exposé I pour plus de détails.

1.1. Schémas universellement caténaires. — Soient S un espace topologique et $X \subset Y$ des fermés irréductibles de S. Notons $\dim(Y/X)$ la borne supérieure de l'ensemble des longueurs des chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles $X \subsetneq Z \subset Y$. Si S est un schéma, X et Y des sous-schémas fermés intègres et x le point générique de X, on a

$$\dim(Y/X) \;=\; \dim(\mathscr{O}_{Y,x})\,.$$

Définition 1.1.1 **([ÉGA 0_{IV} 14.3.2]).** — Un schéma S est *caténaire* s'il est nœthérien et si pour toute chaîne $X \subset Y \subset Z$ de fermés irréductibles de S, on a

$$\dim(Z/X) \;=\; \dim(Z/Y) + \dim(Y/X)\,.$$

Un schéma S est *universellement caténaire* si tout schéma de type fini sur S est caténaire.

La notion de caténarité est stable par localisation et par restriction à des sous-schémas fermés. Ainsi, S est universellement caténaire si et seulement si pour tout entier $n \geq 0$, le schéma $\mathbb{A}^n_S$ est caténaire.

Lemme 1.1.2. — *Un schéma de Cohen-Macaulay est universellement caténaire.*

Démonstration. — Si S est Cohen-Macaulay, il est caténaire d'après [**Mat80**] 16.B. Comme pour tout $n \geq 0$, le schéma $\mathbb{A}^n_S$ reste Cohen-Macaulay, le schéma S est bien universellement caténaire.

Exemple 1.1.3. — Tout schéma régulier est universellement caténaire car Cohen-Macaulay. En particulier, le spectre d'un corps, un trait et le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un corps ou sur un anneau de valuation discrète sont universellement caténaires. Tout schéma de type fini sur un schéma régulier est universellement caténaire.

Proposition 1.1.4 **([Mat80] 28.P).** — *Un schéma local complet nœthérien est universellement caténaire.*

Démonstration. — Le théorème de structure de Cohen [**ÉGA** 0_{IV} 19.8.8] permet d'écrire tout schéma local complet nœthérien comme fermé dans le spectre d'une algèbre de séries formelles sur un anneau de Cohen. L'universelle caténarité résulte de l'exemple précédent et de la stabilité de cette notion par immersion fermée.

1.2. Un théorème de Ratliff. — On dit qu'un schéma nœthérien est *équidimensionnel* si toutes ses composantes irréductibles ont même dimension. Soit S un schéma local nœthérien. On note $\widehat{S}$ le spectre du complété de l'anneau de S en son idéal maximal.

Définition 1.2.1. — Le schéma S est *formellement équidimensionnel* si $\widehat{S}$ est équidimensionnel. Il est *formellement caténaire* si pour tout $s \in S$, son adhérence $\overline{\{s\}}$ est formellement équidimensionnelle.

Soit S un schéma local nœthérien. Ratliff a démontré le théorème fondamental suivant, qui a déjà été mentionné dans la proposition **??** de l'exposé I.

Théorème 1.2.2 (**[Mat86] 31.7**). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *S est formellement caténaire,*
- *S est universellement caténaire,*
- *$\mathbb{A}^1_S$ est caténaire,*
- *S est caténaire et pour tout $s \in S$, tout schéma intègre S' muni d'une flèche finie et dominante $S' \to \overline{\{s\}}$ et tout point fermé s' de S', on a $\dim(\mathscr{O}_{S',\,s'}) = \dim(\overline{\{s\}})$.*

L'équivalence entre la dernière assertion et les trois autres est démontrée dans le second paragraphe de la page 255 de la démonstration du théorème 31.7 de [**Mat86**]. On pourra également consulter [**ÉGA** IV$_2$ 5.6.10].

Corollaire 1.2.3 (**[Mat86] 31.2**). — *Tout schéma nœthérien de dimension ≤ 2 est caténaire. Tout schéma nœthérien de dimension ≤ 1 est universellement caténaire.*

1.3. Schémas henséliens et caténarité. — Nous avons vu que tout schéma local complet nœthérien est universellement caténaire dans la proposition **1.1.4**. Les schémas locaux henséliens jouissent également de bonnes propriétés de caténarité.

Proposition 1.3.1. — *Tout schéma local hensélien caténaire est universellement caténaire.*

Démonstration. — Soit $S = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma local hensélien caténaire, soit P un idéal premier de A, soit L une extension finie de $\mathrm{Frac}(A/P)$ et soit B une extension finie de A/P contenue dans L. D'après le théorème **1.2.2**, il suffit de prouver que la dimension du localisé de B en chacun de ses idéaux maximaux est égale à la dimension de A/P. Toute algèbre finie sur un anneau hensélien est semi-locale d'après [**ÉGA** IV$_4$ 18.5] et [**ÉGA** IV$_4$ 18.6]. Comme le schéma B est intègre, il est local. Le théorème du « going-up » ([**Mat86**] 9.3 et 9.4) montre qu'on a bien $\dim(B) = \dim(A/P)$.

Rappelons également le résultat suivant, démontré dans le théorème **??** de l'exposé I.

Proposition 1.3.2. — *Tout schéma local hensélien quasi-excellent est universellement caténaire.*

Ainsi, tout schéma local hensélien quasi-excellent est excellent.

2. Spécialisations immédiates et fonctions de dimension

2.1. Définitions. — Soit X un schéma. Pour tout point x de X et tout point géométrique $\bar{x}$ au-dessus de x, on note $X_{(x)}$, $X^{\mathrm{h}}_{(x)}$ et $\widehat{X}_{(x)}$ le localisé, l'hensélisé et le complété de X en x. De même, l'on note $X_{(\bar{x})}$ l'hensélisé strict de X en $\bar{x}$. Soient x et y deux points de X, et $\bar{x}$ et $\bar{y}$ deux points géométrique au dessus de x et y.

Définition 2.1.1 (**[SGA 4 VII 7.2]**). — Un morphisme de spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est la donnée d'un X-morphisme $X_{(\bar{x})} \to X_{(\bar{y})}$ entre hensélisés stricts.

D'après [**SGA 4** VII 7.4], la donné d'une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est équivalente à la donnée d'un X-morphisme $\bar{x} \to X_{(\bar{y})}$.

Définition 2.1.2. — Soit $r \in \mathbf{N}$. On dit qu'une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ est une *spécialisation de codimension* r si l'adhérence de l'image de $\bar{x}$ dans $X_{(\bar{y})}$ est un schéma de dimension r.
On dit que y est une *spécialisation étale immédiate* de x s'il existe une spécialisation $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{y}$ qui soit de codimension 1.
On dit que y est une *spécialisation Zariski immédiate* de x si $y \in \overline{\{x\}}$ et si le localisé en y de l'adhérence de x est de dimension 1.

Si y est une spécialisation étale immédiate de x, on dit également que x est une *générisation étale immédiate* de y. Désignons par $f : X_{(\bar{y})} \to X_{(y)}$ le morphisme d'hensélisation strict. Les générisations étales immédiates de y sont alors les images par f des points $x' \in X_{(\bar{y})}$ tels que $\dim \overline{\{x'\}} = 1$. En particulier, toute spécialisation Zariski immédiate est une spécialisation étale immédiate. La réciproque de cet énoncé est fausse, et l'on se réfèrera à la proposition **2.6.1** pour un contre-exemple. On donne à présent une autre caractérisation des spécialisations étales immédiates.

Proposition 2.1.3. — *Le point y est une spécialisation étale immédiate de x si $y \in \overline{\{x\}}$ et si le localisé strict en un point géométrique au-dessus de y de l'adhérence de x possède une composante irréductible de dimension 1.*

Démonstration. — Soit $x' \in X_{(\bar{y})}$ tel que $\dim \overline{\{x'\}} = 1$. Notons $x = f(x')$, qui est une générisation de y. Il faut vérifier que x' est le point générique d'une composante irréductible de

$$\overline{\{x\}}_{(\bar{y})} \;=\; f^{-1}(\overline{\{x\}})\,.$$

Soit $x'' \in \overline{\{x\}}_{(\bar{y})}$ un point générique se spécialisant sur x'. Comme les fibres de f sont discrètes, l'égalité $f(x'') = x$ implique $x'' = x'$. Soit inversement un point x de X qui vérifie les hypothèses du lemme. Notons x' le point générique d'une composante de dimension 1 de $\overline{\{x\}}_{(\bar{y})}$. Comme le morphisme f est plat, on a bien $f(x') = x$.

Supposons que le schéma X soit quasi-excellent. On peut alors lire les spécialisation étales d'un point x de X dans le complété de X en x.

Proposition 2.1.4. — *Soit y une spécialisation de x. Notons $c : \widehat{X}_{(y)} \to X_{(y)}$ le morphisme de complétion. Le point y est une spécialisation étale immédiate de x si et seulement si l'adhérence de $c^{-1}(x)$ possède une composante irréductible de dimension* 1.

Démonstration. — On peut supposer que $X = \overline{\{x\}}$. Le morphisme $X_{(\bar{y})} \to X^{\mathrm{h}}_{(y)}$ est fidèlement plat et entier. Ainsi, l'hensélisé strict de X en $\bar{y}$ possède un point maximal dont l'adhérence est de dimension 1 si et seulement si l'hensélisé de X en y possède un point maximal dont l'adhérence est de dimension 1. Comme $X^{\mathrm{h}}_{(y)}$ est hensélien et quasi-excellent, il est formellement caténaire d'après la proposition **1.3.2** et le théorème **1.2.2**. Il en résulte que le schéma $X^{\mathrm{h}}_{(y)}$ possède un point maximal de dimension 1 si et seulement si le schéma $\widehat{X}_{(y)}$ possède un point maximal de dimension 1. On conclut la démonstration en remarquant que comme c est plat, tout point maximal de dimension 1 de $\widehat{X}_{(y)}$ s'envoie sur x, qui est le point générique de X.

Dans le cas où X est universellement caténaire, on dispose du résultat suivant.

Proposition 2.1.5. — *Soit X un schéma universellement caténaire. Toute spécialisation étale immédiate entre deux points de X est une spécialisation Zariski immédiate.*

Démonstration. — Soit $x \rightsquigarrow y$ une spécialisation étale immédiate entre deux points de X. Pour démontrer le lemme, on peut supposer $\overline{\{x\}} = X$. Il faut alors montrer que $X_{(y)}$ est de dimension 1. Ce schéma est universellement caténaire par stabilité de cette notion par immersion fermée et localisation. Le schéma $X_{(y)}$ est donc formellement équidimensionnel d'après le théorème **1.2.2**. Par hypothèse, le schéma $X_{(\bar{y})}$ possède une composante de dimension 1. Comme le morphisme

$$X_{(\bar{y})} \;\longrightarrow\; X^{\mathrm{h}}_{(y)}$$

est entier et plat, $X^{\mathrm{h}}_{(y)}$ possède également une composante irréductible de dimension 1. Comme le morphisme

$$\widehat{X}_{(y)} \longrightarrow X^{\mathrm{h}}_{(y)}$$

est fidèlement plat, $\widehat{X}_{(y)}$ possède une composante irréductible de dimension 1. Ce dernier schéma étant équidimensionnel, il est de dimension 1. Il en est donc de même pour $X_{(y)}$.

Définition 2.1. — On appelle *fonction de dimension* sur X toute fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ telle que pour toute spécialisation étale immédiate $x \rightsquigarrow y$ entre points de X, on ait

$$\delta(y) = \delta(x) - 1.$$

La notion de fonction de dimension est topologique : δ est une fonction de dimension sur X si et seulement si elle induit une fonction de dimension sur le sous-schéma réduit X^{red}. De plus si $U \overset{i}{\hookrightarrow} X$ est un ouvert étale de X et δ est une fonction de dimension sur X, $\delta \circ i$ définit une fonction de dimension sur U. L'ensemble des fonctions de dimension définit donc un faisceau étale sur X. La différence entre deux fonctions de dimension sur X est une fonction invariante par spécialisations quelconques, donc une fonction localement constante. Nous montrerons plus loin que si X est quasi-excellent, des fonctions de dimension existent localement pour la topologie étale sur X et que les fonctions de dimension forment un $\mathbf{Z}$-torseur étale.

2.2. Fonctions de dimension et universelle caténarité. — Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

***Théorème 2.2.1* (Gabber).** — *Un schéma nœthérien est universellement caténaire si et seulement s'il possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

Le théorème résulte de la conjonction du corollaire **2.2.4** et de la proposition **2.2.6** ci-dessous.

Proposition 2.2.2. — *Soit X un schéma intègre universellement caténaire. La fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension sur X.*

Démonstration. — Comme X est universellement caténaire, il suffit de montrer que $\delta(y) = \delta(x) - 1$ pour toute spécialisation Zariski immédiate $x \rightsquigarrow y$. Comme X est caténaire intègre, on a

$$\dim(\mathscr{O}_{X,y}) = \dim(\mathscr{O}_{X,x}) + \dim(\mathscr{O}_{\overline{\{y\}},x}) = \dim(\mathscr{O}_{X,x}) + 1\,.$$

Remarque 2.2.3. — Si X n'est pas supposé intègre, la fonction $\delta(x) = -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ n'est pas une fonction de dimension comme le montre l'exemple où X est obtenu par recollement en un point d'une droite et d'un plan.

Corollaire 2.2.4. — *Tout schéma universellement caténaire admet des fonctions de dimension localement pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. — Soit X un schéma universellement caténaire. On peut le supposer réduit. Il est donc réunion de ses composantes irréductibles $X_1, ..., X_n$. Quitte à remplacer X par l'ouvert complémentaire des composantes X_i ne contenant pas x, on peut supposer que x appartient à toutes les composantes X_i. Pour tout $0 \leq i \leq n$, notons $\mathcal{F}_i$ l'ensemble des fonctions de dimension sur X_i. D'après la proposition **2.2.2**, cet ensemble est non vide et est un torseur sous $\mathbf{Z}$. On choisit un élément $\delta_i \in \mathcal{F}_i$ qui vaut 0 sur le point x. Pour tous $1 \leq i,\ j \leq n$, la fonction $\delta_i - \delta_j$ est localement constante sur $X_i \cap X_j$ et vaut 0 au point x. Soit $F_{i,j}$ le fermé de X, réunion des composantes connexes de $X_i \cap X_j$ ne contenant pas x. Soit U le complémentaire dans X de la réunion des $F_{i,j}$. Les fonctions δ_i se recollent en une fonction de dimension sur U.

Démontrons une réciproque partielle du corollaire **2.2.4**.

Lemme 2.2.5. — *Un schéma nœthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est caténaire.*

Démonstration. — Soit S un tel schéma. On peut supposer qu'il est intègre et admet une fonction de dimension δ. Soient $X \subset Y \subset Z$ des fermés intègres de S, de points génériques respectifs x, y et z. On peut trouver une chaîne de spécialisations Zariski immédiates contenant x, y et z. Par définition d'une fonction de dimension, on a

$$\begin{aligned} \delta(z) - \delta(y) &= \dim(Z/Y)\,, \\ \delta(y) - \delta(x) &= \dim(Y/X)\,, \\ \delta(z) - \delta(x) &= \dim(Z/X)\,. \end{aligned}$$

On en déduit $\dim(Z/X) = \dim(Z/Y) + \dim(Y/X)$ d'où la caténarité.

Grâce au théorème **1.2.2**, on peut remplacer « caténaire » par « universellement caténaire » dans le lemme **2.2.5** :

Proposition 2.2.6. — *Un schéma nœthérien qui possède une fonction de dimension localement pour la topologie de Zariski est universellement caténaire.*

Démonstration. — On peut supposer qu'un tel schéma S est local et possède une fonction de dimension δ. Notons S^h son hensélisé au point fermé. La fonction δ induit une fonction de dimension δ^h sur S^h. D'après le lemme **2.2.5** appliqué à S^h et à δ^h, le schéma S^h est caténaire. D'après la proposition **1.3.1**, il est universellement caténaire. Le théorème **1.2.2** montre alors que S^h est formellement caténaire. Par conséquent, S est formellement caténaire donc également universellement caténaire.

2.3. Existence locale pour la topologie étale. — Dans ce paragraphe nous allons démontrer le théorème suivant.

***Théorème 2.3.1* (Gabber).** — *Tout schéma quasi-excellent possède des fonctions de dimension localement pour la topologie étale.*

L'argument donné lors de la démonstration du corollaire **2.2.4** permet de supposer que le schéma en question est intègre. Commençons par traiter le cas où il est de plus supposé normal.

Proposition 2.3.2. — *Soit X un schéma normal quasi-excellent. La fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = -\dim \mathscr{O}_{X,x}$ est une fonction de dimension.*

Démonstration. — Soit x un point de X et $\bar{x}$ un point géométrique au dessus de x. Le localisé strict $X_{(\bar{x})}$ est intègre car entier sur un schéma normal, et est excellent d'après la proposition **1.3.2**. D'après la proposition **2.2.2**, la fonction $\delta' : X_{(\bar{x})} \to \mathbf{Z}$ qui associe à y l'opposé de sa codimension est une fonction de dimension. Soit $h : X_{(\bar{x})} \to X$ le morphisme d'hensélisation strict. Comme il est plat et ses fibres sont discrètes, on a la la relation $\delta(h(y)) = \delta'(y)$ pour tout $y \in X_{(\bar{x})}$. En particulier, on a bien $\delta(h(y)) = \delta(x) + 1$ pour tout $y \in X_{(\bar{x})}$ dont l'adhérence est de dimension 1.

Revenons au cas où X est supposé intègre et quasi-excellent, et notons Y son normalisé. Le morphisme $p : Y \to X$ est fini et surjectif, donc de descente cohomologique universelle. Notons δ une fonction de dimension sur Y ; son existence est assurée par la proposition précédente. Soit p_1 et p_2 les deux projections $Y \times_X Y \to Y$. La fonction

$$p_1^\star \delta - p_2^\star \delta \;:\; Y \times_X Y \;\longrightarrow\; \mathbf{Z}$$

définie un 1-cocycle de Cech, donc une classe $[\delta]$ dans $\mathrm{H}^1_{Cech}(Y \to X, \mathbf{Z})$. D'après la théorie de la descente cohomologique, il existe une injection naturelle

$$\mathrm{H}^1_{Cech}(Y \to X, \mathbf{Z}) \;\hookrightarrow\; \mathrm{H}^1(X, \mathbf{Z})\,.$$

La classe $[\delta]$ définit donc une classe d'isomorphisme de $\mathbf{Z}$-torseurs étales sur X.

Proposition 2.3.3. — *Soit U un schéma étale sur X. L'annulation de la classe $[\delta]|_U$ dans $\mathrm{H}^1(U, \mathbf{Z})$ entraîne l'existence d'une fonction de dimension sur U.*

Démonstration. — L'annulation de $[\delta]|_U$ dans $\mathrm{H}^1_{Cech}(Y_U \to U, \mathbf{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(U, \mathbf{Z})$ signifie que la fonction $\delta_U : Y \times_X U \to \mathbf{Z}$ est constante le long des fibres du morphisme $f : Y \times_X U \to U$. La fonction δ_U se descend donc en une fonction $\delta' : U \to \mathbf{Z}$. Comme cette construction est fonctorielle en U, pour vérifier que δ' est une fonction de dimension sur U, on peut travailler localement et supposer U strictement local. Considérons une spécialisation Zariski immédiate $s \rightsquigarrow t$ dans U. Comme le morphisme f est fini, il existe une spécialisation Zariski immédiate $s' \rightsquigarrow t'$ dans Y_U dont l'image par f est $s \rightsquigarrow t$. On en déduit que $\delta'(s) - \delta'(t) = \delta(s') - \delta(t') = -1$. On conclut en remarquant que U est universellement caténaire par la proposition **1.3.2**, et en utilisant la proposition **2.1.5**.

2.4. Existence globale de fonctions de dimension. — Suivant [**ÉGA** 0_{I} 14.2.1], on dit qu'un espace topologique X est *équicodimensionnel* si toutes les parties irréductibles minimales Y de X ont même codimension, où la codimension est l'entier $\dim(X/Y)$ défini au début du texte.

Exemple 2.4.1. — Les schémas de type fini sur un corps k ou sur $\mathbf{Z}$ sont équicodimensionnels : les parties fermées irréductibles minimales sont les points fermés, et il est classique que dans cette situation, on a $\dim(X) = \dim(\mathscr{O}_{X,x})$ pour tout point fermé x. Les schémas locaux sont équicodimensionnels car ils possèdent un unique fermé minimal. Si $S = \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ est un trait d'uniformisante π, le schéma $\mathbb{A}^1_S$ n'est pas équicodimensionnel. En effet, il existe un point fermé de $\mathbb{A}^1_S$ au-dessus du point générique de S : il suffit d'écrire $\mathbb{A}^1_S = \mathrm{Spec}(R[t])$ et de considérer $\mathfrak{m} = (\pi t - 1)$, qui est un idéal maximal de corps résiduel $\mathrm{Frac}(R)$.

Le lemme suivant est inspiré de [**ÉGA** 0_{I} 14.3.3] [(i)].

Lemme 2.4.2. — *Soit X un schéma équidimensionnel caténaire dont les les composantes irréductibles sont équicodimensionnelles. Pour tout $x \in X$, on a*

$$\dim(X) \;=\; \dim\left(\overline{\{x\}}\right) + \dim(\mathscr{O}_{X,x})\,.$$

Remarque 2.4.3. — En particulier, cette égalité est vérifiée pour tout schéma intègre local caténaire. D'après [**Mat86**, th. 31.4], si X est intègre local nœthérienet si pour tout $x \in X$, on a $\dim(X) = \dim(\overline{\{x\}}) + \dim(\mathscr{O}_{X,x})$, alors X est caténaire.

Le lemme **2.4.2** et la proposition **2.2.2** impliquent le résultat suivant.

Corollaire 2.4.4. — *Soit X un schéma intègre, équicodimensionnel et universellement caténaire. La fonction $\delta : X \to \mathbf{Z}$ définie par $\delta(x) = \dim(\overline{\{x\}})$ est une fonction de dimension sur X.*

Les conclusions du corollaire sont prises en défaut si X n'est pas équicodimensionnel. Soient par exemple $S = \mathrm{Spec}(R)$ un trait d'uniformisante π et $X = \mathbb{A}^1_S = \mathrm{Spec}(R[t])$. Si l'on note x le point fermé de X correspondant à l'idéal maximal $(\pi t - 1)$ et η le point générique de $\mathbb{A}^1_S$, alors la spécialisation $\eta \rightsquigarrow x$ est immédiate et pourtant $\dim \overline{\{x\}} = 0$ et $\dim \overline{\{\eta\}} = 2$.

Corollaire 2.4.5. — *Soit X un schéma qui est soit de type fini sur un corps, soit de type fini sur $\mathbf{Z}$, ou soit local universellement caténaire. La fonction définie par $\delta(x) = \dim(\overline{\{x\}})$ est une fonction de dimension sur X.*

Démonstration. — Le schéma X est universellement caténaire. D'après le corollaire **2.4.4**, la fonction δ est une fonction de dimension sur chaque composante irréductible de X. Cette fonction est définie globalement donc est une fonction de dimension sur X.

[(i)] Gabber remarque que la proposition [**ÉGA** 0_{I} 14.3.3] est fausse. Les assertions a, c et d de *loc. cit.* sont équivalentes entre elles et impliquent b mais ne lui sont pas équivalentes. Il faut remplacer b par la condition « X est caténaire équidimensionnel et ses composantes irréductibles sont équicodimensionnelles ». Gabber donne comme contre-exemple le spectre du localisé de $k[x,y,z,w]/(xz,xw)$ en le complémentaire de l'union des idéaux premiers $(x-1,y)$ et (x,z,w) avec k un corps.

2.5. Fonction de dimension induite. — Soient $Y \to X$ un morphisme de schémas et δ_X une fonction de dimension sur X. Dans certains cas nous pouvons construire une fonction de dimension δ_Y induite sur Y. On admet la proposition suivante.

Proposition 2.5.1 **([Mat80], 14.C)**. — *Soient X un schéma nœthérien intègre universellement caténaire, Y un schéma intègre et $Y \to X$ un morphisme de type fini. Soient $k(X)$ et $k(Y)$ les corps de fractions respectifs de X et Y, soient y un point de Y et x son image dans X, et soient $k(y)$ et $k(x)$ leurs corps résiduels. On a*

$$\dim(\mathscr{O}_{Y,\,y}) \;-\; \operatorname{degtr}(k(Y)/k(X)) \;=\; \dim(\mathscr{O}_{X,\,x}) \;-\; \operatorname{degtr}(k(y)/k(x))\;.$$

Corollaire 2.5.2. — *Soient X un schéma nœthérien qui possède une fonction de dimension δ_X et $f : Y \to X$ un morphisme de type fini. La fonction $\delta_Y : Y \to \mathbf{Z}$ définie par*

$$\delta_Y(y) \;=\; \delta_X(f(y)) \;+\; \operatorname{degtr}(k(f(y))/k(y))$$

est une fonction de dimension sur Y.

Démonstration. — On peut supposer X local intègre. D'après la proposition **2.2.6**, X est universellement caténaire et d'après la proposition **2.2.2**, $x \mapsto -\dim(\mathscr{O}_{X,x})$ est une fonction de dimension sur X. Comme les fonctions de dimension forment un $\mathbf{Z}$-torseur, on peut supposer que

$$\delta_X(x) \;=\; -\dim(\mathscr{O}_{X,x})\,.$$

Le corollaire **2.5.1** montre que $\delta_Y(y) = -\dim(\mathscr{O}_{Y,y}) + \operatorname{degtr}(k(Y)/k(X))$ et la proposition **2.2.2** montre que $y \mapsto -\dim(\mathscr{O}_{Y,y})$ est une fonction de dimension sur Y. Ainsi, δ_Y est une fonction de dimension sur Y.

Avant d'établir la fonctorialité des fonctions de dimension vis-à-vis des morphismes réguliers entre schémas excellents, démontrons un énoncé de changement de base par un morphisme régulier en cohomologie étale. Ce lemme est une simple reformulation du théorème de Popescu ?? et du théorème de changement de base par un morphisme lisse [**SGA 4** XVI 1.2].

Lemme 2.5.3. — *Soient*

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & T \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien de schémas, n un entier inversible sur S et $\mathscr{F}$ un faisceau étale en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-modules sur T. Supposons le morphisme g régulier. La flèche naturelle de changement de base

$$g^*\,\mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{R}f'_*\,(g')^*(\mathscr{F})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après le théorème de Popescu, il existe un ensemble ordonné filtrant I et une famille de schémas S_i indexée par I, tels que S_i soit lisse sur S pour tout $i \in I$ et que $S' = \operatorname{colim} S_i$. Il existe donc pour tout $i \in I$ un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "h'_i"] \arrow[d, "f'"] & T_i \arrow[r, "g'_i"] \arrow[d, "f_i"] & T \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "h_i"] & S_i \arrow[r, "g_i"] & S \end{tikzcd}$$

On conclut grâce à la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathrm{R}f'_*\,(g')^*(\mathscr{F}) \;&\xleftarrow{\sim}\; \lim_i h_i^*\,\mathrm{R}(f_i)_*\,(g'_i)^*(\mathscr{F}) \\ &\xleftarrow{\sim}\; \lim_i g^*\,\mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) \\ &\xleftarrow{\sim}\; g^*\,\mathrm{R}f_*(\mathscr{F}) \end{aligned}$$

Le premier de ces isomorphismes résulte du théorème de passage à la limite [**SGA 4** VII 5.11], et le second du théorème de changement de base par le morphisme lisse g_i [**SGA 4** XVI 1.2].

Nous prouvons à présent qu'un morphisme régulier entre schémas excellents permet d'induire des fonctions de dimension.

Proposition 2.5.4. — *Soient $f : Y \to X$ un morphisme régulier entre schémas excellent et δ_X une fonction de dimension sur X. La fonction $\delta_Y : Y \to \mathbf{Z}$ définie par*

$$\delta_Y(y) \;=\; \delta_X(f(y)) \;-\; \dim\left(\mathscr{O}_{Y_{f(y)},\,y}\right)$$

est une fonction de dimension sur Y.

Démonstration. — Comme la vérification est locale, il n'y a pas de mal à supposer X et Y strictement locaux et f local. Soit δ une fonction de dimension sur Y ; son existence est assurée par le théorème **2.2.1**. Il suffit de montrer que $\delta_Y - \delta$ est une fonction constante sur Y. Les fibres de f sont régulières donc universellement caténaires d'après **1.1.2**. La proposition **2.2.2** montre que la fonction qui à $y \in Y$ associe

$$-\dim\left(\mathscr{O}_{Y_{f(y)},\,y}\right)$$

induit une fonction de dimension sur chacune des fibres de f. La fonction $\delta_Y - \delta$ est donc localement constante sur chaque fibre de f. Il résulte du lemme **2.5.3** que ces fibres sont connexes : en effet, on a $\mathrm{H}^0(f^{-1}(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathrm{H}^0(x, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour tout $x \in X$ et tout entier n inversible sur X. La fonction $\delta_Y - \delta$ est donc constante sur les fibres de f et descend à X. Il suffit de montrer que $\delta_Y - \delta$ est localement constante sur X. Soit $s' \rightsquigarrow s$ une spécialisation Zariski immédiate entre deux points de X. Notons S le localisé en s de l'adhérence de $\{s'\}$ et $\tilde{S} \to S$ le morphisme de normalisation, qui est fini car S est quasi-excellent. D'après le corollaire **2.5.2**, δ_X induit une fonction de dimension $\delta_{\tilde{S}}$ sur $\tilde{S}$. De même, δ induit une fonction de dimension $\delta_{Y\times\tilde{S}}$ sur $Y \times_X \tilde{S}$. Le schéma $\tilde{S}$ est régulier car normal de dimension 1. Comme f est régulier, le schéma $Y \times_X \tilde{S}$ est également régulier. D'après la proposition **2.2.2**, il existe des entiers $c, c' \in \mathbf{Z}$ tels que $\delta_{Y\times_X\tilde{S}}\,(y) \;=\; -\dim \mathscr{O}_{Y\times_X\tilde{S},y} \;+\; c$ pour tout $y \in Y \times_X \tilde{S}$ et $\delta_{\tilde{S}}(t) \;=\; -\dim \mathscr{O}_{\tilde{S},t} \;+\; c'$ pour tout $t \in \tilde{S}$. Comme f est plat, on dispose de la formule

$$\dim \mathscr{O}_{Y\times_X\tilde{S},\,y} \;=\; \dim \mathscr{O}_{\tilde{S},\,f(y)} \;+\; \dim \mathscr{O}_{Y_{f(y)},\,y}$$

pour tout $y \in Y \times_X \tilde{S}$. Cela suffit à montrer que $\delta_Y - \delta$ est localement constante sur X.

2.6. Contre-exemple. — Rappelons l'exemple de [**ÉGA** II 5.6.11] d'un schéma caténaire non universellement caténaire. Soient k_0 un corps et k une extension purement transcendante de k_0 de degré de transcendance infini. Notons $S = k[X]_{(X)}$ le localisé de l'anneau de la droite affine sur k en l'origine et $V = S[T]$. Les idéaux maximaux $\mathfrak{m} = (X,T)$ et $\mathfrak{m}' = (XT-1)$ de V sont respectivement de hauteur 2 et 1, et il existe un isomorphisme $\phi \;:\; V/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} V/\mathfrak{m}'$. Posons $C = \{\, v \in V \mid \phi(\, v \bmod \mathfrak{m}'\,) = v \bmod \mathfrak{m}\,\}$. C'est un sous-anneau de V qui n'est pas de type fini sur k et dont le spectre est le quotient de $\mathrm{Spec}(V)$ par la relation d'équivalence identifiant $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$. Il est intègre et contient l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ image réciproque de $\mathfrak{m}$.

Proposition 2.6.1. — *Le schéma* $\mathrm{Spec}(C)$ *est nœthérien, quasi-excellent, caténaire mais non universellement caténaire. Le point fermé correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de C est une spécialisation étale immédiate mais non Zariski immédiate du point générique de* $\mathrm{Spec}(C)$.

Démonstration. — Le caractère nœthérien est montré dans [**ÉGA** II 5.6.11] et le caractère quasi-excellent dans [**ÉGA** II 7.8.4]. Le schéma $\mathrm{Spec}(C)$ est caténaire d'après le corollaire **1.2.3** car il est de dimension 2. On montre qu'il n'est pas universellement caténaire en vérifiant que la dernière condition du théorème **1.2.2** est prise en défaut. En effet, le morphisme

$$\mathrm{Spec}(V_{(\mathfrak{n})}) \to \mathrm{Spec}(C_{(\mathfrak{n})})$$

est fini et la fibre du point fermé correspondant à $\mathfrak{n}$ est constituée des points fermés correspondants à $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$, qui sont de hauteur respective 1 et 2. Le schéma $\mathrm{Spec}(C)$ est intègre de dimension 2 donc $\mathfrak{n}$ n'est pas une spécialisation Zariski immédiate du point générique.

Références

[Mat80] H. Matsumura – *Commutative algebra, second edition*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1980.

[Mat86] H. Matsumura – *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

Vincent Pilloni et Benoît Stroh