Formes compagnons et complexe BGG dual pour GSp_4

J. Tilouine

16 août 2010

Abstract : We show, under certain assumptions, a result towards the Serre conjecture for GSp_4 as formulated in [14] : if the residual representation associated to a genus two cusp form of p-small weight, p-ordinary of prime-to-p level, leaves stable two distinct lines (instead of one) in a lagrangian plane, then this form admits a companion form of prescribed weight. Our proof produces only a p-adic eigenform. It consists in translating, thanks to Faltings' mod.p comparison theorem, the existence of the companion form into that of a solution of a differential equation provided by the dual BGG complex on the Siegel variety. The main limitation of the method is that of Fontaine-Laffaille theory. On the other hand, it should apply to other groups admitting PEL Shimura varieties.

Résumé : On montre, sous certaines hypotèses, un résultat en direction de la conjecture de Serre pour GSp_4 formulée dans [14] : si la représentation résiduelle associée à une forme de Siegel de genre 2, de niveau premier à p, p-ordinaire de poids p-petit, laisse stables deux droites (au lieu d'une) dans un plan lagrangien, alors cette forme possède une forme compagnon de poids prescrit. Nous obtenons seulement une forme compagnon p-adique. Notre méthode consiste à traduire, grâce au théorème de comparaison mod. p de Faltings, l'existence de la forme compagnon en celle d'une solution à une équation différentielle fournie par le complexe BGG dual sur la variété de Siegel. La limitation principale de cette méthode est celle de la théorie de Fontaine-Laffaille. Par contre, elle semble généralisable à d'autres groupes admettant des variétés de Shimura PEL.

Table des matières

1 Introduction

Le but de cet article est d'établir, sous certaines hypothèses "génériques", un résultat en direction du Cas 1 d'une conjecture que nous avons formulée avec F. Herzig (Sect.5,[14]) sur l'existence d'une forme compagnon pour une forme cuspidale f pour $GSp_{4/\mathbb{Q}}$, ordinaire en p et de poids cohomologique

p-petit. Dans l'article [14], nous présentons une conjecture de type de Serre pour une représentation résiduelle $\overline{\rho} : \Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GSp_4(\overline{\mathbb{F}}_p)$, impaire irréductible, ordinaire en p ; cette conjecture prédit les poids de Serre de $\overline{\rho}$, sous l'hypothèse que la restriction au groupe d'inertie en p de cette représentation galoisienne résiduelle est décomposée. En appliquant cette conjecture à la représentation $\overline{\rho}_{f,p}$ associée à la forme f propre ordinaire en p et de poids cohomologique, on peut prédire tous les cas possibles d'existence de "formes compagnons" (voir Cor.4.14 et Sect.5 de [14]). Nous n'obtenons qu'une forme compagnon p-adique. Cependant, la méthode de démonstration que nous proposons ici semble applicable à d'autres cas que le Cas 1 (ce sont les Cas 2 et 3 de Sect.5 [14]). Des difficultés supplémentaires nous amènent à nous limiter au Cas 1 dans ce travail.

Le théorème principal de cet article est le Théorème 1 Section 5. Notre méthode est basée sur l'existence d'un quasi-isomorphisme naturel entre le complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand dual d'un fibré automorphe à connection (logarithmique), et son complexe de de Rham logarithmique sur les variétés de Siegel. Il est dû à Faltings-Chai en caractéristique zéro, et est généralisé dans [21] à la situation arithmétique sur $\mathbb{Z}_p$ pour un premier p de bonne réduction, si le poids du fibré est p-petit. Nous traduisons la condition de décomposabilité (appelée Cas 1 dans le texte) de $\overline{\rho}_f$ en termes de stabilité par le Frobenius cristallin de certains sous-quotients de la filtration de Hodge pour le ϕ-module filtré de Fontaine-Laffaille $\overline{M}_f$ associé à f. Cette stabilité permet, en exploitant le caractère affine du lieu ordinaire de la variété de Siegel, de résoudre, sur le lieu ordinaire, une équation différentielle donnée par le complexe BGG dual, et de trouver ainsi la "fausse" forme compagnon $\overline{g}_1$ prédite dans le Cas 1. Nous disons fausse, car elle n'est définie *a priori* que sur le lieu ordinaire de la variété de Siegel modulo p et n'est a priori ordinaire que pour le second opérateur de Hecke en p $U_{p,2}$ (associé à la matrice $\mathrm{diag}(1, p, p, p^2)$) ; nous formons alors le produit $\overline{g}_2 = H\overline{g}_1$ de $\overline{g}_1$ par l'invariant de Hasse scalaire H. $(k + p - 1, 4 - \ell + p - 1)$ voulu, et est valeur propre généralisée de Hecke, mais elle n'est toujours pas classique, car $\overline{g}_1$ possède nécessairement un pôle d'ordre au moins deux le long du diviseur non-ordinaire. Cependant, on peut remplacer $\overline{g}_2$ par une forme propre $\overline{g}_3$ pour ce système de valeurs propres. On peut alors relever ce système de valeurs propres en un système de valeurs propres en caractérique zéro ordinaire pour $U_{p,2}$ par un lemme du type Deligne-Serre ; un vecteur propre g_3 pour ces valeurs propres fournit la forme compagnon cherchée. Si on savait que g_3 était également ordinaire pour $U_{p,1}$, on pourrait conclure par la théorie de Hida, que g_3 est en fait classique de poids $(k + (p - 1), 4 - \ell + p - 1)$, ce qui démontrerait complètement la conjecture du Cas 1.

Dans la dernière section, nous saisissons cette opportunité pour corriger plusieurs erreurs de [31] sur les applications du théorème de modularité d'anneaux universels des déformations (quasi-)ordinaires de poids de Hodge-Tate variables de représentations résiduelles $\overline{\rho}$ modulaires de poids cohomologiques. Ceci en vue d'applications à la modularité de certaines surfaces abéliennes.

En passant de GSp_4 à un groupe unitaire (par un cas connu du transfert de GSp_4 à GL_4 dû à Gan-Takeda), T. Gee et D. Geraghty [10] ont récemment obtenu un résultat beaucoup plus complet que le nôtre en direction de la conjecture de type de Serre de [14] pour GSp_4 (et des groupes unitaires) ; ils construisent, dans le cas modéré, toutes les formes dont l'existence est prédite par [14]) et montrent qu'elles sont ordinaires en p. Leur méthode de démonstration utilise un résultat de modularité de Clozel-Harris-Taylor, ainsi que la thèse de D. Geraghty et n'utilise ni le complexe BGG dual ni de considérations géométriques sur les variétés de Siegel.

Une partie de ce travail a été rédigée lors de séjours de l'auteur à Columbia University, au NCTS et à l'Academia Sinica (Taiwan), à Tokyo University, au Tata Institute of Fundamental Research (Mumbai) et à UCLA. Il a apprécié les excellentes conditions de travail qui règnent dans ces institutions et les remercie pour leur hospitalité.

L'auteur remercie aussi N. Fakhruddin, F. Herzig, H. Hida, A. Mokrane, V. Pilloni, D. Prasad, S. Rozensztajn, B. Stroh, E. Urban et X. Wan pour d'utiles discussions. Je remercie en particulier X. Wan pour m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure de cet article.

2 Notations

Soit (V, ψ) un $\mathbb{Z}$-module symplectique unimodulaire de rang 4, de base (e_1, e_2, e_3, e_4) avec $\psi(e_1, e_4) = \psi(e_2, e_3) = -1$ et $\psi(e_i, e_j) = 0$ si $i \leq j$ autres que $(1, 4)$ et $(2, 3)$. La matrice de ψ dans cette base est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $G = GSp_4(V, \psi) = \{X \in GL_4; {}^tXJX = \nu \cdot J\}$ le schéma en groupes sur $\mathbb{Z}$ des similitudes de (V, ψ). Le facteur de similitude ν définit un caractère $\nu : G \to \mathbb{G}_m$; son noyau est le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes Sp_4. La restriction de ν au centre Z de G est donnée par $z \mapsto z^2$.

Soit $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note $B = TN$, resp. $Q = MU$, $P = M_1U_1$ les décompositions de Levi standard du sous-groupe de Borel B de G stabilisateur du drapeau $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle$, du parabolique de Siegel Q stabilisateur du plan isotrope $\langle e_1, e_2 \rangle$, resp. du parabolique de Klingen P stabilisateur de la droite $\langle e_1 \rangle$. On a donc

$$T = \{t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \nu \cdot t_2^{-1}, \nu \cdot t_1^{-1}); t_1, t_2, \nu \in \mathbb{G}_m\}$$

$$N = \{\begin{pmatrix} 1 & x & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} \cap G$$

$$Q = \{\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}\} \cap G$$

$$M = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}; As^tDs = \nu \cdot 1_2\}$$

$$U = \{\begin{pmatrix} 1_2 & C \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}; Cs \text{ symetrique}\}$$

$$P = \{\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & A & * \\ 0 & 0 & \det A \cdot a^{-1} \end{pmatrix}; A \in GL_2\} \cap G$$

Notons que dans cette notation certaines étoiles (resp. certains zéros) représentent des matrices 1×2 ou 2×1. De même, avec ces notations, on a :

$$M_1 = \{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \cdot a^{-1} \end{pmatrix}; A \in GL_2\}$$

$$U_1 = \{\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1_2 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Soit $W_G = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de (G, T). Son action sur le groupe des caractères est donnée par $w \cdot \lambda(t) = \lambda(w^{-1}tw)$. Soit ρ la demi-somme des racines positives pour (G, B, T). On utilisera aussi l'action tordue de W_G sur $X^*(T)$ donnée en notation additive par : $w \bullet \lambda = w \cdot (\lambda + \rho) - \rho$.

Le groupe W_G est engendré par (les classes de) $s_0 = \begin{pmatrix} s & 0_2 \\ 0_2 & s \end{pmatrix}$ et $s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il admet la présentation :

$$W_G = \langle s_0, s_1; s_0^2, s_1^2, (s_0 s_1)^4 \rangle$$

Le groupe de Weyl W_M de M est engendré par s_0. Le système de représentants de Kostant de $W_M \backslash W_G$ n'est autre que l'ensemble des relèvements de longueur minimale dans W_G (ceci parce que $G = GSp_{2g}$ avec $g = 2$, voir [25] Sect.1.8) ; il est donné par $W^M = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ avec $w_0 = 1_4$, $w_1 = s_1$, $w_2 = s_1 s_0$, et $w_3 = s_1 s_0 s_1$; on a $\ell(w_i) = i$.

Soit $T' = T \cap Sp_4$; par restriction à T' et à Z, on décompose l'espace vectoriel $X^*(T)_{\mathbb{R}} = X^*(T) \otimes \mathbb{R}$ associé au groupe des caractères de T comme $X^*(T')_{\mathbb{R}} \times X^*(Z)_{\mathbb{R}}$. Soit (λ_1, λ_2) la base canonique de $X^*(T')$ donnée par $\lambda_i(t) = t_i$. On identifie $\lambda \in X^*(T)$ au triplet $(a, b; c)$ d'entiers tels que $a + b \equiv c \pmod 2$ tel que $\lambda|_{T'} = a\lambda_1 + b\lambda_2$ et $\lambda|_Z(z) = z^c$ Notons que l'élément w_2, resp. w_3, agit sur le plan euclidien $X^*(T')_{\mathbb{R}}$ en envoyant (λ_1, λ_2) sur $(-\lambda_2, \lambda_1)$, resp. sur $(-\lambda_2, -\lambda_1)$.

Soit $\widehat{G}$ le groupe réductif dual de G. Par définition de $(\widehat{G}, \widehat{T})$, une fois fixé l'épinglage standard de (G, B, T), le groupe W_G s'identifie canoniquement au groupe de Weyl $W_{\widehat{G}} = N_{\widehat{G}}(\widehat{T}))/\widehat{T}$ de $\widehat{G}$.

D'autre part, par l'isomorphisme spin : $\widehat{G} \cong G$, qui induit un isomorphisme de tores $\widehat{T} \cong T$, le groupe de Weyl $W_{\widehat{G}}$ est envoyé isomorphiquement sur $W_G = N_G(T)/T$. Le composé ι de ces deux isomorphismes induit la permutation des deux générateurs s_0 et s_1. Notons que ceci est compatible avec l'invariance de la présentation de W_G par échange de s_0 et s_1. Voir [21] 3.2 et [14], fin de la Section 2, pour les détails.

Ainsi, via ι, l'élément w_2 agit sur $X^*(T')_{\mathbb{R}}$ par $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_2, -\lambda_1)$, et w_3 agit par $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (-\lambda_1, \lambda_2)$.

3 Ordinarité et Conjecture de type de Serre

Soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, p un nombre premier impair. On note $\epsilon : \Gamma \to \mathbb{Z}_p^\times$ resp. $\omega : \Gamma \to \mathbb{F}_p^\times$, le caractère cyclotomique p-adique, resp. modulo p. Soit S un ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$ contenant p et ∞. On fixe un sous-groupe de décomposition $D_p \subset \Gamma$ et I_p son sous-groupe d'inertie. Soit κ un corps fini de caractéristique p.

Soit $\overline{\rho} : \Gamma \to GSp_4(\kappa)$ une représentation galoisienne, non ramifée hors de S et absolument irréductible. Supposons que $\overline{\rho}$ soit motiviquement impaire : pour une conjugaison complexe c, $\nu \circ \overline{\rho}(c) = -1$. Cette condition équivaut à chacune des deux conditions suivantes :

(i) les espaces propres de $\overline{\rho}(c)$ pour les valeurs propres 1 et -1 sont des plans totalement isotropes,

(ii)

$$\overline{\rho}(c) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la conjugaison ayant lieu dans GSp_4.

Rappelons que $\overline{\rho}$ est dite ordinaire en p s'il existe des entiers $i_0 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$ tels que

$$(\mathbf{GO}) \quad \overline{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{i_3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{i_2} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{i_1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{i_0} \end{pmatrix}$$

la conjugaison ayant lieu dans GL_4.

Après la torsion par une puissance de ω, on peut supposer que la suite croissante (i_j) des exposants est normalisée :

$(\mathbf{p-ON})$ $i_0 = 0$, $i_j \leq j(p-1)$ pour $j = 1, 2, 3$ et $i_3 = i_1 + i_2$.

En effet, c'est évident si $i_3 < p-1$ car les ω^{i_j} sont les valeurs propres d'une matrice symplectique ; en général, il résulte de ce que la conjugaison ci-dessus a lieu dans GSp_4. Dans une lettre à l'auteur D. Prasad [26] a montré que l'intersection d'un Borel de GL_4 avec GSp_4 est toujours connexe. On déduit de cet énoncé que l'on peut supposer que dans (GO), la matrice triangulaire supérieure est symplectique, et donc que $i_3 \equiv i_1 + i_2 \bmod . p-1$, ce qui entraîne qu'on peut supposer $i_3 = i_1 + i_2$.

Soit $X_1(T)$ l'ensemble des poids $\lambda = (a, b; c)$ p-restreints, c'est à dire tels que $0 \leq a - b < p$ et $0 \leq b < p$. Rappelons que les classes d'isomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles du groupe fini $G(\mathbb{F}_p)$ sont en bijection avec l'ensemble quotient $X_1(T)/\mathbb{Z}$ pour l'action de $r \in \mathbb{Z}$ par $(a, b; c) \mapsto (a, b; c + 2(p-1)r)$; on ne s'intéresse dans ce qui suit qu'au sous-ensemble $X_1(T)^{\mathrm{reg}}$ des poids p-restreints réguliers, c'est-à-dire tels qu'en outre $a - b \neq p - 1$ et $b \neq p-1$; on note F_λ la (classe d'une) représentation irréductible associée à un tel poids λ (voir [14] Prop.4.5). Soit $\overline{\rho}^\vee$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation contragrédiente de $\overline{\rho} \otimes_\kappa \overline{\mathbb{F}}_p$.

Introduisons la condition
$(\mathbf{p-FLD})$ La représentation $\overline{\rho}|_{D_p}$ est de Fontaine-Laffaille, à poids de Hodge-Tate deux à deux distincts dans $[0, p-2]$.

ou, de manière équivalente : la représentation $\overline{\rho}|_{D_p}$ est de Fontaine-Laffaille et est ordinaire d'exposants $i_0 = 0 < i_1 < i_2 < i_3 < p-1$ avec $i_1 + i_2 = i_3$.

On a fait dans [14] la

Conjecture 3.1 *(i) il existe une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation irréductible F_λ de $G(\mathbb{F}_p)$ pour un λ p-restreint régulier, telle qu'on ait une inclusion $\overline{\mathbb{F}}_p[\Gamma]$-linéaire*

$$\mathbf{CS}(\overline{\rho}, \lambda) \quad \overline{\rho}^\vee \subset H^3_{\mathrm{et}}(X^{(p)} \otimes \overline{\mathbb{Q}}, F_\lambda).$$

$X^{(p)}$ désigne ici la variété de Shimura pour G de niveau premier à p, définie sur $\mathbb{Q}$, et où l'on note encore F_λ le système local sur X associé à la représentation F_λ.

(ii) Sous l'hypothèse $(\mathbf{p-FLD})$, l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations F_λ possible contient F_{λ_0} pour $\lambda_0 = (i_2 - 2, i_1 - 1; i_3 - 3)$.

Les représentations F_λ de $G(\mathbb{F}_p)$ satisfaisant $\mathbf{CS}(\overline{\rho}, \lambda)$ (avec λ p-restreint régulier) sont appelées les poids de Serre réguliers de $\overline{\rho}$ (définition 4.2 [14]).

Formons le produit semi-direct $W_{(p-1)} = W_G \times (p-1)X^*(T)$ du groupe de Weyl par le réseau $(p-1)X^*(T)$; on le fait agir sur $X^*(T)$ par la formule $(w, y) \bullet \lambda = w \bullet \lambda + y$. On considère deux sous-ensembles $W^M_{(p-1)}$ et $W^M_{(p-1)}{}'$ du groupe $W_{(p-1)}$, donnés par $W^M_{(p-1)} = W^M \times (p-1)X^*(T)$ et $W^M_{(p-1)}{}' = (W_G - W^M) \times (p-1)X^*(T)$.

On a alors l'énoncé plus précis (voir Cor.4.15 de [14] pour la définition du terme "générique")) :

Conjecture 3.2 *(i) L'ensemble des poids de Serre réguliers est un sous-ensemble $\mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{I_p})$ d'un ensemble explicite, génériquement de cardinal vingt, noté $\mathcal{W}^?((i_j))$ qui ne dépend que de la suite (i_j).*

On a des partitions naturelles $\mathcal{W}^?((i_j)) = \mathcal{W}^?((i_j))_O \sqcup \mathcal{W}^?((i_j))_{NO}$ et $\mathcal{W}^?((i_j))_O = \mathcal{W}^?((i_j))_K \sqcup \mathcal{W}^?((i_j))_{NK}$ L'ensemble $\mathcal{W}^?((i_j))_O$ est génériquement d'ordre huit ; il est donné par les poids obtenus en formant l'intersection de l'orbite de λ_0 sous le groupe $W_{(p-1)}$ avec $X_1(T)^{\mathrm{reg}}$:

$$\mathcal{W}^?((i_j))_O = W_{(p-1)} \bullet \lambda_0 \cap X_1(T)^{\mathrm{reg}}$$

Il est lui même réunion disjointe de deux sous-ensembles génériquement d'ordre quatre :

$$\mathcal{W}^?((i_j))_K = W^M_{(p-1)} \bullet \lambda_0 \cap X_1(T)^{\mathrm{reg}}, \quad \mathcal{W}^?((i_j))_{NK} = W^M_{(p-1)} \bullet \lambda_0 \cap X_1(T)^{\mathrm{reg}}$$

Le sous-ensemble $\mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{I_p})$ dépend, en plus de la suite (i_j), de la forme de décomposabilité partielle que satisfait $\overline{\rho}|_{I_p}$. Si, par exemple, dans (**GO**), aucune étoile au-dessus de la diagonale n'est nulle, on conjecture que $\mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{I_p})$ est (génériquement) un singleton. Si par contre $\overline{\rho}|_{I_p}$ est totalement décomposée (ou de manière équivalente, si $\overline{\rho}|_{I_p}$ est totalement décomposée), on conjecture que $\mathcal{W}^?(\overline{\rho}|_{D_p}) = \mathcal{W}^?((i_j))$, qui est (génériquement) d'ordre vingt. La liste complète des éléments de $\mathcal{W}^?((i_j))$ est donnée au Cor.4.15 de [14]. Dans ce travail, nous ne nous occupons que des quatre premiers éléments, ceux du sous-ensemble $\mathcal{W}^?((i_j))_K = W^M_{(p-1)} \bullet \lambda_0 \cap X_1(T)^{\mathrm{reg}}$. Ils sont donnés par les poids

$$\lambda_0 = (a, b; c), \quad \lambda_1 = (a + p - 1, p - 3 - b; c),$$

$$\lambda_2 = (b + p - 2, p - 4 - a; c), \quad \lambda_3 = (p - 4 - b, p - 4 - a; c)$$

avec $a = i_1 - 1$, $b = i_2 - 2$ et $c = i_3 - 3$.

Dans la section suivante, on suppose que la première conjecture est satisfaite. Plus précisément, on suppose que la représentation $\overline{\rho}$ est donnée par une forme modulaire de Siegel cuspidale holomorphe de poids (k, ℓ) avec $k = a + 3 = i_1 + 2$ et $\ell = b + 3 = i_2 + 1$. Nous formulons alors des conditions de décomposabilité pour $\overline{\rho}|_{D_p}$ sous lesquelles on prédit l'existence d'un autre poids de Serre et d'une forme modulaire de Siegel cuspidale propre, correspondant à ce poids, c'est-à-dire dont la représentation galoisienne résiduelle est (à torsion près par une puissance de ω) égale à $\overline{\rho}$. Ceci représente un renforcement de la conjecture 2 dans ces cas, puisqu'on prédit l'existence de relèvements en caractéristique zéro des classes de cohomologie de de Rham (voir Cor.6.2 et 6.3 de [14] pour une discussion détaillée de ces questions de relèvement à la caractéristique zéro).

4 Décomposabilité et formes compagnons

Considérons une représentation cuspidale de $G(\mathbb{A})$ de poids cohomologique $k \geq \ell \geq 3$; fixons un nombre premier p et considérons la représentation galoisienne

$$\rho = \rho_{\pi,p} : \Gamma \to G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète fini et plat sur $\mathbb{Z}_p$ contenu dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ suffisamment grand pour que ρ soit définie dessus, c'est-à-dire qu'il existe un

$\mathcal{O}$-réseau L stable par ρ. Soit F le corps des fractions, soit ϖ un paramètre uniformisant de $\mathcal{O}$, $\kappa = \mathcal{O}/(\varpi)$ et soit $\overline{\rho} : \Gamma \to G(\kappa)$ la représentation de Γ sur $L/\varpi L$.

Si π est ordinaire en p ([15], [31]), on a par [34] :

$$\rho|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \epsilon^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \epsilon^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \epsilon^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\overline{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.1 *Selon chaque hypothèse de décomposabilité partielle de $\overline{\rho}|_{I_p}$ ci-dessous, on va introduire un twist par ω de la représentation globale $\overline{\rho}$. On pourrait procéder exactement de la même manière avec des twists par des puissances du caractère cyclotomique p-adique sous des hypothèses de décomposabilité analogues sur la représentation p-adique $\rho|_{I_p}$ (plus rarement satisfaites bien sûr). On aurait alors les mêmes conjectures excepté que pour définir les poids de Serre des formes compagnons, il n'y aurait plus besoin de faire agir le groupe d'isométries affines $W_{(p-1)}$ sur λ_0 mais tout simplement le groupe de Weyl vectoriel W_G (toujours par action tordue). La méthode de construction du présent travail fournirait aussi les formes compagnons p-adiques cherchées (avec les poids modulaires correspondants), mais ces formes seraient seulement des formes p-adiques surconvergentes, et pas des formes algébriques.*

Dans tout ce qui suit, on fait l'hypothèse que $k + \ell - 3 < p - 1$.

Comme dans [14] Cor.4.15 (voir la première ligne de chaque case du tableau), On répartit les poids $\lambda' = (a', b'; c')$ selon quatre p-alcôves C_i, $i = 0, 1, 2, 3$ de $X^*(T')_{\mathbb{R}}$.

Cas 1 :

Supposons qu'on ait

$$\overline{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On forme dans ce cas $\overline{\rho}_1 = \overline{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}$
On voit qu'après conjugaison par $s_0 = \iota(s_1)$, on a

$$(s_0 \cdot \overline{\rho}_1 \cdot s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-\ell+1} & 0 & * & * \\ 0 & \omega^{k-1} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{2-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $(k', \ell') = (k+p-1, 4-\ell+p-1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; notre conjecture prédit alors qu'il existe une représentation cuspidale π' dont la composante à l'infini est dans la série discrète de paramètre de Harish-Chandra $(k'-2, \ell'-1; k'+\ell'-3)$. et telle que

$$\overline{\rho}_{\pi',p} \cong \overline{\rho} \otimes \omega^{2-\ell}.$$

La représentation π' "correspond" au poids de Serre associé à $\lambda' = (k'-3, \ell'-3; k+\ell-6)$ situé dans l'alcôve C_3 (voir [14] Remarque 4.15 pour le fait que λ' peut exceptionnellement être sur le mur de l'alcôve C_3, ou même, près du mur mais dans une alcôve contigüe). Notons que l'existence de π' n'entraîne pas tout à fait que $F_{\lambda'} \in \mathcal{W}(\overline{\rho}|_{D_p}$; ce point est discuté au Corollaire 6.1 de [14].

Nous verrons dans le reste de l'article comment ceci peut être étudié sous certaines hypothèses.

Cas 2 :

$$\overline{\rho}|_{I_p} \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & * & 0 & * \\ 0 & \omega^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On forme dans ce cas
$\overline{\rho}_2 = \overline{\rho} \otimes \omega^{1-k}$. On voit qu'après conjugaison par $s_0 s_1 = \iota(s_1 s_0)$, on a

$$(s_0 s_1 \cdot \overline{\rho}_2 \cdot s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{\ell-k-1} & 0 & * & 0 \\ 0 & \omega^{\ell-2} & * & * \\ 0 & 0 & \omega^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $(k', \ell') = (\ell-1+p-1, 3-k+p-1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; la conjecture de Serre prédit alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de ce poids, avec poids de Serre associé à

$\lambda' = (k'-3, \ell'-3; k+\ell-6)$ situé, en général (voir remarque dans le Cas 1 ci-dessus), dans l'alcôve C_2, telle que

$$\overline{\rho}_{\pi',p} \cong \overline{\rho} \otimes \omega^{1-k}.$$

Cas 3 :

Supposons que

$$\overline{\rho}_p \sim \begin{pmatrix} \omega^{k+\ell-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{k-1} & * & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{\ell-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On forme dans ce cas $\overline{\rho}_3 = \overline{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}$. On voit qu'après conjugaison par $s_0 s_1 s_0 = \iota(s_1 s_0 s_1)$, on a

$$(s_0 s_1 s_0 \cdot \overline{\rho}_3 \cdot s_0 s_1 s_0)|_{I_p} = \begin{pmatrix} \omega^{3-k-\ell} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2-\ell} & * & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{1-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En posant $(k', \ell') = (3-\ell+p-1, 3-k+p-1)$, on obtient un poids cohomologique : $k' \geq \ell' \geq 3$; la conjecture de Serre prédit alors qu'il existe une représentation cuspidale π' de composante à l'infini de paramètre de Harish-Chandra $(k'-1, \ell'-2; k'+\ell'-3)$ telle que

$$\overline{\rho}_{\pi',p} \cong \overline{\rho} \otimes \omega^{3-k-\ell}.$$

Le poids de Serre correspondant est associé au poids $\lambda' = (k'-3, \ell'-3; k+\ell-6)$, situé (en général) dans l'alcôve C_1.

5 Le théorème principal

Le théorème ci-dessous est le résultat principal de ce travail ; il concerne le Cas 1. Soit f une forme de Siegel holomorphe cuspidale propre de poids cohomologique (k, ℓ) et de niveau N. Soit p un nombre premier ne divisant pas N et tel que $k+\ell-3 < p-1$. On fixe un plongement du corps des nombres algébriques complexes dans une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. Soit $F \subset \overline{\mathbb{Q}}_p$ un corps p-adique contenant les valeurs propres de f et sur lequel la représentation $\overline{\rho}_{f,p}$ est définie ; soit $\mathcal{O}$ son anneau de valuation. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$ et κ son corps résiduel.

Théorème 1 *Supposons que f soit p-ordinaire et que la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{f,p}$ satisfasse l'hypothèse de décomposabilité partielle du Cas 1. On suppose de plus*

1. *L'image de $\overline{\rho}_{f,p}$ contient $Sp_4(\kappa')$ pour un sous-corps κ' de κ,*
2. *$\overline{\rho}_{f,p}$ est bien ramifiée (au sens de [9] Définition 2.2.2) en chaque premier ℓ divisant N,*
3. *les racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ du polynôme de Hecke $P_p(X)$ de f en p sont telles que les réductions modulo ϖ des nombres α, $\frac{\beta}{p^{\ell-2}}$, $\frac{\gamma}{p^{k-1}}$, $\frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ sont deux à deux distinctes,*

alors, il existe une forme p-adique propre de poids $(k+p-1, 4-\ell+p-1)$ de niveau N, p-ordinaire et telle que

$$\overline{\rho}_{g,p} = \overline{\rho}_{f,p} \otimes \omega^{2-\ell}.$$

Commentaire : Si la classe ou la forme p-adique du théorème est ordinaire pour $U_{p,1}$, elle est classique par la théorie de Hida, et la conjecture de [14] est établie dans le Cas 1.

Les deux ingrédients-clé sont le théorème de comparaison étale-de Rham modulo p de Faltings, et le complexe filtré dit "de Bernstein-Gelfand-Gelfand dual" introduit par Faltings-Chai [6] et qui permet le calcul de la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham. La fin de la démonstration, concernant l'ordinarité, la classicité et le relèvement à la caractéristique zéro de la forme construite, repose sur la théorie de Fontaine-Laffaille.

6 Le complexe de Bernstein-Gelfand-Gelfand pour GSp_4

On conserve les notations de la Section 1. Soit de plus Φ^+, resp. Φ^-, l'ensemble des racines positives resp. négatives pour (G, B, T) ; on note de même $\Phi^\pm_M$ l'ensemble des racines positives ou négatives de M et $\Phi^{M\pm} = \Phi^\pm - \Phi^\pm_M$. L'ensemble des représentants de Kostant est alors donné par $W^M = \{w \in W; \Phi^- \cap w(\Phi^+) \subset \Phi^{M-}\}$.

Rappelons que l'on désigne par ρ la demi-somme des racines positives de (G, B, T) ; on a $\rho = 2\lambda_1 + \lambda_2$. Par [2] Lemma 9.8 p.47, pour tout $w \in W^M$, $w \bullet 0 = w \cdot \rho - \rho = \sum_{\gamma \in \Phi^- \cap w(\Phi^+)} \gamma$; pour $w = w_1$, w_2, resp. w_3, on a $\Phi^+ \cap w(\Phi^-) = \{\beta\}$,$\{\beta, \alpha+\beta\}$ resp. $\{\beta, \alpha+\beta, 2\alpha+\beta\}$.

Soit $\lambda = (a, b; c)$ dominant pour G ; on a donc $a \geq b \geq 0$. Pour $w \in W^M$, posons $w \bullet \lambda = \lambda - \gamma_w(\lambda)$; Pour $w = w_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\gamma_w(\lambda)$ est donné respectivement par $(b+1)\beta$, $(b+1)\beta+(a-b+1)(\alpha+\beta)$, $(b+1)\beta+(a-b+1)(\alpha+\beta)+(b+1)(2\alpha+\beta)$.

Noter que $-\gamma_w(0)=\sum_{\gamma\in\Phi^-\cap w(\Phi^+)}\gamma$.

Soit $\epsilon=\lambda_1+\lambda_2$; on note pour tout caractère γ de T', $|\gamma|=\langle\gamma,\epsilon\rangle$. Un poids λ dominant pour (G,B,T) est dit p-petit s'il satisfait la condition $|\lambda+\rho|=a+b+3<p-1$ (et, disons, $c=a+b$). Sous cette hypothèse, la $\mathbb{Z}_p$-représentation V_λ de G est bien définie ([25] 1.9 Corollary). Dans tout ce qui suit, on fixe un poids λ p-petit.

Soit $\mathbb{A}^1$ la droite affine sur $\mathbb{Z}_p$. Soit V_λ la $\mathbb{Z}_p$-représentation de plus haut poids λ définie par

$$V_\lambda=\mathrm{Ind}_B^G(\lambda)=\{f:G/N\to\mathbb{A}^1; f\text{ polynomiale et }f(gnt)=\lambda(t)^{-1}f(g)\}$$

avec l'action de G donnée par $(g\cdot f)(g')=f(g^{-1}g')$. Pour toute $\mathbb{Z}_p$-algèbre A, on note $V_\lambda(A)$ la représentation de $G(A)$ associée. Lorsque $A=\mathbb{Z}_p$, on écrira simplement V_λ au lieu de $V_\lambda(\mathbb{Z}_p)$. Par la théorie de la réduction modulo p des représentations entières de G de Jantzen [16] II.2, pour tout λ p-petit, $V_\lambda(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est encore irréductible. La contragrédiente $V_\lambda^\vee=\mathrm{Hom}(V_\lambda(\mathbb{Z}_p),\mathbb{Z}_p)$ est donnée par $V_{\lambda^\vee}$ où $\lambda^\vee=(a,b;-c)$ et est donc aussi de réduction modulo p irréductible. Pour des raisons qui apparaîtront dans la section suivante (quand on appliquera le foncteur de faisceautisation et dualisation aux représentations de G), on va se concentrer sur la duale $V_{\lambda^\vee}$ de V_λ.

Soit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{u}$ resp. $\mathfrak{u}^-$ l'algèbre de Lie de G, Q, U, resp. U^-. Soit $U\mathfrak{g}$, resp. $U\mathfrak{q}$ la $\mathbb{Z}_p$-algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{q}$; soit $Z\mathfrak{g}$ le centre de $U\mathfrak{g}$. Soit $\chi_{\lambda+\rho}$ le caractère par lequel $Z\mathfrak{g}$ agit sur la représentation géométriquement irréductible V_λ.

Il est également utile d'introduire l'algèbre des distributions $\mathcal{U}(G)$ de G resp. $\mathcal{U}(Q)$ de Q, sur $\mathbb{Z}_p$. On a $U\mathfrak{g}\subset\mathcal{U}(G)\subset U\mathfrak{g}\otimes\mathbb{Q}_p$. Les algèbres $U\mathfrak{g}$ et $\mathcal{U}(G)$ sont munies de filtrations naturelles croissantes $(U\mathfrak{g}_{\leq i})_i$ resp. $(\mathcal{U}(G)_{\leq i})_i$, et on a $U\mathfrak{g}_{\leq i}=\mathcal{U}(G)_{\leq i}$ pour tout $i<p$.

Rappelons ([8] Sect.1) que pour une représentation W de $U\mathfrak{q}$ et une représentation V de $U\mathfrak{g}$, on a un isomorphisme canonique de $U\mathfrak{g}$-modules :

$$(U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}W)\otimes_{\mathbb{Z}_p}V=U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}(V\otimes V|_{U\mathfrak{q}}).$$

Rappelons ([25] Sect.2.2) que la résolution de Koszul relative au parabolique de Siegel Q de $V_{\lambda^\vee}$ est donnée par :

$$0\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}(\bigwedge^3\mathfrak{g}/\mathfrak{q}\otimes V_{\lambda^\vee})\xrightarrow{d_3}U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}(\bigwedge^2\mathfrak{g}/\mathfrak{q}\otimes V_{\lambda^\vee})\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}\otimes V_{\lambda^\vee})\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}V_{\lambda^\vee}$$

où les flèches sont données par $d_1(1\otimes \overline{X}\otimes v)=X\otimes v-1\otimes Xv$,

$d_2(1\otimes\overline{X}_1\wedge\overline{X}_2\otimes v)=X_1\otimes\overline{X}_2\otimes v-X_2\otimes\overline{X}_1\otimes v-1\otimes\overline{X}_2\otimes X_1v+1\otimes\overline{X}_1\otimes X_2v$ et

$d_3(1\otimes\overline{X}_1\wedge\overline{X}_2\wedge\overline{X}_3\otimes v)=X_1\otimes\overline{X}_2\wedge\overline{X}_3\otimes v-X_2\otimes\overline{X}_1\wedge\overline{X}_3\otimes v+X_3\otimes\overline{X}_1\wedge\overline{X}_2\otimes v-1\otimes\overline{X}_2\wedge\overline{X}_3\otimes X_1v+1\otimes\overline{X}_1\wedge\overline{X}_3\otimes X_2v-1\otimes\overline{X}_1\wedge\overline{X}_2\otimes X_3v$.

où pour $\overline{X}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$, on note X un relèvement, qu'on peut en fait choisir (de façon unique) dans $\mathfrak{u}^-$. Notons que les formules ci-dessus sont plus simples que dans [25] 2.2 page 109 car l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}^-$ étant abélienne, tous les crochets de Poisson $[X_i,X_j]$ $(X_i,X_j\in\mathfrak{u}^-)$ sont nuls. On notera (KQ) cette résolution.

Il résulte du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt qu'elle est formée de $U\mathfrak{u}^-$-modules libres de type fini.

Ce complexe est muni d'une filtration (Fil^i) ; définie comme suit ; soit $H=\mathrm{diag}(0,0,-1,-1)$ l'élément de $\mathfrak{t}$ caractérisé par $d\alpha(H)=0$, $d\beta(H)=1$ (α resp. β désignant la racine simple courte resp. longue), et $d\nu(H)=-1$ pour le facteur de similitude ν de G. Il fournit un générateur du quotient $\mathfrak{zm}/\mathfrak{zg}$ des centres de $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{g}$. Si E est un $\mathfrak{q}$-module libre de rang fini sur $\mathbb{Z}_p$, on définit Fil^iE comme la somme des espaces propres généralisés où les valeurs propres de H sont $\geq i$. On étend cette filtration au module induit $\mathbf{E}=U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}E$ en posant $\mathrm{Fil}^i\mathbf{E}=U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}\mathrm{Fil}^iE$. Si $\phi:E\to F$ est $\mathfrak{q}$-linéaire, il respecte les filtrations et il en est de même pour le morphisme induit $\phi:U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}E\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}F$. Avec cette définition, on voit que pour $\lambda=(1,0;1)$, les sauts de la filtration sur V_λ sont -1 et 0 ; donc sur $V_{\lambda^\vee}$, les sauts sont 0 et 1. C'est cette normalisation qui explique notre préférence pour la représentation contragrédiente.

Pour tout poids μ dominant pour (M,B_M) où M désigne le Levi standard de Q et $B_M=B\cap M$, soit W_μ la $\mathbb{Z}_p$-représentation de M de plus haut poids μ (bien définie par [25] 1.9). Par définition de W^M, les poids $w\bullet\lambda$ sont dominants pour (M,B_M) pour tout élément w de W^M (et seulement pour ces éléments).

Le complexe BGG relatif au parabolique de Siegel est le sous-complexe filtré, facteur direct, de (KQ) découpé par le caractère infinitésimal de $V_{\lambda^\vee}$ donnant l'action du centre $Z\mathfrak{g}$ de l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$. Il est isomorphe au complexe (BGGQ) suivant :

$$0\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}W_{w_3\bullet\lambda^\vee}\overset{d_{w_3}}{\to}U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}W_{w_2\bullet\lambda^\vee}\overset{d_{w_2}}{\to}U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}W_{w_1\bullet\lambda^\vee}\overset{d_{w_1}}{\to}U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}W_{\lambda^\vee}$$

formé des modules de Verma généralisés des M-représentations $W_{\lambda^\vee}=W_{(a,b;-c)}$, $W_{w_1\bullet\lambda^\vee}=W_{(a,-b-2;-c)}$, $W_{w_2\bullet\lambda^\vee}=W_{(b-1,-a-3;-c)}$ et $W_{w_3\bullet\lambda^\vee}=W_{(-b-3,-a-3;-c)}$.

Pour décrire les flèches de (BGGQ) et expliquer cet isomorphisme, on commence par le cas où $\lambda=0$. Dans ce cas, pour $i=0,1,2,3$, le $\mathfrak{q}$-module $\bigwedge^i\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est isomorphe à $W_{w_i\bullet 0}$.

Soit $Z\mathfrak{g}$, resp. $Z\mathfrak{m}$, le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, resp. du Levi standard de $\mathfrak{q}$. Soit $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ l'algèbre de Cartan standard de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{m}$. Par les isomorphismes d'Harish-Chandra pour $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}$, on peut considérer l'algèbre $Z\mathfrak{g}$ comme une sous-algèbre de $Z\mathfrak{m}$. De plus, $Z\mathfrak{g}$ agit sur une représentation irréductible V_λ de G, resp. W_μ de M, par le caractère $\chi_{\lambda^\vee+\rho}$ resp. $\chi_{\mu+\rho}$, composé de l'isomorphisme d'Harish-Chandra avec le prolongement à l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{t}$ de la forme linéaire $\lambda^\vee + \rho$ resp. $\mu + \rho$. Si λ et μ sont des caractères p-petits de T, la condition $\chi_{\lambda^\vee+\rho} = \chi_{\mu+\rho}$ équivaut à l'existence d'un élément w de W tel que $\mu + \rho = w(\lambda^\vee + \rho)$ (voir [25] Prop.2.8).

Dans notre situation, l'action de $Z\mathfrak{g}$ sur $W_{w_i \bullet 0}$ est donnée par $\chi_{w_i\bullet 0+\rho}$. Par la remarque précédente, pour tout $w \in W$, $\chi_{w\bullet 0+\rho} = \chi_\rho$. L'action de $Z\mathfrak{g}$ sur le complexe de Koszul (KQ) est donc donnée par le caractère infinitésimal χ_ρ. Le complexe (BGGQ) ci-dessus n'est donc autre que le complexe de Koszul (KQ).

Soit maintenant $\lambda = (a, b; c)$ un poids dominant quelconque. On forme pour tout $i = 0, 1, 2, 3$ le $\mathfrak{g}$-module $(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} \bigwedge^i \mathfrak{g}/\mathfrak{q}) \otimes V_{\lambda^\vee}$. Comme λ est p-petit, on a une décomposition $V_{\lambda^\vee} = \oplus W_\nu$ où ν est un poids (M, B_M)-dominant, plus petit que $\lambda^\vee$ au sens de l'ordre de Bruhat pour (G, B). Pour $\nu = \lambda^\vee$, le sous-module $W_{\lambda^\vee} \subset V_{\lambda^\vee}$ est donné par $U\mathfrak{q} \cdot v_{\lambda^\vee}$. On utilise la décomposition de Clebsch-Gordan $W_{w_i(\rho)-\rho} \otimes W_\nu = \bigoplus W_\mu$; elle est valide sur $\mathbb{Z}_p$ par [25] Sect.1.10 ; sur $\mathbb{Z}_p$ comme sur $\mathbb{C}$ des multiplicités (dites de Clebsch-Gordan) interviennent ; elles n'importent pas pour nous car nous allons voir que les facteurs qui nous intéressent sont sans multiplicité. En effet, pour trouver les termes de la somme sur lesquels $Z\mathfrak{g}$ agit par $\chi_{\lambda^\vee+\rho}$, nous devons trouver les couples (μ, w) (avec $w \in W$) tels que $\mu + \rho = w(\lambda^\vee + \rho)$; soit encore $\nu + w_i(\rho) = w(\lambda^\vee + \rho)$, ou $w^{-1}(\nu) = \lambda + \rho - w^{-1}w_i(\rho)$. Mais $w^{-1}(\nu)$ est un poids de V_λ et $\rho - w^{-1}w_i(\rho)$ est somme de racines positives, à moins que $w = w_i$. C'est donc la seule possibilité pour w, et $\nu = w_i(\lambda^\vee)$. Il y a donc pour chaque i un et un seul M-facteur de $\bigwedge^i \mathfrak{g}/\mathfrak{q} \otimes V_{\lambda^\vee}$ sur lequel $Z\mathfrak{g}$ agit par $\chi_{\lambda^\vee+\rho}$ à savoir W_μ pour $\mu = w_i(\lambda^\vee + \rho) - \rho$.

Soit $v_{\lambda^\vee}$ un vecteur de plus haut poids de $V_{\lambda^\vee}$ et soit $v_{w_i(\lambda^\vee)}$ le vecteur (unique à homothétie près grâce à ce qui précède) de poids $w_i(\lambda^\vee)$ de $V_{\lambda^\vee}$; comme on a respectivement $w_1(\lambda^\vee) = (a, -b; -c)$, $w_2(\lambda^\vee) = (b, -a; -c)$, et $w_3(\lambda^\vee) = (-b, -a; -c)$, on voit que $v_{w_1(\lambda^\vee)} = X^b_{-\beta} v_{\lambda^\vee}$, $v_{w_2(\lambda^\vee)} = X^{a-b}_{-\alpha-\beta} v_{w_1(\lambda^\vee)}$ et $v_{w_3(\lambda^\vee)} = X^b_{-2\alpha-\beta} v_{w_2(\lambda^\vee)}$.

Posons $v_0 = 1$, $v_1 = \overline{X}_{-\beta}$, $v_2 = \overline{X}_{-\beta} \wedge \overline{X}_{-\beta-\alpha}$ et $v_3 = \overline{X}_{-\beta} \wedge \overline{X}_{-\beta-\alpha} \wedge \overline{X}_{-\beta-2\alpha}$. Soit u_μ un vecteur de plus haut poids de W_μ. On obtient un plongement du module gradué sous-jacent de (BGGQ) dans celui de (KQ) en envoyant $u_{w_i\bullet\lambda}$ sur $v_i \otimes v_{w_i(\lambda)}$ pour identifier $W_{w_i\bullet\lambda^\vee}$ avec le sous-$U\mathfrak{q}$-module de $\bigwedge^i \mathfrak{g}/\mathfrak{q} \otimes V_{\lambda^\vee}$ engendré par $v_i \otimes v_{w_i(\lambda^\vee)}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

On peut maintenant décrire les morphismes du complexe (BGGQ) en termes des vecteurs u_μ. Commençons par le cas $\lambda = 0$. Comme (BGGQ) coïncide avec (KQ), on a $d_{w_i} = d_i$; un calcul facile montre que ces flèches sont caractérisées, par $U\mathfrak{g}$-linéarité, par les formules

– $d_{w_1}(1 \otimes u_{w_1 \bullet 0}) = X_{-\beta} \otimes u_0$,
– $d_{w_2}(1 \otimes u_{w_2 \bullet 0}) = X_{-\beta-\alpha} \otimes u_{w_1 \bullet 0} + X_{-\beta} \otimes X_{-\alpha} u_{w_1 \bullet 0}$ et
– $d_{w_3}(1 \otimes u_{w_3 \bullet 0}) = X_{-\beta-2\alpha} \otimes u_{w_2 \bullet 0} - X_{-\beta-\alpha} \otimes X_{-\alpha} u_{w_2 \bullet 0} + X_{-\beta} \otimes X^2_{-\alpha} u_{w_2 \bullet 0}$.

On voit de même :

Lemme 6.1 *On a*

– $d_{w_1}(1 \otimes u_{w_1 \bullet \lambda^\vee}) = X^{b+1}_{-\beta} \otimes u_{\lambda^\vee}$,
– $d_{w_2}(1 \otimes u_{w_2 \bullet \lambda^\vee}) = X^{a-b+1}_{-\beta-\alpha} \otimes u_{w_1 \bullet \lambda^\vee} + X_{-\beta} X^{a-b}_{-\beta-\alpha} \otimes X_{-\alpha} u_{w_1 \bullet \lambda^\vee} + \dots$ *où les termes sont tous de poids* $(b-1, -a-3; -c)$, *et*
– $d_{w_3}(1 \otimes u_{w_3 \bullet \lambda^\vee}) = X^{b+1}_{-\beta-2\alpha} \otimes u_{w_2 \bullet \lambda^\vee} \pm X_{-\beta-\alpha} X^b_{\beta-\alpha} \otimes X_{-\alpha} u_{w_2 \bullet \lambda^\vee} + \dots \pm X^{b+1}_{-\beta-\alpha} \otimes X^{b+1}_{-\alpha} u_{w_2 \bullet \lambda^\vee} + \dots + X^{b+1}_{-\beta} \otimes X^{2(b+1)}_{-\alpha} u_{w_2 \bullet \lambda^\vee}$, *les termes étant tous de poids* $(-b-3, -a-3; -c)$.

Démonstration : Si $\phi : U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_1 \to U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_2$ est un morphisme $U\mathfrak{g}$-linéaire, si $w \in W_1$ est un vecteur de poids μ pour $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$, $\phi(1 \otimes w)$ est de poids μ dans $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_2$. En particulier, $d_{w_1}(1 \otimes u_{w_1 \bullet \lambda^\vee})$ est de poids $(a, -b-2; -c)$. Le $\mathbb{Z}_p$-module propre pour ce poids dans $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_{\lambda^\vee}$ est de rang 1, engendré par $X^{b+1}_{-\beta} \otimes u_{\lambda^\vee}$. Comme le conoyau de d_{w_1} est $\mathbb{Z}_p$-libre, le vecteur $d_{w_1}(1 \otimes u_{w_1 \bullet \lambda^\vee})$ est primitif et quitte à changer de générateur du $\mathbb{Z}_p$-module propre pour le poids $\lambda^\vee$ dans $W_{\lambda^\vee}$, on peut supposer que $d_{w_1}(1 \otimes u_{w_1 \bullet \lambda^\vee}) = X^{b+1}_{-\beta} \otimes u_{\lambda^\vee}$.

Pour $d_{w_2}(1 \otimes u_{w_2 \bullet \lambda})$, le $\mathbb{Z}_p$-sous-module de poids $w_2 \bullet \lambda^\vee = (b-1, -a-3; -c)$ dans $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_{w_1 \bullet \lambda^\vee}$est de rang > 1, engendré par les

$$(*) \quad X^u_{-\beta} X^v_{-\beta-\alpha} X^w_{-\beta-2\alpha} \otimes X^t_{-\alpha} u_{w_1 \bullet \lambda}$$

où les entiers $u, v, w, t \geq 0$ sont tels que $v + 2w + t = a - b + 1$ et $2u + v - t = a - b + 1$. L'image de $u_{w_2 \bullet \lambda^\vee}$ par d_{w_2} est donc combinaison linéaire primitive de ces vecteurs.

De même, $d_{w_3}(1 \otimes u_{w_3 \bullet \lambda})$ est combinaison linéaire des monômes (*) avec $2u + v = t$ et $v + 2w + t = 2(b+1)$, ce qui inclut $X^{b+1}_{-\beta-2\alpha} \otimes u_{w_2 \bullet \lambda}$, $X^{b+1}_{-\beta-\alpha} \otimes X^{b+1}_{-\alpha} u_{w_2 \bullet \lambda}$ et $X^{b+1}_{-\beta} \otimes X^{2(b+1)}_{-\alpha} u_{w_2 \bullet \lambda}$.

Remarque 6.2 *Dans tous les cas, on voit que* $u + v + w$ *est constant (égal à* $b+1$, *resp.* $a - b + 1$, *resp.* $b+1$*).*

7 Complexe BGG dual

Soit X une variété de Shimura pour $G = GSp_4$ de niveau K premier à p, net, fixé. Elle est définie sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ et ses composantes connexes géométriques sont définies sur l'anneau des entiers d'un corps de nombres abélien non ramifié en p. On note $f : A \to X$ la variété abélienne principalement polarisée universelle avec structure de niveau K. Les références pour les définitions et propriétés non démontrées ci-dessous sont [6] et [21].

Soit $\overline{X}$, resp. X^*, une compactification toroidale lisse, resp. la compactification minimale, de X sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ (voir [6] V.2.5, V.5.4). Soit $D = \overline{X} - X$ le diviseur à croisement normaux sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. On note $f : \mathcal{G} \to \overline{X}$, resp. $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{X}$ la variété semi-abélienne principalement polarisée prolongeant A, resp. la compactification de Kuga-Sato de A, avec son diviseur à croisements normaux D_A au-dessus de D. On note $\mathcal{H} = R^1\overline{f}_*\Omega^\bullet_{\overline{A}/\overline{X}}(\log D_A/D)$ le fibré de rang 4 sur $\overline{X}$ muni de sa connection intégrable ∇ à singularités logarithmiques prolongeant la connection de Gauss-Manin. Soit $\omega = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}/\overline{X})^\vee$ le fibré de rang 2 des différentielles relatives. La filtration de Hodge sur $\mathcal{H}$ est définie par la suite exacte courte

$$0 \to \omega \to \mathcal{H} \to \mathrm{Lie}(\mathcal{G}/\overline{X}) \to 0.$$

Rappelons que lorsque les éventails définissant $\overline{X}$ et $\overline{A}$ sont assez fins, on a $\mathcal{G} \subset \overline{A}$.

On va rappeler la définition du foncteur contravariant de faisceautisation des représentations de Q (ou G) voir aussi [32] Sect.3.2 pour GL_2, et [21] Sect.5.2.

On rappelle d'abord la construction fonctorielle du fibré à connexion $\mathcal{V}_\lambda$ associé à la $\mathbb{Z}_{(p)}$-représentation V_λ de G de plus haut poids λ et de son prolongement canonique, encore noté $\mathcal{V}_\lambda$, à $\overline{X}$. Lorsque λ est p-petit, ce prolongement est muni d'une connexion canonique à singularité logarithmique prolongeant la connexion de $\mathcal{V}_\lambda|_X$ (voir [21] Section 5.2 et Appendice II pour la construction de ce fibré à connexion sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ lorsque $a + b + 3 < p - 1$).

Sur le G-module à gauche $\mathbb{A}^4$ des vecteurs colonnes 4×1 muni de la base canonique $(e_i)_{1\leq i\leq 4}$, la matrice J fournit un accouplement symplectique unimodulaire $(X, Y) \mapsto {}^tXJY$, préservé par G à un scalaire près. Le plan lagrangien standard $\langle e_1, e_2\rangle$ est preservé par le parabolique de Siegel $Q \subset G$; par ailleurs, le fibré $\mathcal{H}$ est muni de sa filtration de Hodge donnée par la suite exacte courte

$$0 \to \omega \to \mathcal{H} \to \omega^\vee \to 0$$

Considérons le $\mathbb{Z}_p$-schéma $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}^Q = \mathrm{Isom}_{\overline{X},\mathrm{sympl},\mathrm{fil}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}^4, \mathcal{H})$ où les indices "sympl" et "fil" signifient que les isomorphismes sont des similitudes symplectiques, et respectent les filtrations. Ce schéma est muni d'une action à droite de Q qui lui confère une structure de Q-torseur de Zariski au-dessus de $\overline{X}$. On introduit aussi le M-torseur à droite $\mathcal{T}^M = \mathrm{Isom}_{\overline{X}}(\mathcal{O}_{\overline{X}}^2, \omega)$.

Considérons la catégorie $\mathcal{F}$, resp. $\mathcal{FF}$, des faisceaux localement libres de rang fini sur $\overline{X}$, resp. la sous-catégorie des faisceaux munis d'une filtration à deux crans. On définit deux foncteurs covariants

$$F_Q : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(Q) \to \mathcal{FF}, \quad F_M : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(M) \to \mathcal{F}$$

donnés, pour toute $\mathbb{Z}_p$-représentation W de Q resp. de M, resp. de G, par $F_Q(W) = \mathcal{T}_{\mathcal{H}}^Q \times^Q W$, resp. $F_M(W) = \mathcal{T}^M \times^M W$, où $\mathcal{T}^S \times^S W$ désigne le produit contracté par le groupe S (pour $S = Q, M, G$), quotient du produit cartésien par la relation d'équivalence $(ts, w) \sim (t, sw)$. Il est clair que $F_Q(W)$ est muni d'une filtration décroissante. On appelle ces foncteurs les foncteurs de faisceautisation. Ces foncteurs sont additifs, exacts, et commutent aux produits tensoriel, symétrique et extérieur. On considère aussi le foncteur de restriction de G à Q : $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(Q), V \mapsto V|_Q$. Si λ, resp. μ, est un poids G-dominant, resp. M-dominant, et si V_λ, resp. W_μ, est une $\mathbb{Z}_p$-représentation de Weyl de G, resp. M, de plus haut poids λ, resp. M, on notera $\mathcal{V}_\lambda = F_Q(V_\lambda)$, resp. $\mathcal{W}_\mu = F_Q(W_\mu)$.

Pour tout $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-module $\mathcal{W}$ on note $\mathcal{W}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(\mathcal{W}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ le faisceau dual de $\mathcal{W}$; on voit que les foncteurs F_Q et F_M commutent à la dualité : $F_?(W^\vee) = F_?(W)^\vee$.

Par exemple pour $V = \mathrm{St}_4 = V_{1,0;1)}$ la représentation standard de G, on a la suite exacte courte de Q-représentations

$$0 \to W_{(1,0;1)} \to V \to W_{(0,-1;1)} \to 0,$$

notons que comme représentation de $GL_2 \times GL_1$ (Levi de Q dans G), on a $W_{(1,0;1)} = \mathrm{St}_2 \otimes Id$ et $W_{(0,-1;1)} = \mathrm{St}_2^\vee \otimes \nu$.

On a $F_Q(V) = \mathcal{H}$ et si on applique F_Q à la suite exacte courte ci-dessus, on obtient

$$0 \to \omega \to \mathcal{H} \to \omega^\vee \to 0.$$

Dans le reste de cette section, on va montrer que pour toute représentation V de G, le faisceau $F_Q(V|_Q)$ est muni d'une connexion à singularités logarithmiques. Notons d'abord qu'on peut étendre le foncteur F_Q à la catégorie des $U\mathfrak{g}$-modules, resp. $\mathcal{U}(G)$-modules $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W$, resp. $\mathcal{U}(G) \otimes_{\mathcal{U}(G)} W$, induits des Q-modules W.

Soit $\mathcal{D}_{\overline{X}}$ la $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-algèbre à gauche des opérateurs différentiels sur $\overline{X}$ et $\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$ la $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-sous-algèbre de $\mathcal{D}_{\overline{X}}$ engendrée localement par les $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}, y_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, y_s\frac{\partial}{\partial y_s}$ où $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ désigne un système local de paramètres au bord de $\overline{X}$ tel que l'équation locale de D soit $y_1 \cdot \ldots \cdot y_s = 0$. On définit aussi $\widetilde{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$ comme l'algèbre à puissances divisées de $\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$ pour l'idéal $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_r}, y_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, y_s\frac{\partial}{\partial y_s}$. Ces anneaux sont des $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-bimodules mais ne sont pas des algèbres sur $\mathcal{O}_{\overline{X}}$.

Notons que l'anneau $\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$ est engendré par $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ et par le faisceau $\overline{T}_{\overline{X}} = T_{\overline{X}}(-d\log D)$ $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-dual de $\Omega^1_{\overline{X}}(d\log D)$; la même chose est vraie pour $\widetilde{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$ en prenant les puissances divisées de $\overline{T}_{\overline{X}}$.

Lemme 7.1 *(i) On a un isomorphisme d'anneaux et de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules à gauche*

$$F_Q(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} \mathbb{Z}_p) = \overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}, \quad F_Q(\mathcal{U}(G) \otimes_{\mathcal{U}(Q)} \mathbb{Z}_p) = \widetilde{\mathcal{D}}_{\overline{X}},$$

(ii) le foncteur F_Q envoie les $U\mathfrak{g}$-modules, resp. $\mathcal{U}(G)$-modules, induits dans la catégorie des $\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$-modules, resp. $\widetilde{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$-modules, et pour toute Q-représentation de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, on a

$$F_Q(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W) = \overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}} \otimes F_Q(W).$$

En particulier,

$$F_Q(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} \bigwedge^i \mathfrak{g}/\mathfrak{q}) = \overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} \bigwedge^i \overline{T}_{\overline{X}}.$$

Démonstration : (i) On ne traite que le cas de $U\mathfrak{g}$, le cas de $\mathcal{U}(G)$ étant similaire.

Montrons d'abord que $F_Q(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}) = T_{\overline{X}}(-d\log D)$. Comme représentation de M, $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ est duale de $\mathfrak{u}^+ = \mathfrak{u}$ qui s'identifie au carré symétrique $\mathrm{Sym}^2\mathrm{St}_2$ de la représentation standard. On a donc $F_Q(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}) = F_M(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}) = F_M(\mathrm{Sym}^2\,\mathrm{St}_2)^\vee = \mathrm{Sym}^2(F_M(\mathrm{St}_2))^\vee = \mathrm{Sym}^2\omega^\vee$. Par l'isomorphisme de Kodaira-Spencer, on a

$$\mathrm{Sym}^2(\omega)(-1) \cong \Omega^1_{\overline{X}}(d\log D)$$

Le twist par ν^{-1} est relatif à l'action de $diag(1_2, \nu \cdot 1_\nu) \in \{1_2\} \times GL_1 \subset GL_2 \times GL_1$, le sous-groupe de Levi du parabolique de Siegel Q. L'isomorphisme $\mathrm{Sym}^2(\omega) \cong \Omega^1_{\overline{X}}(d\log D)$ est valide quand on se limite à l'action de Sp_4 et au Levi GL_2 de son parabolique de Siegel, mais pas si on considère aussi l'action du facteur GL_1. En fait, on a $\omega = \mathcal{W}_{(1,0;1)}$, donc $\mathrm{Sym}^2(\omega) = \mathcal{W}_{(2,0;2)}$; l'effet du twist est que $\mathcal{W}_{(2,0;2)}(-1) = \mathcal{W}_{(2,0;0)}$. La forme précise de l'isomorphisme de Kodaira-Spencer est

$$\mathcal{W}_{(2,0;0)} \cong \Omega^1_{\overline{X}}(d\log D).$$

on voit ainsi que $F_Q(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}) = \overline{T}_{\overline{X}}(-1)$. On reviendra sur l'action du facteur $\{1_2\} \times GL_2$ de $GL_2 \times GL_1$ dans la Section 8.1.3, qui n'interviendra que dans l'étude des opérateurs de Hecke.

Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, on peut identifier la $\mathbb{Z}_p$-algèbre $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} \mathbb{Z}_p$ munie de l'action adjointe de Q sur le premier facteur et triviale sur le second, à la $\mathbb{Z}_p$-algèbre $U\mathfrak{u}^-$, munie de l'action de Q donnée par la composée du quotient de Levi et de la représentation adjointe de M sur $\mathfrak{u}^-$ (c'est-à-dire, que $\mathfrak{u}^-$ est identifié comme Q-module à $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$). Par compatibilité de F_Q à la somme directe et au produit symétrique, on voit que

$$F_Q(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} \mathbb{Z}_p) = \overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$$

comme $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-modules à gauche. La compatibilité des structures d'anneaux est immédiate.

(ii) résulte de (i) par la formule $U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W = (U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ (cf. Sect.4).

Corollaire 7.2 *(i) Pour tout couple de représentations $W, W' \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(Q)$, on a un $\mathbb{Z}_p$-homomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{U_\mathfrak{g}}(U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W, U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W') \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(F_Q(W')^\vee, F_Q(W)^\vee)$$

(ii) Pour $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$, le faisceau dual $F_Q(V)^\vee$ est muni d'une connexion à singularité logarithmique le long de D intégrable.

(iii) Pour $V = V_{(1,0;-1)}$ la duale de la représentation standard de G (de sorte que $(V)^\vee = \mathcal{H}$), la connexion $\nabla : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \Omega^1_{\overline{X}}(d\log D)$ n'est autre que la connexion de Gauss-Manin.

Démonstration :

Etant données deux $\mathbb{Z}_p$-représentations W, W' de Q et un morphisme de $U\mathfrak{g}$-modules $\phi : U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W \to U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W'$, on obtient par la proposition précédente un morphisme de $\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$-modules à gauche

$$\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} F_Q(W) \to \overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} F_Q(W')$$

On en déduit que pour tout complexe (filtré) de $U\mathfrak{g}$-modules induits $\ldots \to U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_1 \to U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{q}} W_0$, on obtient en appliquant F_Q un complexe (filtré) de $\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}$-modules. On applique alors le foncteur $\Psi^\vee$ obtenu en composant le foncteur Ψ de [6] VI.3 (page 216) avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}(-, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et on obtient un complexe de $\Omega^\bullet_{\overline{X}}(d\log)$-modules à droite filtré. Pour V une $\mathbb{Z}_p$-représentation de G, on applique cette construction à sa résolution de Koszul et en particulier à son premier cran :

$$U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}\mathfrak{g}/\mathfrak{q}\otimes V|_Q\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}V|_Q,\quad \xi\otimes\overline{X}\otimes v\mapsto \xi X\otimes v-\xi\otimes Xv$$

on obtient

$$\overline{T}_{\overline{X}}\otimes F_Q(V)\to\overline{\mathcal{D}}_{\overline{X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}F_Q(V),\quad \theta\otimes v\mapsto\widetilde{\theta}\otimes v-1\otimes\widetilde{\theta}v$$

où pour tout élément $\theta\in\overline{T}_{\overline{X}}$, on note $\widetilde{\theta}\in\mathcal{D}_{\overline{X}}$ un relèvement quelconque (unique à addition près par un élément de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$) ; en posant $\mathcal{V}^\vee=F_Q(V)^\vee$, on en déduit une connexion à singularités logarithmiques intégrable

$$\nabla_{\mathcal{V}^\vee}:\mathcal{V}^\vee\to\mathcal{V}^\vee\otimes\Omega^1_{\overline{X}}(d\log D)=(\mathcal{V}\otimes\overline{T}_{\overline{X}})^\vee,\quad v^\vee\mapsto\widetilde{\theta}(\langle v,v^\vee\rangle)-\langle\widetilde{\theta}v,v^\vee\rangle$$

En particulier, pour $\mathcal{H}=F_Q(V_{(1,0;-1)})^\vee$, on a une connexion $\nabla_{\mathcal{H}}$. Cette connexion coïncide avec la connexion de Gauss-Manin comme on le voit par pull-back de la situation par $\mathcal{H}\to\overline{X}$.

Remarque : L'énoncé (i) du corollaire semble contredire les précautions prises dans 5.2.4 de [21]. En réalité, le point de cette section de [21] est de comparer les opérateurs différentiels et les opérateurs différentiels à puissances divisées. Pour montrer qu'ils coïncident, il est indispensable de se limiter aux représentations de poids p-petits. L'autre problème si l'on ne se limite pas aux poids p-petits, est que pour une représentation irréductible de G sur $\mathbb{Z}_p$ de plus haut poids λ, on ne peut affirmer que la connexion à singularités logarithmiques intégrable qu'on définit par fonctorialité à partir du morphisme

$$U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}(\mathfrak{g}/\mathfrak{q}\otimes V|_Q)\to U\mathfrak{g}\otimes_{U\mathfrak{q}}V|_Q$$

est donnée par pléthysmes à partir de la connexion de Gauss-Manin comme dans l'appendice II.3 de [21]. C'est pourquoi nous nous limitons dans ce qui suit à des poids p-petits.

Dans les sections suivantes, on notera pour tout poids λ p-petit $\mathcal{V}_\lambda=F_G(V_{\lambda^\vee})^\vee$ le fibré à connexion logarithmique ainsi obtenu à partir de la représentation $V_{\lambda^\vee}$ de G.

Soit $\mu=(a',b';a'+b')$ un poids M-dominant (*i.e.* tel que $a'\geq b'$) ; on pose $\omega^\mu=F_M(W_\mu)$.

Notons que lorsque μ est p-petit (c'est-à-dire, lorsque $a'-b'<p-1$), cette notation est compatible avec celle de [15] Section 1, où cet auteur pose

$\omega^{\mu,\mathrm{Hida}} = \pi_* \mathcal{O}^{N_M}_{\mathcal{T}^M_\omega}[-\mu]$ (où $B_M = TN_M$ est la décomposition de Levi standard du Borel B_M de M. En effet, si l'on considère le pull-back de $\pi : \mathcal{T}^M_\omega \to \overline{X}$ par lui-même, on a un isomorphisme de M-torseurs au-dessus de$\mathcal{T}^M_\omega : \mathcal{T}^M_\omega \times_{\overline{X}} \mathcal{T}^M_\omega \cong \mathcal{T}^M_\omega \times M$ donné par $(t,\theta) \mapsto (t,m)$ où $\theta = t \circ m$. De sorte que le pull-back $\mathcal{T}^M_\omega \times_{\overline{X}} \left(\mathcal{T}^M_\omega \times_M W\mu\right)$ s'identifie au produit cartésien $\mathcal{T}^M_\omega \times W_\mu$ rappelons que comme μ est p-petit ([25] 1.9 Corollary), on a $W_\mu = \{f : M \to \mathbb{A}^1; f(mtn) = \mu^{-1}(t)f(m)\} \quad \text{pour tout}\, tn \in B_M\}$ ces , de sorte que le pull-back par π de $F_M(W_\mu)$ coïncide avec celui de $\omega^{\mu,\mathrm{Hida}}$ avec la même action de M sur les sections, de sorte qu'après descente par M, on obtient $\omega^\mu = \omega^{\mu,\mathrm{Hida}}$. On déduit du corollaire ci-dessus le

Lemme 7.3 *L'image par $F^\vee_Q$ du complexe de Koszul pour $V_{\lambda^\vee}$ est le complexe de de Rham logarithmique $\mathcal{H}^\bullet_\lambda = \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}}(\mathrm{dlog}\, D)$ pour $\mathcal{V}_\lambda$.*

Ceci motive la définition du complexe BGG dual :

Définition 7.4 *Le complexe filtré $\mathcal{K}^\bullet_\lambda$ s'appelle le complexe BGG dual. Il est quotient du complexe filtré de de Rham logarithmique $\mathcal{H}^\bullet_\lambda$ sur le $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma $\overline{X}$, défini comme l'image par $F^\vee_Q$ du complexe BGG pour $V_{\lambda^\vee}$.*

Théorème 2 *Sous l'hypothèse que λ est p-petit, le complexe $\mathcal{K}^\bullet_\lambda$ est un facteur direct du complexe de de Rham logarithmique ; le projecteur $\mathcal{H}^\bullet_\lambda \to \mathcal{K}^\bullet_\lambda$ est un quasi-isomorphisme de complexes filtrés.*

Voir [21] Theorem 6 Sect.5.4. Dans l'Appendice de l'article [21], on montre aussi que le projecteur $\mathcal{H}^\bullet_\lambda \to \mathcal{K}^\bullet_\lambda$ est découpé par des correspondances algébriques sur la variété de Kuga-Sato $\overline{A}^r \to \overline{X}$. Ceci nous servira pour montrer que les correspondances de Hecke commutent aux différentielles du complexe BGG dual.

Dans tout ce qui suit on fixe un poids G-dominant p-petit $\lambda = (a,b;c)$ ($a \geq b \geq 0$ et $w = a+b+3 < p-1$, et on suppose que $c = a+b$; tous les poids qui interviendront seront M-dominants p-petits, de la forme $\mu = (a',b';c)$, pour le même caractère central de poids c. De sorte qu'on pose pour simplifier $\omega^\mu = \omega^{a',b'}$. Avec ces notations, on peut écrire les termes de ce complexe ; ils sont placés en degré w, $w+1$, $w+2$ et $w+3$ (pour $w = a+b+3$) :

$$(BGG^\vee_1) \quad \mathcal{W}_{(-b,-a;a+b)} \to \mathcal{W}_{(b+2,-a;a+b)} \to \mathcal{W}_{(a+3,1-b;a+b)} \to \mathcal{W}_{(a+3,b+3;a+b)}$$

Introduisons la notation $\omega^{r,s}(t) = \mathcal{W}_{(r,s;r+s+2t)}$; notons qu'un élément (g,ν) du Levi $GL_2 \times GL_1$ du parabolique Q de GSp_4 agit sur $W_{(r,s;r+s+2t)}$ par $\mathrm{Sym}^{r-s} g \otimes \det^s g \otimes \nu^t$. On peut alors réécrire le complexe BGG dual comme

$$(BGG^\vee_2) \quad \omega^{3-\ell,3-k}(k+\ell-6) \to \omega^{\ell-1,3-k}(k-4) \to \omega^{k,4-\ell}(\ell-5) \to \omega^{k,\ell}(-3)$$

où les différentielles sont données par des opérateurs différentiels homogènes de degrés respectifs $\ell-2$, $k-\ell+1$ et $\ell-2$; ceci résulte de l'homogénéité des formules donnant les différentielles du complexe BGG à la fin de la Section 5. Pour alléger la notation on omettra dans la suite de cette section les twists par une puissance de ν (ou encore, on se restreindra à l'action de Sp_4 au lieu de GSp_4). Cependant, lorsqu'on va considérer l'action des opérateurs de Hecke, dans les sections 8.1.3 et 8.1.4, ce twist deviendra crucial.

De plus, la filtration de Hodge (convolée de la filtration bête et de la filtration de Hodge sur $\mathcal{V}_\lambda$) sur le complexe de de Rham induit sur le complexe BGG dual la filtration explicite suivante (dite filtration bête) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{Fil}^0 & = & \omega^{3-\ell,3-k} & \to & \omega^{\ell-1,3-k} & \to & \omega^{k,4-\ell} & \to & \omega^{k,\ell} \\
\mathrm{Fil}^{\ell-2} & = & 0 & \to & \omega^{\ell-1,3-k} & \to & \omega^{k,4-\ell} & \to & \omega^{k,\ell} \\
\mathrm{Fil}^{k-1} & = & 0 & \to & 0 & \to & \omega^{k,4-\ell} & \to & \omega^{k,\ell} \\
\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} & = & 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & \omega^{k,\ell}
\end{array}$$

Exemples :

1) Le cas $k=\ell=3$ a déja été traité : les complexes de de Rham et BGG dual coïncident.

2)Pour $k=4$, $\ell=3$, on a le complexe filtré de de Rham de $\mathcal{H}=\mathcal{V}_{(1,0;1)}$ pour la connexion de Gauss-Manin :

$$\begin{array}{ccccccc}
\omega & & \omega\otimes\Omega^1(\mathrm{dlog}) & & \omega\otimes\Omega^2(dlog) & & \omega\otimes\Omega^3(dlog) \\
\downarrow & & \downarrow & & i_2\downarrow & & i_3\downarrow \\
\mathcal{H} & \overset{\nabla^0}{\to} & \mathcal{H}\otimes\Omega^1(\mathrm{dlog}) & \overset{\nabla^1}{\to} & \mathcal{H}\otimes\Omega^2(\mathrm{dlog}) & \overset{\nabla^2}{\to} & \mathcal{H}\otimes\Omega^3(\mathrm{dlog}) \\
\downarrow & & \pi_1\downarrow & & \pi_2\downarrow & & \downarrow \\
\omega^\vee & & \omega^\vee\otimes\Omega^1(\mathrm{dlog}) & & \omega^\vee\otimes\Omega^2(dlog) & & \omega\otimes\Omega^3(dlog)
\end{array}$$

le complexe BGG dual est facteur direct de ce complexe de de Rham. Il est de forme

$$\omega\otimes\det{}^{-1}\omega\to\mathrm{Sym}^3\omega\otimes\det{}^{-1}\omega\to\mathrm{Sym}^3\omega\otimes\det\omega\to\omega\otimes\det{}^3\omega$$

Les degrés p_i des différentielles d^i sont $p_0=p_2=1$ et $p_1=2$. Pour déterminer explicitement ce complexe, rappelons que $\omega^\vee=\omega\otimes\det^{-1}\omega$; par l'isomorphisme de Kodaira-Spencer, on a $\mathrm{Sym}^2\omega\cong\Omega^1(dlog)$, de sorte que $\Omega^2(\mathrm{dlog})=\bigwedge^2\Omega^1_{\overline{X}}(\mathrm{dlog})\cong\mathrm{Sym}^2\omega\otimes\det\omega$ et $\Omega^3(\mathrm{dlog})\cong\det^3\omega$; de plus, comme $p>3$, $\mathrm{Sym}^3\omega$ est facteur direct de $\omega\otimes\mathrm{Sym}^2\omega$. On voit alors alors que d^0 est obtenue par passage au quotient de la composée de ∇^0 avec π_1 et de la projection $\sigma : \omega^\vee \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog}) \to \mathrm{Sym}^3\omega \otimes \det^{-1}\omega$. Le fait que l'application $\sigma \circ \pi_1 \circ \nabla^0$ passe au quotient se voit par un calcul direct (sur $\mathbb{C}$ par exemple, voir le calcul ci-dessous). C'est un opérateur différentiel de degré 1.

Ensuite, d^1 est obtenue comme suit : soit $\phi \in \mathrm{Sym}^3\omega \otimes \det^{-1}\omega \subset \omega^\vee \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog})$ et soit $\widetilde{\phi} \in \mathcal{H} \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog})$ un relèvement de ϕ. L'image de $\nabla^1\widetilde{\phi}$ dans $\omega^\vee \otimes \Omega^2(\mathrm{dlog})$ est de la forme $\pi_2 \circ \nabla^1(\omega')$ pour un unique $\omega' \in \omega \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog})$ par l'isomorphisme de Kodaira-Spencer :

$$\omega \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog}) \overset{KS}{\cong} \omega \otimes \mathrm{Sym}^2\omega = \omega \otimes \det^{-1}\omega \otimes (\mathrm{Sym}^2\omega \otimes \det\omega) \overset{KS}{\cong} \omega^\vee \otimes \Omega^2(\mathrm{dlog})$$

par définition, $d^1\phi \in \omega \otimes \Omega^2(\mathrm{dlog})$ est l'unique forme telle que $i_2(d^1(\phi)) = \nabla^1(\widetilde{\phi} - \omega')$; on voit que cette forme ne dépend pas du choix du relèvement $\widetilde{\phi}$ et appartient au sous-module $\mathrm{Sym}^3\omega \otimes \det\omega$ de $\omega \otimes \Omega^2(\mathrm{dlog})$. On peut voir (sur $\mathbb{C}$ par exemple) que d^1 est de degré 2.

Enfin, d^2 est obtenue par restriction de ∇^2 à $\mathrm{Sym}^3\omega \otimes \det\omega \subset \omega \otimes \Omega^2(\mathrm{dlog})$, et prend ses valeurs dans $\omega \otimes \Omega^3(\mathrm{dlog})$. C'est l'application duale de d^0 par dualité de Serre sur $\overline{X}$. Sur cette construction, l'autodualité du complexe BGG pour la dualité de Serre devient évidente.

Remarque : En vue de la section 10, nous notons qu'en tenant compte des twists, les formules correctes pour les isomorphismes de Kodaira-Spencer sont

$$\omega^{2,0}(-1) \cong \Omega^1_{\overline{X}}(\mathrm{dlog}), \quad \omega^{3,1}(-2) \cong \Omega^2_{\overline{X}}(\mathrm{dlog}), \quad \text{et}\, \omega^{3,3}(-3) \cong \Omega^3_{\overline{X}}(\mathrm{dlog}).$$

En particulier, on a $\omega^{k,\ell}(-3) = \omega^\lambda \otimes \Omega^1_{\overline{X}}(\mathrm{dlog})$.

Sur $\mathbb{C}$, nous donnons le détail de la factorisation de $\sigma \circ \pi_1 \circ \nabla^0$ qui définit d^0. L'inclusion $\omega \hookrightarrow \mathcal{H}$ est donnée par $f \to \omega_f = \begin{pmatrix} Z \\ 1_2 \end{pmatrix} \cdot f(Z)$ pour toute section f de ω. Soit ϕ une section de $\omega^\vee$ et $\widetilde{\phi} \in \mathcal{H}$ un relèvement de ϕ ; pour que l'image dans $\mathrm{Sym}^3\omega \otimes \det^{-1}\omega$ de $\pi_1(\nabla^0(\widetilde{\phi}))$ ne dépende pas du choix du relèvement, il suffit de voir que pour toute section f de ω, $\pi_1(\begin{pmatrix} dZ \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f)$ est d'image nulle par symétrisation.

On fait le calcul sur le revêtement universel $\mathcal{Z}$ de $X(\mathbb{C})^{an}$. Pour $Z \in \mathcal{Z}$, on note $Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{pmatrix}$. Soit (e_1, e_2) la base canonique de ω et (e_1^2, e_1e_2, e_2^2) la base de $\mathrm{Sym}^2\omega$ qui s'en déduit. L'isomorphisme $\omega^\vee \cong \omega \otimes \det^{-1}\omega$ est induit par le déterminant, il envoie donc $e_1^\vee$ sur $-e_2$ et $e_2^\vee$ sur e_1. L'isomorphisme de Kodaira-Spencer déduit de $\omega \overset{\nabla^0}{\to} \omega^\vee \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog})$ envoie e_1^2 sur dz_{11}, e_1e_2 sur

dz_{12} et e_2^2 sur dz_{22}. Le noyau du morphisme de symétrisation $\sigma : \omega \otimes \mathrm{Sym}^2\omega \to \mathrm{Sym}^3\omega$ est le $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$-module engendré par $e_1 \otimes e_1e_2 - e_2 \otimes e_1^2$ et $e_2 \otimes e_1e_2 - e_1 \otimes e_2^2$. Ainsi si $f = f_1e_1 + f_2e_2 \in \omega$, l'image de $\pi_1(\begin{pmatrix} dZ \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f)$ par l'isomorphisme $\omega^\vee \otimes \Omega^1(\mathrm{dlog}) \cong \omega \otimes \mathrm{Sym}^2\omega \otimes \det^{-1}\omega$ est égale à $(f_2e_1^2 - f_1e_1e_2) \otimes e_2 - (f_2e_1e_2 - f_1e_2^2) \otimes e_1$. Cette expression est bien dans le noyau de $\sigma \otimes Id_{\det^{-1}\omega}$.

On peut alors terminer le calcul de la différentielle $d^0 : \omega^{0,-1} \to \omega^{2,-1}$ en utilisant le scindage $\mathcal{C}^\infty$ de la filtration de Hodge de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{Z}$: $\overline{\omega} = \{\eta \in \mathcal{H}; \eta = \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ 1_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{f}, \quad f \in \omega\}$ s'envoie isomorphiquement sur $\omega^\vee$ par $\pi_1 : \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ 1_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{f} \mapsto h = (\overline{Z} - Z) \cdot \overline{f}$. Soit h une section de $\omega^{0,-1} = \omega^\vee$ et f une section $\mathcal{C}^\infty$ de ω telle que $(\overline{Z} - Z) \cdot \overline{f} = h$. On voit que d^0h s'obtient en appliquant $\sigma \circ \pi_1$ à

$$\nabla(\begin{pmatrix} \overline{Z} \\ 1_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{f}) = \begin{pmatrix} d\overline{Z} \\ 0_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{f} + \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ 1_2 \end{pmatrix} \cdot d\overline{f}$$

En appliquant π_1 à cette égalité et en utilisant $\overline{f} = (\overline{Z} - Z)^{-1} \cdot h$, on trouve

$$(\overline{Z} - Z) \cdot \big(d\overline{Z} \cdot (\overline{Z} - Z)^{-1}h + d[(\overline{Z} - Z)^{-1}h]\big)$$

or on sait que

$$d(\overline{Z} - Z)^{-1} = (\overline{Z} - Z)^{-1}dZ(\overline{Z} - Z)^{-1} - (\overline{Z} - Z)^{-1}d\overline{Z}(\overline{Z} - Z)^{-1}$$

d'où en appliquant σ : $d^0h = \sigma(dZ \cdot [(\overline{Z} - Z)^{-1}h] + dh)$. Mais on a vu ci-dessus que $dZ \cdot [(\overline{Z} - Z)^{-1}h] = \pi_1(\begin{pmatrix} dZ \\ 0_2 \end{pmatrix} \cdot \overline{f}) \in \mathrm{Ker}\,\sigma$, de sorte que

$$d^0h = \sigma(dh) \in \mathrm{Sym}^3\omega \otimes \det^{-1}\omega. \quad \square$$

On utilisera ce calcul de d^0 (et donc de d^2, par dualité) pour donner un exemple de calcul d'opérateurs de Hecke dans la Section 8.

8 Correspondances de Hecke et groupes de cohomologie

En prévision des sections 9 et 10, nous rappelons la définition et les compatibilités des actions des correspondances de Hecke sur les groupes de cohomologie étale, de de Rham, log-cristalline et cohérente des variétés de Siegel et leurs compactifications. On utilise les références [6] Chap.VII, Section 2,3,[34] et [22].

Soit X le schéma de modules sur $\mathbb{Z}_p$ associé à la variété de Shimura pour G de groupe de niveau $K = \prod_q K_q$ où $K_p = G(\mathbb{Z}_p)$ est maximal hyperspécial ; il classifie donc les triplets (A, λ, α_K) où A est une surface abélienne, λ une polarisation principale, et α_K est l'orbite sous K de la structure de niveau principale modulo N pour N tel que $U(N) \subset K$. On suppose K net ; X est alors un schéma quasi-projectif lisse sur $\mathbb{Z}_p$ muni d'une variété abélienne principalement polarisée avec structure de niveau α_K universelle au-dessus de X qu'on note $f : A \to X$. Rappelons que Q, resp. P désigne le parabolique maximal de Siegel, resp. de Klingen de G.

8.1 Correspondances de Hecke hors de Np

Pour tout nombre premier q premier à Np, on définit des schémas $X^Q(q)$ et $X^P(q)$: $X^Q(q)$, resp. $X^P(q)$, classifie les $(A, \lambda, \alpha_K, L)$ où L désigne un sous-schéma en groupes lagrangiens de $A[q]$ resp. $(A, \lambda, \alpha_K, \widetilde{D})$ où $\widetilde{D}$ est un sous-schéma en groupes fini et plat de rang q^4 de $A[q^2]$, totalement isotrope pour l'accouplement de Weil $\bigwedge^2 A[q^2] \to \mu_{q^2}$, et tel que son sous-groupe de q-torsion $H = \widetilde{D}[q]$ soit de rang q^3 ; notons qu'alors, $C = q \cdot \widetilde{D}$ est un sous-schéma en groupes fini et plat de rang q de H, de plus la surface abélienne $A/\widetilde{D}$ est principalement polarisée ; enfin, $D = \widetilde{D}/H$ est un sous-schéma fini et plat de rang q de A/H tel que l'isogénie $A/H \to A$ induite par la multiplication par q sur A envoie D sur C ; comme q est premier à p, $\widetilde{D}$, C, H et D sont étales et $D \to C$ est un isomorphisme. Notons que $X^Q(q)$ est un modèle de la variété de Siegel de niveau $K_Q = K^q \times \Pi^Q$ où Π^Q désigne le parahorique de Siegel opposé (consitué des matrices de $G(\mathbb{Z}_q)$ qui sont triangulaires inférieures par blocs modulo q), mais il faut prendre garde que $X^P(q)$ est associée à un groupe de niveau q^2 : on a un diagramme de revêtements (finis étales) non-triviaux $X(q^2) \to X^P(q) \to X(\Pi^P)$ où $X(q^2)$, resp. $X(\Pi^P)$ désigne le modèle canonique sur $\mathbb{Z}_p$ de la variété de Siegel de niveau $K^q \times U(q^2)$ resp. $K_P = K^q \times \Pi^P$ où Π^P désigne le parahorique de Klingen opposé de $G(\mathbb{Z}_q)$.

Dans les deux cas, $X^?(q)$ est muni d'une isogénie $\Pi : A \to A'$ entre deux surfaces abéliennes principalement polarisées ; pour $? = Q$, $A' = A/L$, et pour $? = P$, $A' = A/\widetilde{D}$.

Pour chaque parabolique Q, P, on définit deux projections $\pi_i^Q : X^Q(q) \to X$ $(i = 1, 2)$ et $\pi_i^P : X^P(q) \to X$ $(i = 1, 2)$ en posant $\pi_1^Q : (A, \lambda, \alpha_K, H) \mapsto (A, \lambda, \alpha_K)$, $\pi_2^Q : (A, \lambda, \alpha_K, H) \mapsto (A/H, \overline{\lambda}, \overline{\alpha}_K)$ où $\overline{\lambda}$, resp. $\overline{\alpha}_K$, désigne la polarisation principale, resp. la structure de niveau, déduite de $q \cdot \lambda$ resp. α_K dans le quotient modulo H, et $\pi_1^P : (A, \lambda, \alpha_K, \widetilde{D}) \mapsto (A, \lambda, \alpha_K)$, π_2^P : $(A, \lambda, \alpha_K, \widetilde{D}) \mapsto (A/\widetilde{D}, \overline{\lambda}, \overline{\alpha}_K)$ où les barres verticales désignent les réductions modulo ce groupe de $q^2 \cdot \lambda$, resp. α_K. Rappelons que la variété abélienne $A/\widetilde{D}$ est principalement polarisée (contrairement à A/H), de sorte que π_2^P est bien à valeurs dans X.

Pour q premier ne divisant pas Np, les morphismes π_1^Q, π_2^Q, resp. π_1^P, π_2^P sont finis et étales.

8.1.1 Cohomologie de Betti et étale

Rappelons d'abord la définition des correspondances $T_{q,?}$ ($? = Q, P$) sur le site de Betti, resp. étale sur $\mathbb{Q}$, pour (X, V_λ). En plus des $\pi_i^?$, on se donne le morphisme naturel $\beta_q^? : \pi_2^? \mathcal{V}_\lambda \to \pi_1^* \mathcal{V}_\lambda$ de faisceaux sur $X^?(q)$. Dans le cas de Betti sur $\mathbb{C}$ (sans compactification), on se donne l'idèle $\xi^? \in G_f$ dont toutes les composantes sont 1 sauf la q-ième qui vaut $\mathrm{diag}(q, q, 1, 1)$ pour $? = Q$ et $\mathrm{diag}(q^2, q, q, 1)$ si $? = P$. Notons $\xi^? = \xi$ pour alléger les notations. La première projection $\pi_1^?$ est induite par l'inclusion $K^?(q) = K \cap \xi K \xi^{-1} \subset K$ et le morphisme Id, et la seconde projection $\pi_2^?$ est induite par la même inclusion et par le morphisme $g \mapsto g\xi$. Le faisceau V_λ est le faisceau des sections du fibré

$$G_{\mathbb{Q}} \backslash (G_{\mathbb{A}} \times V_\lambda)/K \times C_\infty \to G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}/K \times C_\infty$$

l'action de K à droite sur V_λ étant donnée par $v \cdot k = k_p^{-1} v$.

Les sections de ce fibré sont les fonctions $s : G_{\mathbb{A}} \to V_\lambda$ telles que $s(gk) = s(g) \cdot k$ pour tout $k \in K$. Donc les sections de $(\pi_2^?)^* V_\lambda$ sont les fonctions $g \mapsto s(g\xi)$ telles que $s(g(\xi k \xi^{-1})\xi) = s(g\xi)\xi k \xi^{-1}$ pour tout $k \in K$. Le morphisme $\beta_q^? : \pi_2^? V_\lambda \to \pi_1^* V_\lambda$ est alors défini par $s(g\xi) \mapsto s(g\xi)\xi_p^{-1}$ (mais en fait $\xi_p = 1$).

Dans le cas étale, on définit $\beta_q^?$ par pléthysmes à partir du cas $\lambda = (1, 0; 1)$ (représentation standard de G), pour lequel $V_\lambda = R^1 \pi_* \mathbb{Z}_p$. On pose alors $T_{q,?} = \pi_{2,*} \circ \beta_q^? \circ \pi_1^*$.

8.1.2 Cohomologie de de Rham algébrique et log-cristalline

Définissons maintenant des prolongements des correspondances $T_{q,?}$ sur $(\overline{X}, \mathcal{V}_\lambda)$ sur $\mathbb{Z}_p$; même si l'on a fixé un éventail Σ pour définir $\overline{X}$, la définition de $T_{q,?}$ va dépendre du choix supplémentaire d'un raffinement Σ' convenable de Σ ; cependant, l'action de cette correspondance sur les cohomologies de de Rham et log-cristalline sur $\mathbb{Z}_p$, est canonique.

On considère les sous-groupes ouverts K_Q et K_P de K. Il résulte directement de [6], Chap.IV, Th.6.7 (2) qu'on peut choisir un éventail $\Sigma = (\Sigma_\alpha)$ de décompositions en cônes polyédraux rationnels (α parcourant l'ensemble des composantes rationnelles du bord), admissible à la fois pour les groupes de niveau K et $K_?$. Les morphismes d'oubli $\pi_1^?$ se prolongent alors en des morphismes $\overline{\pi}_1^? : \overline{X}^?(q) \to \overline{X}$ finis et plats (ramifiés le long du diviseur à l'infini), les compactifications étant relatives à l'éventail Σ. Considérons d'autre part l'éventail $\Sigma_? = \Sigma \cdot \xi_?^{-1}$, constitué des cônes ${}^t\overline{\xi}_?^{-1} \cdot \sigma \cdot \overline{\xi}_?^{-1}$ pour $\sigma \in \Sigma_\alpha$, où la barre désigne la projection de l'élément $\xi_?$ dans la "partie linéaire" associée à la composante rationnelle du bord α (et où l'action d'un élément adélique sur un espace vectoriel réel doit être interprétée de la manière usuelle). on peut alors prolonger les morphismes $\pi_2^?$ en des morphismes finis et plats $\overline{\pi}_2^? : \overline{X}^?(q)(\Sigma_?) \to \overline{X}(\Sigma)$ relatifs à deux compactifications pour deux éventails différents. Ces deux éventails Σ et $\Sigma_?$ sont admissibles pour $K^? = K \cap \xi_? K \xi_?^{-1}$; on choisit alors un raffinement Σ' de ces deux éventails admissible pour $K^?$; on peut alors former par composition les morphismes propres (mais qui ne sont plus finis) $\overline{\pi}_i^{?,\Sigma',\Sigma} : \overline{X}^?(q)(\Sigma') \to \overline{X}(\Sigma)$ pour $i = 1, 2$.

Dans le cas de de Rham algébrique, on définit

$$(\beta_q^?)^{\Sigma',\Sigma} : (\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^* \mathcal{V}_\lambda \to (\pi_1^{?,\Sigma',\Sigma})^* \mathcal{V}_\lambda$$

par pléthysmes à partir du cas $\mathcal{V}_{(1,0;1)} = \mathcal{H}^1_{ldR}(A/X)$. On a $(\overline{\pi}_2^?)^* \mathcal{V}_{(1,0;1)} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{ldR}}(A'/X^?(q))$ et $(\overline{\pi}_1^?)^* \mathcal{V}_{(1,0;1)} = \mathcal{H}^1_{\mathrm{ldR}}(A/X^?(q))$ et on définit $(\beta_q^?)^{\Sigma',\Sigma} : \mathcal{H}^1_{\mathrm{ldR}}(A'/X^?(q)) \to \mathcal{H}^1_{\mathrm{ldR}}(A/X^?(q))$ comme le pull-back par l'isogénie $\Pi : A \to A'$ au-dessus de $\overline{X}^?(q)$ définie au début de 8.1.

On peut alors former pour $? = Q, P$ la composée

$$T_{q,?}^{\Sigma',\Sigma} = (\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})_* \circ (\beta_q^?)^{\Sigma',\Sigma} \circ (\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^*$$

des trois morphismes des modules gradués de de Rham :

$(\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^* : \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}(\Sigma)}(\mathrm{dlog}) \to (\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^* \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}^?(q)(\Sigma')}(\mathrm{dlog})$,

$(\beta_q^?))^{\Sigma',\Sigma} : (\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^* \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}^?(q)(\Sigma')}(\mathrm{dlog}) \to (\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})^* \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}^?(q)(\Sigma')}(\mathrm{dlog})$,

$(\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})_* : (\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})^* \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}^?(q)(\Sigma')}(\mathrm{dlog}) \to \mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}(\Sigma)}(\mathrm{dlog})$.

On peut définir l'image directe $(\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})_*$ comme dans [6] VII.3, p.256, comme l'application duale de $(\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})^*$ via la dualité de Poincaré. L'opérateur de Hecke $T_{q,?}^{\Sigma',\Sigma}$ commute à la connexion de Gauss-Manin définissant le complexe de de Rham ; il définit donc un endomorphisme du complexe de de Rham. En effet, la formation de cette connexion commute aux images inverses et aux images directes par des morphismes finis. On peut aussi le voir par pléthysme à partir du cas $\mathcal{V}_{(1,0;1)} = \mathcal{H}^1_{ldR}(A/X)$. Nous donnerons plus bas le calcul explicite sur $\mathbb{C}$ dans ce cas.

Pour la cohomologie log-cristalline, on procède de même ; notons que la dualité de Poincaré est établie dans ca cas par Tsuji [33] (Théorème de l'Introduction). Comme mentionné dans [6] Chap.VI Sect.3, l'action de $T_{q,?}^{\Sigma',\Sigma}$ sur la cohomologie log de Rham ou log-cristalline ne dépend pas des compactifications. Voir [20] 6.4.3 pour les détails.

On note $T_{q,?}$ les endomorphismes de $H^\bullet_{\mathrm{lcr}}(X, \mathcal{V}_\lambda)$ resp. $H^\bullet_{\mathrm{ldR}}(X/\mathbb{Z}_p, \mathcal{V}_\lambda)$ induits par les correspondances ci-dessus. Ces endomorphismes commutent ; en effet, comme ce groupe de cohomologie ne dépend pas du choix de l'éventail Σ choisi pour former la compactification toroidale, étant donnés deux opérateurs de Hecke, on peut choisir un éventail admissible pour les groupes de niveau définis par les deux opérateurs, et la définition des correspondances sur les compactifications étant alors identique à celle pour les variétés de Siegel non compactifiées, on obtient formellement la commutation des endomorphismes qu'elles définissent.

Soit $\mathcal{H}^{Np}$ la $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Hecke produit tensoriel restreint des algèbres de Hecke sphériques de G pour tous les premiers q ne divisant pas Np. Cette algèbre est isomorphe à la $\mathbb{Z}_p$-algèbre de polynômes en les indéterminées indexées par les classes doubles de $T_{q,0} = K_q \mathrm{diag}(q, q, q, q,)K_q$ et

$$T_{q,1} = K_q \mathrm{diag}(q, q, 1, 1)K_q,\ T_{q,2} = K_q \mathrm{diag}(q^2, q, q, 1)K_q$$

où $K_q = G(\mathbb{Z}_q)$, pour tout q premier ne divisant pas Np et $i = 0, 1, 2$. On définit en suivant [6] Chapt.VII Sect.2,3, un homomorphisme de cette algèbre vers l'algèbre des endomorphismes des cohomologies étale de X, resp. log-de Rham, resp. log-cristalline de $\overline{X}$, appliquant $T_{q,1}$ sur $T_{q,Q}$, resp. $T_{q,2}$ sur $T_{q,P}$.

8.1.3 Cohomologie cohérente

Ces correspondances agissent aussi sur la cohomologie cohérente des faisceaux automorphes $\omega^{i,j}$ (et sur leur partie cuspidale). La définition est encore donnée par la composée de trois morphismes de faisceaux :

$$T_{q,?}^{\Sigma',\Sigma} = \mathrm{Tr}^{?,\Sigma',\Sigma} \circ (\beta_q^?)^{\Sigma',\Sigma} \circ (\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^*$$

où $(\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^*$ est défini comme ci-dessus en remplaçant le complexe de de Rham $\mathcal{V}_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{\overline{X}^Q(q)}(\mathrm{dlog})$ par le faisceau $\omega^{i,j}$, et où $\beta_q^?$ désigne le morphisme de faisceaux $(\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^*\omega^{i,j} \to (\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})^*\omega^{i,j}$ construit par pléthysmes à partir du cas $\lambda = (1, 0; 1)$ (représentation standard de $M = GL_2 \times \mathbb{G}_m$) ; dans ce cas, on prend pour $\beta_q^?$ le morphisme de pull-back de $\omega_{\mathcal{G}'/\overline{X}^?(q)} = (\overline{\pi}_2^{?,\Sigma',\Sigma})^*\omega$ vers $\omega_{\mathcal{G}/\overline{X}^?(q)} = (\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})^*\omega$ donné par l'isogénie $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ qui prolonge l'isogénie $\Pi : A \to A'$ au-dessus de $\overline{X}^?(q)$ définie au début de la Section 8.1, et enfin, $(\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})_*$, la trace normalisée $\mathrm{Tr}^{?,\Sigma',\Sigma}$ définie par $\mathrm{Tr}^{?,\Sigma',\Sigma} = q^{-3i} \cdot (\overline{\pi}_1^{?,\Sigma',\Sigma})_*$.

Remarques : 1) Pour $T_{q,2}$, notre normalisation par q^{-6} diffère de celle de [15], mais correspond à celle de [22] 1.11.13 ; elle est naturelle dans le contexte des twists de Hecke intervenant dans la description $(BGG_2^\vee)$ du complexe BGG dual. En fait, avec notre normalisation des opérateurs de Hecke, on aura l'équivariance sous Hecke de l'inclusion $H^0(\overline{X}, \omega^{k,\ell}(-3)) \subset H^3_{ldR}(X, \mathcal{V}_\lambda)$ par le Lemme 8.1 ci-dessous.

2) L'action sur la cohomologie cohérente ne dépend pas des éventails choisis, par le principe de Koecher.

Considèrons le complexe BGG dual $\mathcal{K}_\lambda^\bullet$ muni des différentielles d^j ; On a

Lemme 8.1 *1) L'action de $\mathcal{H}^{Np}$ commute au projecteur canonique de modules filtrés $\mathcal{H}_\lambda^\bullet \to \mathcal{K}_\lambda^\bullet$,*

2) L'action de $\mathcal{H}^{Np}$ commute aux différentielles d^j.

Démonstration : 1) Par la remarque suivant le Th.2, ce projecteur est donné par des correspondances algébriques "verticales" sur $\overline{X}$. Sa formation commute donc aux projections algébriques sur $\overline{X}$.

2) Les correspondances algébriques sur $\overline{X}$ commutent aux différentielles du complexe de de Rham (car la formation de la connexion de Gauss-Manin commute aux correspondances algébriques) ; en utilisant le premier énoncé, on en déduit donc le second.

Exemple sur $\mathbb{C}$: Donnons le calcul des $T_{q,?}$ pour le complexe de de Rham de $\mathcal{H} = \mathcal{V}_{(1,0;1)}$ au-dessus d'une composante connexe de X^{an} de la forme $\Gamma\backslash\mathcal{Z}$.

Soit $\beta^Q = \mathrm{diag}(1,1,q,q)$ $\quad\beta^P = \mathrm{diag}(1,q,q^2,q)$, et $(\epsilon_t^?)$ un système de représentants de $\Gamma/(\beta_q^?)^{-1}\Gamma\beta_q^? \cap \Gamma$, et $\beta_t^? = \beta^? \circ \epsilon_t$.

L'inclusion $i : \omega \to \mathcal{H}$ est donnée par $f \mapsto \begin{pmatrix} Z \\ 1_2 \end{pmatrix} \cdot f$. On trouve que pour tout $Z \in \mathcal{Z}$, la fibre en Z de l'isogénie $\Pi^? : A \to A'$ est donnée par $\mathbb{C}^2/Z\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}^2/\beta(Z)\mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}^2$, $u \mapsto \nu(\beta)^t j(\beta, Z)^{-1} \cdot u$. On trouve donc que $\beta_q^? : \mathcal{V}_{(1,0;1)} \to \mathcal{V}_{(1,0;1)}$ est donné par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \nu(\beta)\beta^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, et $\beta_q^? : \omega \to \omega$ est donné par $f \mapsto \nu(\beta)j(\beta, Z)^{-1} \cdot f$.

On trouve donc que pour tout $\xi \in \mathcal{H}$, on a $T^*_{q,?}\xi = \nu(\beta)\sum_t \beta_t^{-1} \cdot \beta_t^*\xi$, et pour tout $\omega_f \in \omega$, $T^*_{q,?}\omega_f = \nu(\alpha)\sum_t j(\beta_t, Z)^{-1} \cdot \beta_t^*\omega_f$ et on voit immédiatement que $T_{q,?}$ commute à i. De plus, posons pour toute section ω_h de $\omega^\vee$, $T^*_{q,?}\omega_h = \sum_t {}^t j(\beta_t, Z) \cdot \omega_h$. En utilisant le scindage de Hodge $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{X}$, on voit qu'il existe une unique section f holomorphe de ω telle que $(\overline{Z} - Z) \cdot \overline{f} = h$, et on a $\pi_0(T^*_{q,i}\begin{pmatrix}\overline{Z}\\ 1_2\end{pmatrix}\cdot\overline{f})=T^*_{q,i}\omega_h$. En utilisant la formule

$$^tj(\beta,Z)\cdot(\overline{\beta(Z)}-\beta(Z))=\nu(\beta)\cdot(\overline{Z}-Z)\cdot\overline{j(\beta,Z)^{-1}},$$

on voit alors que $T^*_{q,i}\omega_h=\omega_{h'}$ avec $h'=\sum_t {}^tj(\beta_t,Z)\cdot h(\beta_t(Z))$.

Vérifions aussi dans cet exemple que la différentielle d^0 de BGG commute à $T_{q,?}$ à twist près. On a calculé $d^0:\omega^{0,-1}\to\omega^{2,-1}$ dans l'Exemple 2 suivant le Théorème 2, Sect.7. $d^0\omega_h=\omega_{h_1}$ où

$$h_1=\sigma\circ\pi_1\circ\nabla^0(\begin{pmatrix}\overline{Z}\\ 1_2\end{pmatrix}\cdot\overline{f})=\sigma((\overline{Z}-Z).d\overline{f}(Z)).$$

Posons $T_{q,?}=T_\beta$. On a $d^0(T^*_\beta\omega_h)=\omega_{h_2}$ où h_2 est obtenue en appliquant $\sigma\circ\pi_1$ à

$$\nabla\left(\nu(\beta)\sum_t(\beta^?_t)^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\beta^?_t(\overline{Z})\\ 1_2\end{pmatrix}\cdot f\circ\beta^?_t\right)=$$

$$=\nu(\beta)\sum_t(\beta^?_t)^{-1}\cdot[\begin{pmatrix}d\beta^?_t(\overline{Z})\\ 0\end{pmatrix}\cdot f\circ\beta^?_t+\begin{pmatrix}\beta^?_t(\overline{Z})\\ 1_2\end{pmatrix}\cdot d(f\circ\beta^?_t)]$$

Ce qui donne

$$h_2=\nu(\beta)\sigma(\sum_t(\overline{Z}-Z)\cdot\overline{j(\beta_t,Z)^{-1}}d\overline{f(\beta_tZ)})=$$

$$=\nu(\beta)\sum_t\nu(\beta)^{-1}\cdot{}^tj(\beta_t,Z)\cdot\sigma((\overline{\beta_t(Z)}-\beta_t(Z))\cdot d\overline{f}(\beta_t(Z))$$

ou encore

$$h_2=\sum_t{}^tj(\beta_t,Z)\cdot\sigma((\overline{\beta_t(Z)}-\beta_t(Z))\cdot d\overline{f}(\beta_t(Z)).$$

D'autre part, $T^*_\beta\omega_{h_1}=\omega_{h_3}$ avec

$$h_3=\nu(\beta)\sum_t j(\beta^?_t,Z)^{-1}\bullet\sigma((\overline{\beta_t(Z)}-\beta_t(Z)\cdot d\overline{f}(\beta_t(Z)))$$

où $\bullet$ désigne l'action sur $\mathrm{Sym}^3\omega\otimes\det^{-1}\omega$, compatible via σ avec l'action de GL_2 sur $\omega^\vee\otimes\mathrm{Sym}^2\omega$. On voit donc que $h_3=\nu(\beta)h_2$, soit $d^0(T^*_\beta\omega_h)=\nu(\beta)^{-1}T^*_\beta(d^0\omega_h)$.

Si h est une forme de Siegel cuspidale de poids $(u,v))$ (avec $u \geq v$), on note pour toute classe double $\Gamma\beta\Gamma$ telle que $\det\beta$ soit premier à N :

$$h|_{u,v}T_\beta = \nu(\beta)\sum_t j(\beta_t, Z)^{-1} \cdot f(\beta_t(Z)).$$

Pour une telle forme h, soit ω_h la section de $\omega^{u,v}$ associée. Par pléthysmes à partir du calcul ci-dessus, on a $T^*_\beta\omega_h = \omega_{h|_{u,v}T_\beta}$. On déduit alors du lemme précédent et de l'exemple ci-dessus le

Corollaire 8.2 *Soit f de poids (k,ℓ) propre pour T_β de valeur propre a_β, resp. g de poids $(k, 4-\ell)$ propre pour T_β de valeur propre b_β, et si $\omega_f = d^2\omega_g$, on a $a_\beta = b_\beta\nu(\beta)^{\ell-2}$.*

En particulier si $f|T_{q,i} = a_{q,i}f$, $g|T_{q,i} = b_{q,i}g$ $(i = 1, 2)$ et si $d^2\omega_g = \omega_f$, on a : $a_{q,i} = b_{q,i}q^{i(\ell-2)}$.

Démonstration : On sait que les différentielles d^j du complexe BGG dual commutent aux opérateurs de Hecke. Or, par $(BGG_2^\vee)$, Sect.7, on a $\mathcal{K}^2 = \omega^{k,4-\ell}(\ell-5)$ et $\mathcal{K}^3 = \omega^{k,\ell}(-3)$. Les formes f, resp. g définissent des sections de $\omega^{k,\ell}$ resp. $\omega^{k,4-\ell}$, de sorte que $\nu(\beta)^{\ell-2} \cdot d^2 \circ T^*_\beta\omega_g = T^*_\beta \circ d^2\omega_g$.

Exemple : Pour $\mathcal{V}_{(1,0;1)}$, le calcul sur $\mathbb{C}$ de $d^0 : \omega^{0,-1} \to \omega^{2,-1}$ montre que $(d^0h)|_{2,-1}T_\beta = \nu(\beta)d^0(h|_{0,-1}T_\beta)$ puisque $T^*_\beta d^0 = \nu(\beta)d^0T^*_\beta$. $\square$.

On définit également des prolongements $\widehat{\pi}^?_i : X^?(q)^* \to X^*$ des $\pi^?_i$ aux compactifications minimales de $X^?(q)$ et X sur $\mathbb{Z}_p$; soient $T_{q,?}$ les correspondances sur X^* définies par $(\widehat{\pi}^?_1, \widehat{\pi}^?_2)$; notons que les morphismes $\widehat{\pi}^?_i$ sont compatibles aux stratifications des compactifications minimales ; il est classique qu'ils induisent par restriction aux courbes modulaires qui sont les composantes connexes de la strate de dimension 1, les opérateurs de Hecke pour GL_2 notés T_q (pour $? = Q$) et S_q (pour $? = P$), voir par exemple [21], Sect.7. Dans le langage classique, c'est la théorie des opérateurs de Siegel (exposée par exemple dans [1]).

Lemme 8.3 *Les correspondances ainsi définies sont compatibles au morphisme propre $\pi : \overline{X} \to X^*$ ainsi qu'à ses restrictions aux strates de dimension* 1 *et* 0 *de X^*.*

Démonstration : Soit $\pi^? : \overline{X}^?(q) \to X^?(q)^*$ l'analogue de π pour $X^?(q)$. On a $\widehat{\pi}^?_i \circ \pi^? = \pi \circ \overline{\pi}^?_i$; cette formule résulte de [6], Chap.V, Th.2.3 et 2.5 qui décrivent la restriction de π au bord et sa compatibilité au changement de niveau. Ceci entraîne la compatibilité de $T_{q,?}$ avec π et ses restrictions aux strates.

En particulier, considérons la restriction $\pi_1 : D_1 \to X_1$ de π à une composante connexe X_1 de la strate de dimension 1 de X^*. L'action de l'opérateur $T_{q,1}$ resp. $T_{q,2}$ induit sur X_1 resp. D_1 l'action de l'opérateur T_q resp. S_q pour GL_2 (avec les notations classiques pour ces opérateurs). Voir [1] Chap.3.

8.2 Correspondances de Hecke en p

Lorsque $q = p$, on peut bien sûr définir les correspondances $T_{p,i}$ agissant sur $X \otimes \mathbb{Q}_p$ en cohomologie de Betti, de de Rham, cohérente (en utilisant pour cette dernière la trace normalisée $\mathrm{Tr} = p^{-3i} \cdot \overline{\pi}^{?,\Sigma',\Sigma}$, pour assurer la compatibilité avec la filtration de Hodge).

On va aussi définir des correspondances $U_{p,i}$ agissant sur le lieu ordinaire V de X (comme schéma sur $\mathbb{F}_p$ ou schéma formel sur $\mathbb{Z}_p$), sur sa compactification minimale V^*, resp. sur des compactifications toroïdales $\overline{V}$ assez fines, de manière compatible à la projection $\pi : \overline{V} \to V^*$. Ces correspondances définissent des endomorphismes associés $U_{p,i}$ sur la cohomologie cohérente et la cohomologie log de Rham de $\overline{V}$ qui interviendront dans la Section 10.2. La comparaison de $T_{p,2}$ et $U_{p,2}$ jouera un rôle important dans 10.3.

Considérons les $\mathbb{Q}_p$-schémas quasi-projectifs $X^?(p)$ ($? = Q, P$) avec leurs projections $\pi_i^?$ ($i = 1, 2$) sur X, définis exactement comme lorsque $q \neq p$; en particulier, ces morphismes sont finis étales.

On peut prolonger $X^Q(p)$ à $\mathbb{Z}_p$ comme le schéma de modules des (A, α_K, L) où L désigne un sous-schéma en groupes d'ordre p^2 lagrangien pour l'accouplement de Weil sur $A[p]$, de manière équivalente, $X^Q(p)$ est aussi le schéma de modules des isogénies $\Pi : A \to A'$ de surfaces abéliennes principalement polarisées de noyau fini et plat de rang p^2. On note $V^Q(p)$ l'ouvert de ses points ordinaires. Pour toute variété abélienne ordinaire A, soit $L_A \subset A[p]$ son sous-groupe canonique. Soit $W^Q(p)$ le sous-schéma ouvert de $V^Q(p)$ lieu des points (A, α_K, L) où le lagrangien L est étale (ou, de manière équivalente, tel que l'addition $L \times L_A \to A[p]$ définisse un isomorphisme de schémas en groupes). Les restrictions $\pi_i^Q : W^Q(p) \to V$ des projections $\pi_i^Q : X^Q(p) \to X$ sont des morphismes finis et plats qui définissent une correspondance $(W^Q(p), \pi_1^Q, \pi_2^Q)$ sur le schéma (formel) V.

De même, le problème de modules sur la catégorie des $\mathbb{Z}_p$-schémas :

$$S \mapsto \{(A, \lambda, \alpha_K, \widetilde{D})_{/S}\}/\sim$$

où $\widetilde{D}$ est un sous-schéma fini et plat de rang p^4 de $A[p^2]$, totalement isotrope et tel que $H = \widetilde{D}[p]$ soit fini et plat de rang p^3, est représentable et fournit un modèle sur $\mathbb{Z}_p$ pour $X^P(p)$; cependant, le morphisme d'oubli $\pi_1^P : X^P(p) \to X$ n'est plus propre. Je remercie V. Pilloni pour avoir attiré mon attention sur cette difficulté. Heureusement, les restrictions aux lieux ordinaires suffisent la plupart du temps dans cet article (voir cependant le Lemme 8.5), nous nous limitons donc aux correspondances de Hecke sur V, $\overline{V}$ et V^* dans ce qui suit.

Considérons donc l'image inverse $V^P(p)$ de V par π_1^P. On forme à nouveau un ouvert $W^P(p)$ de $V^P(p)$, lieu des $(A, \alpha_K, \widetilde{D})$ tels que $L_A \cap \widetilde{D}$ soit de rang p. Sur cet ouvert, la composante neutre de $\widetilde{D}$ est $\widetilde{D}^0 \cong \mu_p$ et sa composante étale est $\widetilde{D}^{\mathrm{et}} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Les deux projections $\pi_i^P : W^P(p) \to V$ sont des morphismes finis et plats. On définit alors une correspondance sur V par $(W^P(p), \pi_1^P, \pi_2^P)$.

Remarque :

La projection $\pi_1^Q : V^Q(p) \to V$ possède une section s^Q donnée par le sous-groupe canonique de la variété ordinaire universelle A au-dessus de V. Soit $\phi = \pi_2 \circ s^Q$; on l'appelle relèvement canonique du Frobenius à V sur $\mathbb{Z}_p$. Le quotient de la variété universelle ordinaire par son sous-groupe canonique L_A s'insère dans le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} A/L_A & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \stackrel{\phi}{\to} & V \end{array}$$

Pour définir les actions de ces correspondances en cohomologie de de Rham logarithmique, on prolonge les morphismes $\pi_i^?$ à des compactifications toroïdales. On forme d'abord les compactifications toroïdales de $X^Q(p)$ et $V^P(p)$ associées à une famille $K^?(p)$-admissible Σ de décompositions en cônes polyédraux rationnels, comme dans la thèse de B. Stroh [27] ; on se limite dans les deux cas au lieu ordinaire $\overline{V}^?(p)$. Ces compactifications sont munies de schémas semi-abéliens principalement polarisés $\mathcal{G}^? \to \overline{V}^?(p)$ prolongeant la surface abélienne ordinaire universelle $A^? \to V^?(p)$. On se restreint dans ce qui suit aux ouverts $\overline{W}^?(p)$ de $\overline{V}^?(p)$ définis comme les ouverts $W^?(p)$ mais en utilisant le schéma semi-abélien $\mathcal{G}^?$. Après avoir choisi un éventail compatible avec les groupes de niveau $K^?(p)$, $? = Q, P$, on obtient de nouveau des morphismes finis plats $\overline{\pi}_i^? : \overline{W}^?(p) \to \overline{V}$ prolongeant les morphismes finis et plats $\pi_i^? : W^?(p) \to V$; le morphisme $\beta_p^?$: est bien défini par pléthysmes, à condition que $k + j - 3 < p - 1$ (voir [21]), à partir du pull-back $\pi^* : \mathcal{H}^1_{ldR}(A'/\overline{V}^?(p)) \to \mathcal{H}^1_{ldR}(A/\overline{V}^?(p))$ par l'isogénie $\Pi : A \to A'$ comme lorsque $q \neq p$; on note alors $\widetilde{U}_{p,?} = (\overline{\pi}_1^?)_* \circ \beta_p^? \circ (\overline{\pi}_2^?)^*$, $? = Q, P$ les correspondances de Hecke sur les groupes de cohomologie de de Rham de $\overline{V}$ ainsi définies.

Notons que $\overline{\pi}_1^Q : \overline{V}^Q(p) \to \overline{V}$ possède une section s^Q sur $\overline{V}$ donnée par le sous-groupe canonique du schéma semi-abélien $\mathcal{G}$ (qui est ordinaire au-dessus de $\overline{V}$). Le morphisme composé $\phi = \overline{\pi}_2^Q \circ s^Q : \overline{V} \to \overline{V}$ de schémas formels sur $\mathbb{Z}_p$ est le relèvement canonique de l'endomorphisme de Frobenius en caractéristique p ; il prolonge l'homomorphisme $\phi : V \to V$.

Pour l'action sur la cohomologie des faisceaux cohérents $\omega^{i,j}$ sur le $\mathbb{Z}_p$-schéma formel $\overline{V}$, on forme $U_{p,1} = p^{-3} \cdot \widetilde{U}_{p,Q}$ et $U_{p,2} = p^{-3-j} \cdot \widetilde{U}_{p,P}$ les morphismes de faisceaux $\alpha_p^? : (\overline{\pi}_2^?)^*\omega^{i,j} \to (\overline{\pi}_1^?)^*\omega^{i,j}$ sont définis comme les morphismes de pull-back par l'isogénie $\Pi : A \to A/L$ (pour $? = Q$), resp. par $A \to \widetilde{D}$ (pour $? = P$). Rappelons la propriété d'intégralité de ces opérateurs (due à Hida [15], voir aussi [22] Appendice au Chap.1) :

Lemme 8.4 *Les opérateurs divisés $U_{p,i}$ préservent les structures entières sur $\mathbb{Z}_p$ de $H^0(\overline{V}, \omega^{i,j})$*

Démonstration : Pour $? = Q, P$, soient $\overline{\pi}_i^? : \overline{W}^?(p) \to \overline{V}$ les deux morphismes de schémas formels sur $\mathbb{Z}_p$ définissant $\widetilde{U}_{p,?}$. On observe d'abord que le morphisme d'image directe $(\overline{\pi}_1^?)_*$ est divisible par le degré p^3 du morphisme radiciel $\overline{\pi}_1^? : W^?(p) \to V$ pour $? = Q$ ou $? = P$; voir [22], Chap.1, Sect.1.10.1, Cor.1.10.1 à la Prop.1.10.3, noter que le lemme invoqué dans la démonstration du corollaire est le Lemme 1.10.1 et non 4.3.4. Ensuite, on note que $\alpha_p^?$ est entière pour $? = Q$, resp. est divisible par p^j si $? = P$. En effet, cette application linéaire est donnée par faisceautisation de l'action sur $\mathrm{Sym}^{i-j} \otimes \det^j \mathbb{Z}_p^2$ de la matrice entière 1_2 (si $? = Q$) resp. de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ (si $? = P$), qui est divisible par p^j.

On peut aussi voir directement que $\widetilde{U}_{p,2}$ est divisible par p^{3+j} en utilisant le principe du q-développement comme dans Sect.3.6 de [15] (avant Prop.3.5).

Lemme 8.5 *Pour $k \geq j \geq 3$, l'action des correspondances $T_{p,i}$ (a priori définies sur $X \otimes \mathbb{Q}_p$) préserve la structure entière $H^0(X_{\mathbb{Z}_p}, \omega^{k,j})$ et on a*

$$T_{p,1}|_V \equiv U_{p,1} \pmod p, \quad p^{3-j}T_{p,2}|_V \equiv U_{p,2} \pmod p.$$

Démonstration : La partie concernant l'opérateur $T_{p,1}$ est établie dans l'Appendice 1 au Chapitre 1 de la thèse de Vincent Pilloni. Noter que l'entier noté N_g dans la Proposition 1.10.4 de l'Appendice 1 n'est autre que g, genre de la variété de Siegel. Par exemple pour $g = 2$, $N_g = 2$ et l'inégalité $k_g > N_g$ devient ici $j \geq 3$. En fait, nous allons suivre la même méthode pour établir le résultat pour $T_{p,2}$. Par densité du lieu ordinaire, ou bien par le principe du

q-développement, on a $H^0(X_{\mathbb{Z}_p}, \omega^{k,j}) = H^0(X_{\mathbb{Q}_p}, \omega^{k,j}) \cap H^0(S_\infty, \omega^{k,j})$. Il suffit donc de montrer l'intégralité de $T_{p,2}f$ pour $f \in H^0(\widehat{X}_x, \omega^{k,j})$, où x désigne un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-point x dont la réduction modulo p est dans le lieu ordinaire V de $X \otimes \mathbb{F}_p$. Pour alléger les notations, on note π_i au lieu de π_i^P les projections de $X^P(p)$ vers X. Soit $\mathcal{Y}$ l'image inverse de x par π_2 dans $X^P(p)$. Soit $y = (A \xrightarrow{f} A') \in \mathcal{Y}$; le noyau $\widetilde{D} = \mathrm{Ker}\, f$ de l'isogénie $f : A \to A'$ est isomorphe à $\mu_p \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (cas (1)), ou à $\mu_p \times \mu_{p^2} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (cas (2)). Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X^P(p)$, on note $\mathcal{F}_y = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X^P(p)}} \widehat{\mathcal{O}}_{X^P(p),y}$.

Sous-Lemme 8.6 *On a les divisibilités suivantes*

- *Dans le cas* (1), $\pi_{1,*}\widehat{\mathcal{O}}_{X^P(p),y} \subset p^3 \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X,\pi_1(y)}$ *et* $\alpha_p^P \pi_2^* \omega_y^{k,j} \subset p^j \pi_1^* \omega_y^{k,j}$,
- *Dans le cas* (2), $\pi_{1,*}\widehat{\mathcal{O}}_{X^P(p),y} \subset p \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X,\pi_1(y)}$ *et* $\alpha_p^P \pi_2^* \omega_y^{k,j} \subset p^{2j} \pi_1^* \omega_y^{k,j}$,

Admettons d'abord cet énoncé et notons $\widetilde{T}_{p,2,y}$ la composée

$$H^0(\widehat{X}_x, \omega^{k,j}) \to H^0(\widehat{X^P(p)}_y, \pi_2^*\omega^{k,j}) \xrightarrow{\alpha_p^P} H^0(\widehat{X^P(p)}_y, \pi_1^*\omega^{k,j}) \xrightarrow{\pi_{1,*}} H^0(\widehat{X}_{\pi_1(y)}, \omega^{k,j})$$

L'action de $T_{p,2}$ sur $H^0(\widehat{X}_x, \omega^{k,j})$ est la somme des contributions $p^{-6} \cdot \widetilde{T}_{p,2,y}$ pour $y \in \mathcal{Y}$; donc $p^{3-j} \cdot T_{p,2}$ est la somme des $p^{-3-j} \cdot \widetilde{T}_{p,2,y}$. Notons que $1 + 2j > 3 + j$ puisque $j \geq 3$.

On observe alors que la définition de $U_{p,2}$ ne permet de considérer que les points y tels que le schéma en groupes $\widetilde{D} \cap L_A$ est de rang p. Ces points sont exactement ceux du cas (1). On trouve donc que pour y dans le cas (1), les contributions $p^{3-j}T_{p,2,y}$ et $U_{p,2,y}$ coïcident, tandis que pour y dans le cas (2), les contributions de $p^{-3-j}\widetilde{T}_{p,2,y}$ sont divisibles par p. Ceci montre que le Sous-Lemme entraîne le Lemme.

Démonstration du Sous-Lemme : Pour la première assertion, fixons un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-point $y = (A \xrightarrow{f} B)$, donné par une isogénie compatible aux polarisations des surfaces abéliennes principalement polarisées ; notons que $X^P(p)$ est lisse en ce point ; la théorie de Serre-Tate ([18] Th.2.1, plus précisément, voir page 153) fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X^P(p)}_y & \to & \mathrm{Spec}\, W[[T_1, T_2, T_3]] \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow v \\ \widehat{X}_{\pi_1(y)} & \to & \mathrm{Spec}\, W[[T_1, T_2, T_3]] \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes et la flèche verticale de droite v est donnée par $T_1 \mapsto (1 + T_1)^{p^2} - 1, T_2 \mapsto (1 + T_2)^p - 1$ et $T_3 \mapsto T_3$

dans le cas (1), et par $T_1 \mapsto (1+T_1)^p - 1$ et $T_i \mapsto T_i$ pour $i = 2, 3$ dans le cas (2). Le morphisme v est de fibre spéciale purement inséparable et est un torseur sous $\mu_{p^2} \times \mu_p$ dans le cas (1) et sous μ_p dans le cas (2). Ceci montre que $\pi_{1,*}\widehat{\mathcal{O}}_{X^P(p),y} \subset p^3 \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X,\pi_1(y)}$ dans le cas (1) et $\pi_{1,*}\widehat{\mathcal{O}}_{X^P(p),y} \subset p \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X,\pi_1(y)}$ dans le cas (2).

D'autre part, fixons des rigidifications $\psi : \mu_{p^\infty}^2 \cong A[p^\infty]^o$ et $\psi' : \mu_{p^\infty}^2 \cong B[p^\infty]^o$; on en déduit, par un argument bien connu dû à Katz, des bases ω_ψ resp. $\omega_{\psi'}$ de $\pi_1^*\omega$ resp. $\pi_2^*\omega$ (et donc de $\pi_1^*\omega^{k,j}$ resp. $\pi_2^*\omega^{k,j}$). Dans le cas (1), la matrice de $f^* : \pi_2^*\omega \to \pi_1^*\omega$ dans ces bases est conjuguée à $\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}$. On trouve donc (par pléthysmes par exemple) que la matrice de $\beta_p^P : \pi_2^*\omega^{k,j} \to \pi_1^*\omega^{k,j}$ est divisible par p^j (exactement). Dans le cas (2), la matrice de $f^* : \pi_2^*\omega \to \pi_1^*\omega$ dans ces bases est conjuguée à $\begin{pmatrix} p^2 & \\ & p \end{pmatrix}$ de sorte que la matrice de $\beta_p^P : \pi_2^*\omega^{k,j} \to \pi_1^*\omega^{k,j}$ est divisible par p^{2j} (exactement). Le Sous-Lemme est donc démontré.

Nous démontrons un dernier lemme sur l'opérateur $U_{p,2}$ et les invariants de Hasse généralisés définis dans [22], Appendice 2 au Chapitre 1. Nous notons $H^{(1)} \in H^0(X, \omega^{p-1,p-1})$ l'invariant de Hasse scalaire et $H^{(2)} \in H^0(X, \omega^{p,-1})$ l'autre invariant de Hasse (dont l'existence a été notée par L. Clozel dans un exposé à Paris 13 en 1995, mais qui n'a été rédigée que dans [22]).

Lemme 8.7 *La multiplication par $H^{(1)}$ commute à $U_{p,2}$ mais pas la multiplication par $H^{(2)}$.*

Démonstration : Soit R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate p-adiquement complète munie d'un relèvement τ du Frobenius de $R \otimes \mathbb{F}_p$; on prendra pour R une extension non ramifiée de $\mathbb{Z}_p$ pour pouvoir appliquer 1.3.1 de [22]. Pour tout poids $\kappa = (k, j)$ avec $k \geq j$, on utilise l'interprétation de $W_\kappa(R)$ comme le module des fonctions algébriques $GL_2(R) \to R$ telles que $f(gtn^-) = t_1^{-k} t_2^{-j} f(g)$ pour $t = \begin{pmatrix} t_1 & \\ & t_2 \end{pmatrix}$, avec $t_i \in R^\times$, et $n^- \in N^-(R)$ (le groupe des matrices unipotentes inférieures). On introduit alors la structure entière saturée $\widetilde{W}_\kappa(R)$ donnée par $W_\kappa(R[\frac{1}{p}]) \cap \mathcal{F}(GL_2(R), R)$. L'opérateur $U_{p,2}$ agit sur le faisceau $\widetilde{\omega}^\kappa$ (Section 1.51 de [22]). On définit de même les structures saturées tordues $\widetilde{W}_{k\tau+j}(R)$ et $\widetilde{\omega}^{k\tau+j}$ où l'on remplace la condition $f(gtn^-) = t_1^{-k} t_2^{-j} f(g)$ par $f(gtn^-) = t_1^{-k\tau} t_2^{-j} f(g)$. On voit alors que $H^{(2)}$ est non nul dans $H^0(V \otimes R \otimes \mathbb{F}_p, \widetilde{\omega}^{\tau,-1})$ si $R \otimes \mathbb{F}_p$ contient l'extension quadratique de $\mathbb{F}_p$. Ceci résulte de la description de $H^{(2)}$ dans Chap.1, Appendice 2, [22].

Soit σ un cône polyédral rationnel dans un décomposition admissible Σ (voir [6] Chap.3) pour X ; soit $S_\sigma = \mathbb{Z}_p[[q^T; T \in S_2(\mathbb{Z})^* \cap \sigma^\vee]]$ et ϕ_σ : $\mathrm{Spec}\, S \to X_{\mathbb{Z}_p}$ le morphisme associé à la famille de Mumford $G_\sigma \to S_\sigma$ ([6] Chap.4) ; l'image inverse $\phi_\sigma^* \omega = \omega_{can}$ du faisceau conormal ω de $A \to X$ est triviale. Fixons une base.. Les éléments de $W_\kappa(R)$ vus dans $W_\kappa(R) \otimes S$ sont dits constants. On sait que $\phi_\sigma^* H^{(1)}$ s'identifie à l'élément constant de $W_{p-1,p-1}(R) \otimes S$ donné par $g \mapsto (\det g)^{1-p}$;

Considérons d'autre part $V_{\mathbb{Z}_p}$ le lieu ordinaire de $X_{\mathbb{Z}_p}$. Soit $\kappa = (k,j)$; ϕ_σ^* induit une homomorphisme injectif à conoyau plat

$$E_{k,j} : H^0(V_{\mathbb{Z}_p} \otimes R, \omega^{k,j}) \to W_{k,j}(R) \otimes S$$

Si $h \in H^0(V_{\mathbb{Z}_p} \otimes R, \widetilde{\omega}^{k,j})$ avec $E_{k,j}(h) = \sum_T a(T) q^T$ et $a(T) \in \widetilde{W}_{k,j}(R)$, rappelons l'action de $U_{p,2} = p^{-3-j} \cdot \widetilde{U}_{p,2}$; on pose $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$, $\alpha' = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\epsilon_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha'_i = \alpha' \epsilon_i$. Par le Lemme 1.5.1 de [22] et Prop.3.5 de [15] on a : $E_{k,j}(h|U_{p,2}) = \sum_T b(T) q^T$ avec

$$b(T) : g \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} a(\alpha'_i \cdot T \cdot \alpha'_i, \alpha^{-1} g \alpha)$$

On voit en particulier que $H^{(1)}|U_{p,2} = H^{(1)}$ et que $H^{(2)}|U_{p,2} = 0$.

On trouve

$$E_{k+p-1,j+p-1}((H^{(1)}h)|U_{p,2} = \sum_{i=0}^{p-1} \det({}^t(\alpha^{-1} g^{-\tau} g\alpha)) a({}^t\alpha'_i \cdot T \cdot \alpha'_i, \alpha^{-1} g\alpha = H^{(1)} E_{k,j}(h|U_{p,2}$$

Lemme 8.8 *L'action des correspondances $T_{q,i}$ (q premier à Np) et $U_{p,1}$ est compatible à la suite spectrale de BGG dual vers (log-)de Rham pour le schéma formel $\overline{V}$ sur $\mathbb{Z}_p$:*

$$H^s(\overline{V}, \mathcal{K}_\lambda^r) \Rightarrow H_{ldR}^{r+s}(\overline{V}, \mathcal{V}_\lambda)$$

Démonstration : On a vu que les correspondances de Hecke commutent aux différentielles des complexes de de Rham et BGG dual. Elles commutent donc aux suites spectrales correspondantes.

Remarque : Si on voulait inclure l'opérateur $U_{p,2}$ dans cet énoncé, il faudrait le définir non pas comme $p^{-3-j}\widetilde{U}_{p,2}$, mais comme $p^{-6}\widetilde{U}_{p,2}$ puisque $p^6 = \nu(\alpha)^3$ dans ce cas. Cette définition préserve l'intégralité de $\omega^{i,j}$ si $j \geq 3$ (*i.e.* lorsque le poids (k,j) est cohomologique), mais ce n'est plus le cas si $j < 3$, de sorte que nous n'introduisons pas cet opérateur. La démonstration du Théorème principal de la section 10.1 n'utilise pas du tout l'opérateur $U_{p,2}$. Son rôle réapparaîtra dans les sections 10.2 et 11 (avec la normalisation $p^{-3-j}\widetilde{U}_{p,2}$).

Notons enfin que la démonstration du lemme 8.3 qui traite le cas des correspondances $T_{q,?}$ pour $q \neq p$ se transpose sans changement et montre que les correspondances $U_{p,i}$ sont compatibles au morphisme propre $\pi : \overline{V} \to V^*$. En particulier, considérons la restriction $\pi_1 : \overline{V}_1 \to V_1$ de π à une composante connexe V_1 du lieu ordinaire de la strate X_1 de dimension 1 de X^*. L'action de l'opérateur $U_{p,1}$ induit sur V_1 resp. $\overline{V}_1$ l'action de l'opérateur U_p pour GL_2 (voir [1] Chap.3).

9 Décomposabilité partielle et ϕ-modules filtrés

Soit $\lambda = (a, b; a + b)$ un poids G-dominant p-petit. Soit $K \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe compact ouvert définissant la variété de Siegel X. Soit σ une représentation cuspidale dont la composante à l'infini σ_∞ est dans la série discrète de paramètre de Harish-Chandra $\lambda + \rho$; σ provient donc d'une forme modulaire f, de niveau premier à p, propre pour les opérateurs de Hecke (hors de l'ensemble de ramification de K), et holomorphe ou de Whittaker, de poids modulaire (k, ℓ) où $k = a + 3$ et $\ell = b + 3$.

Fixons le sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\widehat{\mathbb{Z}})$ de la variété de Siegel X de sorte que le système de valeurs propres de Hecke $\theta_f(T)$ pour les opérateurs de Hecke (hors des premiers où K est ramifié) sur f intervienne dans $H^3_{ldR}(X \otimes \mathbb{F}_p, \mathcal{V}_\lambda) \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C}$. Notons $N \geq 1$ un entier tel que le groupe de congruences principal $U(N)$ soit contenu dans K.

Nous supposons dans tout ce qui suit que la forme f est holomorphe et nous ferons référence à cette forme f plutôt qu'à la représentation σ. Nous expliquons dans cette section comment les hypothèses de décomposabilité partielle des Cas 1,2,3 de la section 4 ont une traduction via le théorème de comparaison étale-(log)cristallin, en termes de stabilité par le Frobenius cristallin de certains termes de la filtration de Hodge sur le ϕ-module filtré $\overline{M}_f$ associé à la représentation $\overline{\rho}|_{D_p}$.

Rappelons d'abord que par le théorème de comparaison de Faltings [5], le foncteur D_{cris} covariant envoie $H^3_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, V_\lambda(\mathbb{Z}_p))$ sur $H^3_{lcris}(X \otimes \mathbb{Z}_p, \mathcal{V}_\lambda)$ resp. $H^3_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, V_\lambda(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ sur $H^3_{ldR}(X \otimes \mathbb{F}_p, \mathcal{V}_\lambda)$. En fait, dans [5] et [21] Section 7.2, le foncteur de comparaison (relatif ou absolu) utilisé est contravariant. Dans notre contexte, nous préférons dualiser ces foncteurs et donner une version covariante de cet énoncé.

Soit F le corps des fractions de $\mathcal{O}$. Sous l'hypothèse que la représentation

$\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,p}$ est absolument irréductible, on sait que
(i) $\rho_{f,p}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}} F$ est une sous-représentation de $H^3_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, V_\lambda(\mathbb{Z}_p)) \otimes F$, stable par les opérateurs de Hecke (hors du niveau), qui agissent sur cet espace par les valeurs propres $\theta_f(T)$, et
(ii) tous les réseaux stables de $\rho_{f,p}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}} F$ sont homothétiques.

Soit $\mathcal{H}^{Np}$ resp. $\mathcal{H}^N$, la $\mathcal{O}$-algèbre de Hecke abstraite hors de Np, resp. hors de N ; soit $\mathfrak{m} = (\varpi, T - \theta_f(T); T \in \mathcal{H}^N)$ l'idéal maximal de $\mathcal{H}^{N_K}$ associé à (f,p). On rappelle qu'on a montré dans [21] que la localisation en $\mathfrak{m}$ de $H^i_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, V_\lambda(\mathbb{Z}_p)) \otimes \mathcal{O}$ est nulle pour $i \neq 3$ et est toujours libre sur $\mathcal{O}$.

On déduit de ceci et de (i) et (ii) ci-dessus qu'on peut supposer que la $\mathcal{O}$-représentation $\rho_{f,p}^{\vee}$ est contenue et est facteur direct dans $H^3_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p, V_\lambda(\mathbb{Z}_p)) \otimes \mathcal{O}$; soit M_f l'image de $\rho_{f,p}^{\vee}$ par le foncteur de Fontaine-Laffaille covariant D_{cris}. C'est un $\mathcal{O}$-module libre de rang 4 avec filtration et un endomorphisme de Frobenius ϕ induit par le Frobenius cristallin sur le H^3 log-cristallin ; ces données sont telles que

$$(*) \quad \phi(\mathrm{Fil}^i M_f) \subset p^i M_f$$

De même, si $\kappa = \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$ désigne le corps résiduel de $\mathcal{O}$, la κ-représentation contragrédiente $\overline{\rho}_{f,p}^{\vee}$ est une sous-représentation de $H^3_{et}(X \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) \otimes \kappa$. Sa restriction au groupe de Galois local en p est cristalline et son image $\overline{M}_f$ par D_{cris} est un κ-espace vectoriel de dimension quatre muni d'une filtration induite par la filtration de Hodge et d'homomorphismes semi-linéaire ϕ_i : $\mathrm{Fil}^i\overline{M}_f \to \overline{M}_f$ induits par $p^{-i}\phi|_{Fil^i}$. Comme $M_f \in MF_{\mathcal{O}}^{[0,p-2]}$, la théorie de Fontaine-Laffaille donne un isomorphisme de κ-espaces filtrés $M_f/\varpi M_f \cong \overline{M}_f$ compatible aux Frobenius.

Soit ω_f la forme différentielle définie sur $\mathcal{O}$ associée à f et $\overline{\omega}_f$ sa réduction modulo ϖ ; Le dernier cran non nul $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3}\overline{M}_f$ est la droite engendrée par l'image de $\overline{\omega}_f$ par

$$H^0(\overline{X}, \omega^{k,\ell}) \to H^3_{ldR}(X, \mathcal{V}_\lambda) = H^3(\overline{X}, \mathcal{K}^\bullet_\lambda)$$

Soit $P_{f,p}(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)(X-\delta)$ le polynôme de Hecke en p de f ; ses racines sont ordonnées (alphabétiquement) de sorte que leurs valuations p-adiques sont respectivement 0, $\ell-2$, $k-1$ et $k+\ell-3$. Dans la suite, on pose $j_0 = 0$, $j_1 = \ell-2$, $j_2 = k-1$ et $j_3 = k+\ell-3$. Soit ϵ_f la racine de l'unité telle que $\alpha\delta = \epsilon \cdot p^{k+\ell-3}$. Il résulte du Théorème principal de [34] que ϕ est annulé par le polynôme de Hecke $P_{f,p}(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)(X-\delta)$.

Soit e_1, e_2, e_3, e_4 une base de M_f sur $\mathcal{O}$ constituée de vecteurs propres pour ϕ de valeurs propres resp. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En suivant [24], on voit que la condition d'ordinarité de $\rho_{f,p}$ (et donc de $\rho_{f,p}^\vee$) en p implique la complémentarité de la filtration de Hodge et du drapeau $(D_i)_i$, où $D_i =< e_1, \ldots, , e_i >$ $(i = 1, \ldots, 4)$, associé à la base ordonnée (e_1, e_2, e_3, e_4) :

$$\mathrm{Fil}^{j_i} M_f \oplus D_i = M_f$$

En particulier :

$$\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} M_f \oplus < e_1, e_2, e_3 >= M_f$$

Cette condition implique que la droite $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} M_f$ possède une $\mathcal{O}$-base de la forme

$$(*) \quad e_4 + p^{\ell-2} x e_3 + p^{k-1} y e_2 + p^{k+\ell-3} z e_1$$

Par ailleurs, comme $\rho_{f,p}^\vee$ est extension d'un plan isotrope par un autre, on a un dévissage analogue pour le module filtré M_f (resp. pour $\overline{M}_f$)

$$0 \to M'_f \to M_f \to M''_f \to 0$$

en deux ϕ-modules filtrés $M'_f =< e_1, e_2 >$, M''_f (resp. $\overline{M}'_f$, $\overline{M}''_f$) de rang deux sur $\mathcal{O}$ (resp. κ).

Considérons la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathcal{K}_\lambda^{\leq 1} \to \mathcal{K}_\lambda^\bullet \to \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2} \to 0$$

On peut alors décrire M''_f comme un sous-module filtré du module filtré $H^3(\overline{X}, \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})$ et la projection $M_f \to M''_f$ est induite par le morphisme de modules filtrés $H^3(\overline{X}, \mathcal{K}_\lambda^\bullet) \to H^3(\overline{X}, \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})$. De plus, la filtration de M''_f est induite par la filtration à deux crans sur $H^3(\overline{X}, \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})$:

$\mathrm{Fil}^{k-1} = H^3(\overline{X}, \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})$, $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3} = H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_\lambda^3) = H^0(\overline{X}, \omega^{k,\ell})$, et $\mathrm{Fil}^{k+\ell-2} = 0$.

La condition de décomposabilité partielle (Cas 1) de $\rho_{f,p}^\vee$ en p se traduit alors par le fait que $\overline{M}''_f$ est décomposé comme somme de deux sous-ϕ-modules filtrés. En comparant avec la formule $(*)$, on trouve donc que cette condition de décomposabilité équivaut à la condition $x \equiv 0 \pmod{\varpi}$.

On déduit de $P_{f,p}(\phi) = 0$ sur M_f qu'on a aussi

$$\left(\frac{\phi - \delta}{p^{k+\ell-3}}\right)\left(\frac{\phi - \gamma}{p^{k-1}}\right)\left(\frac{\phi - \beta}{p^{\ell-2}}\right)(\phi - \alpha)\overline{M}_f = 0$$

et

$$\left(\frac{\phi - \delta}{p^{k+\ell-3}}\right)\left(\frac{\phi - \gamma}{p^{k-1}}\right)\overline{M}''_f = 0$$

Proposition 9.1 *Sous l'hypothèse (Cas 1), l'image de* $[\overline{\varpi}_f]$ *par* $\overline{M}_f \to \overline{M}''_f$ *est annulée par* $(\frac{\phi-\delta}{p^{k+\ell-3}})$.

Démonstration : Comme la réduction modulo ϖ de la classe de cohomologie $[\omega_f]$ de f est dans $\mathrm{Fil}^{k+\ell-3}\overline{M}''_f$, la discussion précédente montre que sous l'hypothèse (Cas 1), cette classe est annulée par $(\frac{\phi-\delta}{p^{k+\ell-3}})$.

10 Lieu ordinaire et équation différentielle

Soit $\overline{V}$, resp. V^*, le lieu ordinaire de $\overline{X}$ resp. X^*. Plus précisément, V^* est l'ouvert du complété formel de X^* le long de la fibre spéciale où l'invariant de Hasse ne s'annule pas, et $\overline{V} = \pi^{-1}(V^*)$. Soit $X^* = X \cup X_1 \cup X_0$ la stratification de la compactification minimale arithmétique de la variété de Siegel X par une union disjointe finie X_1 de courbes modulaires et par l'ensemble fini X_0 des pointes. Elle induit sur l'ouvert ordinaire V^* la stratification $V^* = V \cup V_1 \cup V_0$, avec $V_0 = X_0$. On forme $X' = X^* - X_0$, $V' = V^* - V_0$, $\overline{V}' = \overline{V} - \pi^{-1}(V_0)$. Rappelons que les $\mathbb{Z}_p$-modules, resp. $\mathbb{F}_p$-vectoriels, de cohomologie log-cristalline et log-de Rham de schémas projectifs lisses sur $\mathbb{Z}_p$ coïncident. On a donc $H^3_{lcris}(X, \mathcal{V}_\lambda) = H^3_{ldR}(X, \mathcal{V}_\lambda) = H^3(\overline{X}, \mathcal{K}^\bullet_\lambda)$. Rappelons qu'on a introduit dans la section précédente une suite exacte de complexes filtrés sur $\overline{X}$:

$$0 \to \mathcal{K}_\lambda^{\leq 1} \to \mathcal{K}_\lambda^\bullet \to \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2} \to 0.$$

La restriction de $\overline{X}$ à $\overline{V}'$ induit donc le morphisme de suites exactes de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & H^0(\overline{X}, \omega^{k,\ell}(-3)) & \to & H^3_{lcris}(X, \mathcal{V}_\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\overline{V}', \omega^{k,4-\ell}(5-\ell)) & \to & H^0(\overline{V}', \omega^{k,\ell}(-3)) & \to & H^3(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2}) \end{array}$$

Notons tout de suite que par le principe de Koecher, $H^0(\overline{V}', \omega^{i,j}) = H^0(\overline{V}, \omega^{i,j})$ pour tout couple d'entiers de $\mathbb{Z}$ tels que $i \geq j$. L'utilité de $\overline{V}'$ va apparaître dans l'étude du morphisme $\pi : \overline{V}' \to V'$, plus simple que si l'on rajoute X_0.

On a de même pour les cohomologies à coefficients modulo p :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & H^0(\overline{X}, \omega^{k,\ell} \otimes \mathbb{F}_p) & \to & H^3_{lcris}(X, \mathcal{V}_\lambda \otimes \mathbb{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(\overline{V}', \omega^{k,4-\ell} \otimes \mathbb{F}_p) & \to & H^0(\overline{V}', \omega^{k,\ell} \otimes \mathbb{F}_p) & \to & H^3(\overline{V}', \mathcal{K}^\bullet_\lambda \otimes \mathbb{F}_p) \end{array}$$

La $\mathbb{Z}$-algèbre de Hecke sphérique abstraite $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^{Np}$ hors de Np opère par correspondances algébriques sur $(\overline{X}, \mathcal{V}_\lambda)$, $(\overline{V}, \mathcal{V}_\lambda)$ et $(\overline{V}, \omega^{s,t})$, comme on l'a rappelé dans la section 7. Ces correspondances respectent $\overline{X}'$ et $\overline{V}'$; on peut donc les restreindre à ces ouverts.

De plus, par fonctorialité du théorème de comparaison de Faltings, l'isomorphisme de comparaison commute aux actions de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^{Np}$ sur ces groupes de cohomologie étale et log-cristalline. Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module, resp. κ-vectoriel, H, on note $H_{\mathcal{O}}$, resp. H_κ son extension des scalaires à $\mathcal{O}$ resp. κ.

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'extension des scalaires $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}^{Np}$ à $\mathcal{O}$ associé à (f, p). Le but de cette section est de montrer

Théorème 3 *Soit $A = \mathcal{O}$ ou κ. Après localisation en $\mathfrak{m}$, le morphisme*

$$H^3(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^\bullet)_A \to H^3(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})_A$$

est un isomorphisme et la suite de A-modules

$$H^0(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^2)_A \stackrel{d_2}{\to} H^0(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^3)_A \to H^3(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^\bullet)_A \to 0$$

devient exacte.

Considérons la suite spectrale associée à la filtration "bête" de $\mathcal{K}_\lambda^\bullet$:

$$E_1^{i,j} = H^j(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^i) \Rightarrow H^{i+j}(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^\bullet)$$

et, pour chaque i, la suite spectrale de Leray

$$L_2^{u,v} = H^u(V', R^v\pi_*\mathcal{K}_\lambda^i) \Rightarrow H^{u+v}(\overline{V}', \mathcal{K}_\lambda^i).$$

On observe d'abord

Proposition 10.1 *Pour $A = \mathcal{O}, \kappa$, on a $E_1^{i,j} = 0$ pour $(i,j) = (0,3)$ ou $(1,2)$.*

Démonstration : L'ouvert V^* est affine. C'est une réunion finie de courbes affines. L'ouvert $V' = V^* - V_0$ est donc également affine. La suite spectrale de Leray est donc dégénérée et $L_2^{u,v} = 0$ dès que $u > 0$; en particulier :

$$E_1^{i,j} = H^0(V', R^j\pi_*\mathcal{K}^i).$$

Or, le morphisme $\pi : \overline{V}' \to V'$ est de dimension relative au plus 1 (ce ne serait pas le cas au-dessus de X_0). On a donc $R^j\pi_*\mathcal{K}^i = 0$ si $i = 0$ ou 1.

Pour montrer le Théorème 3, il reste donc à voir qu'après localisation en $\mathfrak{m}$, on a ${E_1^{2,1}}_{\mathfrak{m}} = 0$. Plus précisément, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}^{Np} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^{Np}$ agissent sur les termes et les flèches de la suite spectrale de Leray et sur son aboutissement de manière compatible ; en effet, par Lemme 8.5, l'action sur le faisceau gradué $\mathcal{K}_\lambda^j$ sur $\overline{V}'$ commute aux différentielles, et par Lemme 8.3 et Remarque 8.5, les actions sur $\overline{V}'$ et V' sont compatibles avec le morphisme $\pi : \overline{V}' \to V'$. On peut donc localiser en $\mathfrak{m}$ le terme $E_1^{2,1}$. Notons tout de suite le corollaire du Théorème 3 :

Notons que comme $\mathcal{H}^{Np}$-modules, on a $\mathcal{K}_\lambda^2 = \omega^{k,4-\ell}(\ell-2)$ et $\mathcal{K}_\lambda^3 = \omega^{k,\ell}$; on a :

Proposition 10.2 *On a*

$$H^3_{ldR}(V,\mathcal{V}_\lambda)_\mathfrak{m} = eH^3(\overline{V},\mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})_\mathfrak{m} = \mathrm{Coker}(H^0(\overline{V},\omega^{k,4-\ell}(\ell-2))_\mathfrak{m} \to H^0(\overline{V},\omega^{k,\ell})_\mathfrak{m})$$

Démonstration : On a $E_1^{0,3}{}_\mathfrak{m} = E_1^{1,2}{}_\mathfrak{m} = E_1^{2,1}{}_\mathfrak{m} = 0$, donc $E_\infty^{3,0}{}_\mathfrak{m} = H^3(\overline{V}',\mathcal{K}^\bullet)_\mathfrak{m}$. Or, $E_\infty^{3,0}{}_\mathfrak{m} = E_2^{3,0}{}_\mathfrak{m} = \mathrm{Coker}(E_1^{2,0}{}_\mathfrak{m} \to E_1^{3,0}{}_\mathfrak{m})$, et $E_1^{2,0}{}_\mathfrak{m} = H^0(\overline{V}',\omega^{k,4-\ell})_\mathfrak{m}$ et $E_1^{3,0}{}_\mathfrak{m} = H^0(\overline{V}',\omega^{k,\ell})_\mathfrak{m}$.

Il reste à voir $H^0(V',R^1\pi_*\mathcal{K}_\lambda^2)_\mathfrak{m} = 0$. Comme π est un isomorphisme sur l'ouvert $V \subset \overline{V}'$, $R^1\pi_*\mathcal{K}^2$ est concentré sur le fermé $\partial V' = V' - V$ de V' ; les composantes connexes de $\partial V'$ sont de courbes modulaires affines. Notons V_1' l'une quelconque de ces courbes modulaires ; il suffit de montrer que $H^0(V_1',R^1\pi_*(\mathcal{K}_\lambda^2))_\mathfrak{m} = 0$.

10.1 Nullité de $H^0(V_1',R^1\pi_*(\mathcal{K}^2))_\mathfrak{m}$

Dans les calculs de cette section, on note pour abréger $\mathcal{F}$ la restriction de $\mathcal{K}^2$ à X'. Observons que la restriction D_1' de $\pi : D \to \partial X^*$ au-dessus de V_1' est isomorphe à la courbe projective lisse de genre 1 universelle ordinaire au-dessus de V_1'. On notera encore $\pi : D_1' \to V_1'$ cette restriction ; mais on notera $E \to V_1'$ cette même restriction lorsqu'on la considérera comme le schéma abélien de dimension 1 universel (sur V_1') pour les structures de niveau du type classifié par X_1'. Soit $I_{D_1'}$ l'idéal définissant le diviseur D_1' dans $\overline{X}'$ et $\mathcal{F}_{D_1'} = \mathcal{F} \otimes_{\overline{X}} \mathcal{O}_{D_1'}$. Le diviseur D_1' est lisse et est réunion disjointe de surfaces elliptiques au-dessus des courbes modulaires ouvertes composantes connexes de $\partial X'$. En appliquant $R^\bullet\pi_*$ à la suite exacte de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-Modules

$$0 \to I_{D_1'} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_{D_1'} \to 0$$

$$R^1\pi_*(I_{D_1'} \otimes \mathcal{F}) \to R^1\pi_*\mathcal{F} \to R^1\pi_*\mathcal{F}_{D_1'} \to R^2\pi_*(I_{D_1'} \otimes \mathcal{F}).$$

Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{G}$ sur $\overline{X}$, $R^1\pi_*\mathcal{G}$ est à support dans ∂X^* et $R^2\pi_*\mathcal{G}$ est à support dans X_0 ; en prenant les sections globales sur l'ouvert affine V_1', on trouve donc la suite exacte :

$$H^0(V_1', R^1\pi_*(I_{D_1'} \otimes \mathcal{F})) \to H^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{F}) \to H^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{F}_{D_1'}) \to 0.$$

Montrons que $H^0(V_1', R^1\pi_*(I_{D_1'} \otimes \mathcal{F})) = 0$. Par propreté de π, on peut appliquer le théorème des fonctions formelles ([12] Chap.III.11.4 et III.11.5), de sorte qu'il suffit de montrer que $R^1\pi_*(I^n_{D_1'}/I^{n+1}_{D_1'} \otimes \mathcal{F}) = 0$. Or, si $n = 1$, le fibré conormal de D_1' dans $\overline{V}'$ est positif sur la courbe elliptique D_1' au-dessus de V_1', son $R^1\pi_*$ est donc nul (car les fibres de π au-dessus de V_1' sont de genre 1). Il en est de même pour le fibré inversible $I^n_{D_1'}/I^{n+1}_{D_1'} = (I_{D_1'}/I^2_{D_1'})^{\otimes n}$

On en déduit que si l'on montre $eH^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{F}_{D_1'})_{\mathfrak{m}} = 0$, on aura le résultat désiré : $eH^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{F})_{\mathfrak{m}} = 0$.

Etudions donc $R^1\pi_*\mathcal{F}_{D_1'}$. Par définition du schéma semi-abélien $\mathcal{G} \to \overline{X}$, on sait que sa restriction $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}|_{D_1'}$ se dévisse globalement en

$$0 \to \mathbb{G}_m \to \mathcal{G}_1 \to E \times_{X_1} D_1' \to 0$$

On en déduit un dévissage du faisceau $\omega_1 = \omega|_{D_1'}$ localement libre de rang 2 sur D_1' :

$$0 \to \omega_{E/V_1'} \otimes_{\mathcal{O}_{V_1'}} \mathcal{O}_{D_1'} \to \omega_1 \to \mathcal{O}_{D_1'} \cdot \frac{dT}{T} \to 0$$

Posons $\eta = \omega_{E/V_1'}$ et, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, η^t la puissance t ième de ce faisceau inversible. La suite exacte ci-dessus induit une filtration de la restriction $\mathcal{K}^\bullet_{D_1'}$. Comme ω_1 est extension de $\mathcal{O}_{D_1'}$ par $\pi^*\eta$, on a $\det\omega_1 = \pi^*\eta$; on voit alors facilement que les gradués pour cette filtration sont donnés par

Proposition 10.3 *Les gradués associés à la filtration de $\mathcal{K}^\bullet_{D_1'}$ sont donnés par :*
$\mathrm{gr}^0\mathcal{K}^0_{D_1'} = \pi^*\eta^{3-k}$, ..., $\mathrm{gr}^{k-\ell}\mathcal{K}^3_{D_1'} = \pi^*\eta^{3-\ell}$, $\mathrm{gr}^i\mathcal{K}^0_{D_1'} = 0$ *si* $i > k - \ell$,
$\mathrm{gr}^0\mathcal{K}^1_{D_1'} = \pi^*\eta^{3-k}$, ... ,$\mathrm{gr}^{k+\ell-4} \oplus \pi^*\eta^{\ell-1}$, $\mathrm{gr}^i\mathcal{K}^1_{D_1'} = 0$ *si* $i > k + \ell - 4$,
$\mathrm{gr}^0\mathcal{K}^2_{D_1'} = \pi^*\eta^{4-\ell}$,...,$\mathrm{gr}^{k+\ell-4}\mathcal{K}^2_{D_1'} = \pi^*\eta^k$, $\mathrm{gr}^i\mathcal{K}^2_{D_1'} = 0$ *si* $i > k + \ell - 4$,
$\mathrm{gr}^0\mathcal{K}^3_{D_1'} = \pi^*\eta^\ell$, ..., $\mathrm{gr}^{k-\ell}\mathcal{K}^3_{D_1'} = \pi^*\eta^k$ *et* $\mathrm{gr}^i\mathcal{K}^3_{D_1'} = 0$ *si* $i > k - \ell$,

Notons que $\pi_*\pi^*\eta = \eta$ car π est propre à fibres connexes.

Commentaire : Notons que l'identification des différentielles $d_i : \mathcal{K}^i_{D_1'} \to \mathcal{K}^{i+1}_{D_1'}$ est plus délicate. A titre d'exemple, on donne les formules pour $k = \ell = 3$

(cas où $\lambda = (0,0;0)$, soit $\mathcal{V}_\lambda = \mathbb{Q}_{\overline{X}}$) et pour $k=4$, $\ell=3$ (cas où $\lambda = (1,0;1)$ et donc $\mathcal{V}_\lambda = \mathcal{H}$) :

1) Si $\lambda = 0$, on trouve que $\mathcal{K}^\bullet_{D_1'}$ se décompose en la somme du complexe (de longueur 2) de de Rham de la surface elliptique D_1' et de son décalage de un à droite :

$$\mathcal{K}^\bullet_{D_1'} = \Omega^\bullet_{D_1'} \oplus \Omega_{D_1'}[-1]$$

On trouve donc $R^3\pi_*\mathcal{K}^\bullet_{D_1'} = R^2\pi_*\Omega^\bullet_{D_1'}$; on voit alors aisément que la connection de Gauss-Manin fournit une suite exacte de $\mathcal{O}_{V_1'}$-faisceaux cohérents

$$\mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(D_1/V_1') \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}^1_{\mathrm{dR}}(D_1'/V_1') \otimes \Omega^1_{V_1'}(\mathrm{dlog}) \to R^2\pi_*\Omega^\bullet_{D_1'} \to 0;$$

2) Si $\lambda = (1,0;0)$, on montre par un calcul un peu laborieux que $\mathcal{K}^\bullet_{D_1'}$ se décompose en la somme de deux complexes $\mathcal{C}^\bullet \oplus \mathcal{B}^\bullet[-1]$, où $\mathcal{C}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ sont concentrés en degrés $0,1,2$. Ainsi, $R^3\pi_*\mathcal{K}^\bullet_{D_1'} = R^2\pi_*\mathcal{C}^\bullet$; de plus, chaque faisceau en $\mathcal{O}_{D_1}$-modules $\mathcal{B}^i$ est l'image inverse $\pi^*\mathcal{A}^i$ d'un faisceau $\mathcal{A}^i$ en $\mathcal{O}_{X_1}$-modules localement libre : $\mathcal{A}^0 = \eta$, $\mathcal{A}^1 = \eta^2 \oplus \eta^3 \oplus \eta^4$ et $\mathcal{A}^2\eta^3 \oplus \eta^4$.

On a $d_0\phi = -X^2_{-\beta}\phi \oplus 2X_{-\beta}X_{-\beta-\alpha}\phi \oplus (-2X^2_{-\beta-\alpha}\phi)$, et $d_1(\psi_2 \oplus \psi_3 \oplus \psi_4) = (-2X_{-\beta-\alpha}\psi_2 + X_{-\beta}\psi_3) \oplus (X_{-\beta-\alpha}\psi_3 + X_{-\beta}\psi_4)$. Notons que, comme dans l'exemple précédent, les flèches du complexe $\mathcal{B}^\bullet$ ne descendent pas à X_1'.$\square$

En fait, la détermination des différentielles du complexe $\mathcal{K}^\bullet_{D_1'}$ est heureusement inutile.

Pour $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K}^2_{D_1'}$, on a la proposition-clé suivante

Proposition 10.4 *Le module de Hecke $H^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{F})$ est muni d'une filtration naturelle, stable par $\mathcal{H}^{Np}$, dont les gradués sont isomorphes comme modules de Hecke à des sous-modules de $\eta^i(V_1')$, pour des entiers i dans l'intervalle $[2,p]$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{F}_1^{k+\ell-3} = 0 \subset \mathcal{F}_1^{k+\ell-4} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_1^0 = \mathcal{F}_1$ la filtration donnée sur $\mathcal{F}_1 = \mathcal{K}^2_{D_1'}$ dans la proposition 10.2. Elle est stable par les correspondances de Hecke.

Par récurrence descendante sur l'entier $a > 0$, on peut supposer que le résultat est vrai pour $\mathcal{F}_1^a$ et le montrer pour $a-1$. La suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F}_1^a \to \mathcal{F}_1^{a-1} \to \pi^*\eta^{3-\ell+a} \to 0$$

donne la suite longue de cohomologie

$$\eta^{3-\ell+a} \to R^1\pi_*\mathcal{F}_1^a \to R^1\pi_*\mathcal{F}_1^{a-1} \to R^1\pi_*\pi^*\eta^{3-\ell+a}$$

(car $\eta^i = \pi_*\pi^*\eta^i$). Notons que cette suite est stable pour l'action des correspondances de Hecke.

De plus, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{V_1'}$-Modules $R^1\pi_*\mathcal{O}_{D_1'} \cong \eta^{-1}$ par dualité de Serre. Donc on a $R^1\pi_*\pi^*\eta^{3-\ell+a} = \eta^{2-\ell+a}$. En prenant les sections sur l'ouvert affine, on obtient une suite exacte de modules de Hecke. Quitte à multiplier par l'invariant de Hasse les facteurs η^j pour $j < 0$, on en déduit que le gradué associé à $H^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{F}_1)$ se plonge comme module de Hecke dans une somme de modules $\eta^i(V_1')$ pour i comme dans l'énoncé.

On a alors

Proposition 10.5 $H^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{K}^2_{D_1'})_{\mathfrak{m}} = 0$.

Démonstration : Pour chaque entier j tel que $j \in [2, p+1]$, l'espace $\eta^j(V_1')$ est l'espace des fausses formes modulaires de poids j méromorphes aux pointes. C'est à dire que ces formes sont définies et régulières sur V_1', avec des pôles éventuels aux pointes. La compatibilité de l'action de Hecke avec les restrictions au bord (Lemmes 7.1 et 7.3) montre que les opérateurs $T_{q,1}$ (q premier à Np), resp. $U_{p,1}$, agissent sur chaque espace $\eta^j(V_1')$ comme les opérateurs T_q (et U_p), sur le groupe $GL_2(\mathbb{Q})$.

Par la proposition précédente, il suffit donc de montrer que pour tout $j \in I$, $\eta^j(V_1')_{\mathfrak{m}} = 0$. Si ϕ est propre pour les T_q, en la multipliant par une puissance de l'invariant de Hasse, on peut la prolonger à la courbe modulaire affine X_1 en une forme modulaire modulo p, propre de mêmes valeurs propres que ϕ, de poids ≥ 3 de niveau N, avec des pôles éventuels aux pointes. On voit facilement en considérant l'action des opérateurs de Hecke sur les développements de Laurent aux pointes qu'il n'y a pas de pôles en ces pointes et que la forme modulaire est donc régulière sur la courbe projective X_1^*. Son système de valeurs propres se relève donc en caractéristique zéro. Ainsi, les systèmes de valeurs propres des $T_{q,1}$ interviennent dans les formes classiques de GL_2 de niveau N (et de poids assez grand).

Considérons alors les valeurs propres $a_{q,i}(f)$ de la forme de Siegel f pour les opérateurs de Hecke $T_{q,i}$, q premier ne divisant pas Np. Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq p+1$ et pour toute forme cuspidale ϕ sur GL_2, propre et T_p-ordinaire, de niveau N et de poids k, il existe q premier ne divisant pas Np, tel que $a_{q,1}(f) - a_q(\phi) \not\equiv 0 \pmod{\varpi}$; ceci résulte du théorème de densité de Čebotarev, appliqué à l'élément $\overline{\rho}_{f,p} \times \overline{\rho}_{\phi,p}(\mathrm{Id})$.

On en déduit que pour tout j, la localisation de $\eta^k(V_1')$ en l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}^{Np}$ engendré par ϖ et les $T_{q,i} - a_{q,i}(f)$ est nulle. Par la Prop.10.2, ceci entraîne que $H^0(V_1', R^1\pi_*\mathcal{K}^2_{D_1'})_{\mathfrak{m}} = 0.\square$

10.2 Résolution de l'équation différentielle $d^2\overline{\varpi} = \overline{\xi}_f$

Notons que, par la définition même du Frobenius cristallin, le morphisme $\mathbb{Z}_p$-modules donné par la restriction

$$H^\bullet_{\mathrm{ldR}}(X, \mathcal{V}_\lambda) \to H^\bullet_{\mathrm{ldR}}(V, \mathcal{V}_\lambda)$$

est compatible avec l'action du Frobenius cristallin sur la cohomologie cristalline (égale à la cohomologie de de Rham) et l'action de l'endomorphisme ϕ^* de la cohomologie log-de Rham de $\overline{V}$ défini par le relèvement canonique ϕ (voir par exemple Berthelot-Ogus). Formons

$$\xi_f = (\frac{\phi - \delta_f}{p^{k+\ell-3}})\omega_f|_V \in H^0(V, \omega^{k,\ell})_{\mathcal{O}}.$$

Lemme 10.6 *La réduction $\overline{\xi}_f \in H^0(V, \omega^{k,\ell})_{\mathbb{F}_p} \otimes \kappa$ n'est pas nulle.*

Démonstration : Rappelons que ϵ_f désigne la racine de l'unité définie par $\alpha_f\delta_f = \epsilon_f p^{k+\ell-3}$. En considérant le q-développement de ω_f à la pointe à l'infini, on voit que pour $f = \sum_T a_T q^T$, (normalisée pour ne pas être congrue à zéro modulo ϖ), On a $\phi(\omega_f) = \epsilon_f p^{k+\ell-3} \cdot \sum_T a_T q^{pT}$. Soit $\delta_1 = \frac{\epsilon_f \delta}{p^{k+\ell-3}}$. La congruence $(*)$ $\sum_T a_T q^{pT} \equiv \delta_1 \sum_T a_T q^T \bmod. \varpi$ est impossible : si $r \geq 0$ est le plus petit entier pour lequel il existe une matrice symétrique T_0 divisible exactement par p^r telle que $a_{T_0} \not\equiv 0 \bmod. \varpi$, il résulte de la congruence $(*)$ et du fait que δ_1 est une unité ϖ-adique que $a_{T_0} \equiv 0 \bmod. \varpi$ ce qui est absurde. $\square$

Rappelons que pour la différentielle $d^2 : H^0(V, \omega^{k,4-\ell})_{\mathbb{Z}_p} \to H^0(V, \omega^{k,\ell})_{\mathbb{Z}_p}$, on a $q^{i(\ell-2)} \cdot d^2 \circ T_{q,i} = T_{q,i} \circ d^2$, et $p^{\ell-2} \cdot d^2 \circ U_{p,1} = U_{p,1} \circ d^2$.

En fait, on a aussi une compatibilité entre les opérateurs $U_{p,2}^{k,\ell} = p^{-3-\ell}\widetilde{U}_{p,2}$, agissant sur $\omega^{k,\ell}$ (sur $\mathbb{Z}_p$), et $U_{p,2}^{k,4-\ell} = p^{-3-4+\ell}\widetilde{U}_{p,2}$, agissant sur $\omega^{k,4-\ell}$ (sur $\mathbb{Z}_p$) :

Lemme 10.7

$$d^2 \circ U_{p,2}^{k,4-\ell} = \cdot U_{p,2}^{k,\ell} \circ d^2.$$

Démonstration : En effet comme d^2 commute à la correspondance algébrique $\widetilde{U}_{p,2}$, on a, en utilisant le twist de $(BGG_2^\vee)$:

$$(Com) \quad d^2 \circ (p^{-3-4+\ell} \cdot \widetilde{U}_{p,2}) = p^{2(\ell-2)} \cdot p^{-3-\ell} \cdot d^2 \circ \widetilde{U}_{p,2} = (p^{-3-\ell} \cdot \widetilde{U}_{p,2}) \circ d^2. \square$$

Considérons alors l'anneau de polynômes à une variable $\mathcal{H}^{Np}[U_{p,2}]$ sur l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}^{Np}$ sur $\mathcal{O}$ et introduisons les idéaux maximaux de $\mathcal{H}^{Np}[U_{p,1}, U_{p,2}]$:

$$\mathfrak{m}_2 = (\varpi, T_{q,i} - a_{q,i}, U_{p,2} - \frac{\alpha_f \beta_f}{p^{\ell-2}})$$

et

$$\widetilde{\mathfrak{m}}_2 = (\varpi, T_{q,i} - q^{-i(\ell-2)} \cdot a_{q,i}, U_{p,2} - \frac{\alpha_f \beta_f}{p^{\ell-2}}).$$

où α_f, resp. β_f, désigne la racine de valuation p-adique nulle, resp. égale à $\ell - 2$, du polynôme de Hecke $P_{f,p}(X)$ de f en p. Considérons la suite exacte de $\mathcal{H}^{Np}[U_{p,2}]$- modules

$$H^0(\overline{V}, \omega^{k,4-\ell})_{\mathfrak{m}} \to H^0(\overline{V}, \omega^{k,\ell})_{\mathfrak{m}} \to H^3(\overline{V}, \mathcal{K}_\lambda^\bullet)_{\mathfrak{m}}$$

Notons

Lemme 10.8 *Soit $n \in \mathbb{Z}$; pour tout $P = P((T_{q,i})_{(q,Np)=1,i=1,2}) \in \mathcal{H}^{Np}$, soit $P(n) = P((q^{in}T_{q,i})_{(q,Np)=1,\, i=1,2})$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal premier de $\mathcal{H}^{Np}$, soit $\mathfrak{a}(n)$ l'idéal des $P(n)$ pour $P \in \mathfrak{a}$; on a $M(n)_{\mathfrak{a}} = M_{\mathfrak{a}(n)}(n)$.*

Démonstration : Soit $P \bullet x$ l'action sur $M(n)$ et $P \cdot x$ l'action sur M. On a $P \bullet x = P(n).x$. Le lemme en résulte.$\square$

Par ce lemme, on a $H^0(V, \omega^{k,4-\ell}(\ell-2))_{\mathfrak{m}_2} = H^0(V, \omega^{k,4-\ell})_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2}(\ell-2)$. On déduit donc de la suite exacte ci-dessus qu'on a une suite exacte courte de $\mathcal{H}^{Np}$-modules localisés

$$H^0(V, \omega^{k,4-\ell})_{\widetilde{\mathfrak{m}}_2} \xrightarrow{d^2} H^0(V, \omega^{k,\ell})_{\mathfrak{m}_2} \to H^3(V, \mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})_{\mathfrak{m}_2} \to 0$$

est exacte.

De plus, on sait que la valeur propre $a_{p,2}$ de f pour $T_{p,2}$ est de valuation p-adique $\ell - 3$ et on sait que $\frac{a_{p,2}}{p^{\ell-3}} \equiv \frac{\alpha_f \beta_f}{p^{\ell-2}} \pmod p$. Sur $\omega^{k,\ell}$ sur $\mathbb{Z}_p$, on a la congruence $T_{p,2} \equiv p^{\ell-3} U_{p,2} \pmod{p^{\ell-2}}$ (en comparant les q-développements, voir [1]).

Comme $T_{p,2}$ commute au Frobenius cristallin, on déduit de $f|_{k,\ell} T_{p,2} = a_{p,2} \cdot f$ que $\xi_f|_{k,\ell} U_{p,2} \equiv \frac{\alpha_f \beta_f}{p^{\ell-2}} \cdot \xi_f \pmod \varpi$.

On a donc $\xi_f \in H^0(V,\omega^{k,\ell})_{\mathfrak{m}_2}$; par le Corollaire 10.2, l'image de $(\frac{\phi-\delta}{p^{k+\ell-3}})[\overline{\omega}_f]$ par $\overline{M}_f \to \overline{M}''_f$ est nulle par la Prop.9.1 ; l'image $\overline{\xi}_f$ de ξ_f dans $H^3_{ldR}(V,\mathcal{K}_\lambda^{\geq 2})_\kappa$ est donc nulle.

il existe donc une forme modulo p, $\overline{g}_1 \in H^0(V,\omega^{k,4-\ell})_{\mathfrak{m}_2}$, cuspidale de poids $(k, 4-\ell)$ telle que

$$(*) \quad d^2\omega_{\overline{g}_1} = \overline{\xi}_f.$$

En particulier, elle est ordinaire pour $U_{p,2}$ (on ne le sait pas pour $U_{p,1}$, comme me l'a fait remarquer X. Wan).

10.3 Fin de la démonstration

Soit H l'invariant de Hasse scalaire, de poids $(p-1,p-1)$. On forme $\overline{g}_2 = H\overline{g}_1 \in H^0(V,\omega^{k',\ell'})$ avec $k' = k+p-1$ et $\ell' = 4-\ell+p-1$; cette forme cuspidale mod.p a les mêmes valeurs propres généralisées que $\overline{g}_1$ pour les opérateurs de Hecke hors de Np ainsi que pour $p^{-3-\ell'}T_{p,2}$ (par le Lemme 8.5, la valeur propre généralisée de $\overline{g}_2$ est la réduction mod. ϖ de $\frac{\alpha\beta}{p^{\ell-2}}$). On ne peut espérer que cette forme soit classique de niveau premier à p. En effet, comme l'opérateur différentiel d_3 est d'ordre $\ell-2$, et que $d_3\overline{g}_2$ a pour dénominateur exact $H^{\ell-1}$, on voit que l'ordre du pôle de $\overline{g}_2$ le long d'une composante irréductible du diviseur non-ordinaire est nécessairement strictement positif. Cependant, on déduit de la non-nullité de $H^0(V,\omega^{k',\ell'})_{\widetilde{\mathfrak{m}}}$ l'existence d'une forme propre $\overline{g}_3 = H\overline{g}_1 \in H^0(V,\omega^{k',\ell'})$ avec pour valeurs propres les valeurs propres généralisées de $\overline{g}_1$. Pour cela, on remarque que l'espace $H^0(V,\omega^{k',\ell'})$ est réunion croissante de sous-espaces de dimension finie stable par les opérateurs de Hecke : $H^0(V,\omega^{k',\ell'}) = \bigcup_{s\geq 0} H^{-s}H^0(X,\omega^{k'+s(p-1),\ell'+s(p-1)})$. Par le théorème 3.5 de [15], on a

$$H^0(S_\infty,\omega^{k',\ell'})/\otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong H^0(V,\omega^{k',\ell'}).$$

On va en déduire que le système de valeurs propres de $\overline{g}_3$ se relève en un système de valeurs propres sur $H^0(S_\infty,\omega^{k',\ell'})$. Un vecteur propre g_3 pour ce système fournit une forme compagnon comme dans l'énoncé du Théorème.

Pour montrer ce relèvement du système de valeurs propres, il faut prendre garde que le lemme de Deligne-Serre ne s'applique pas directement à la localisée H en $\widetilde{\mathfrak{m}}$ de l'algèbre de Hecke engendrée (topologiquement) par les $T_{q,i}, U_{p,i}$ dans $\mathrm{End}\, H^0(S_\infty,\omega^{k',\ell'})$. En effet, cette algèbre n'est pas entière sur $\mathbb{Z}_p$. Cependant, elle est sans $\mathbb{Z}_p$-torsion, de sorte que $H[1/p]$ possède un idéal maximal $\mathfrak{p}'$. On prend $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap H$. C'est un idéal tel que $H/\mathfrak{p}$ est de caractéristique zéro. Tout $\overline{\mathbb{Q}}_p$-point θ de cet anneau fournit un système de valeurs propres cherché ; et on prend $g_3 \in H^0(S_\infty,\omega^{k',\ell'})[\theta]$.

11 Errata

Dans [31], nous démontrons un théorème de modularité p-adique de certaines représentations galoisiennes, à poids de Hodge-Tate non régulier, mais qui relèvent la représentation résiduelle $\overline{\rho}_{f,p}$ associée à une forme de Siegel f de poids cohomologique (k,ℓ), à condition que ce poids soit p-petit (*i.e.* $k+\ell-3<p-1$). Il y a trois erreurs dans ce travail. Les deux premières concernent le Théorème 7 p.1145.

11.1 Contrôle des formes p-adiques

La première erreur concerne le Th.5 p.1141. Si $\kappa=(k,\ell)$ avec $k\geq\ell$, l'idempotent ordinaire ne permet que la descente des formes p-adiques jusqu'au niveau Iwahorique en p et non jusqu'au niveau premier à p. Plus précisément, si T_I désigne le quotient de la tour d'Igusa par le groupe d'Iwahori standard de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$, on a seulement $eV^U[\kappa]=eH^0(T_I,\omega^\kappa)$. La descente de T_I à S_∞ (où S_∞ désigne le lieu ordinaire de la variété de Siegel X de niveau premier à p) requiert en général la condition supplémentaire $k>\ell$: si $k>\ell$, on a bien $eV^U[\kappa]=eH^0(S_\infty,\omega^\kappa)$.

Heureusement, dans [31], nous ne considérons que la localisation de ces modules en un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'algèbre de Hecke associé à une forme ordinaire f satisfaisant certaines hypothèse, et en particulier nous supposons que les racines de son polynôme de Hecke en p sont telles que

(∗) les nombres α, $\frac{\beta}{p^{\ell-2}}$, $\frac{\gamma}{p^{k-1}}$ et $\frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ sont distincts modulo $\varpi\mathcal{O}$.

Cette hypothèse entraîne que pour tout $\kappa'=(k',\ell')$ avec $k'\geq\ell'>3$ avec $k'\equiv k$ et $\ell'\equiv\ell$ mod.$p-1$, on a

$$eH^0(T_I,\omega^{\kappa'})_\mathfrak{m}=eH^0(S_\infty,\omega^{\kappa'})_\mathfrak{m}$$

En effet, par le Théorème principal de [23], on a pour $k\geq\ell>3$, $eH^0(T_I,\omega^{\kappa'})=eH^0(X_I(p),\omega^{\kappa'})$, où $X_I(p)$ désigne la variété de Siegel de niveau Iwahorique au-dessus de X. Or, même si $k'=\ell'$, on a

$$eH^0(X_I(p),\omega^{\kappa'})_\mathfrak{m}=eH^0(X,\omega^{\kappa'})_\mathfrak{m}.$$

En effet, supposons $k'=\ell'$ et considérons une forme f' qui intervient en niveau Np, et est nouvelle de niveau Iwahorique ou parahorique ; comme $k'>3$, la seule possibilité est que f' soit nouvelle de niveau parahorique de Siegel ; ceci entraîne que γ'/β' est égal à p. Mais en considérant les diagonales des matrices des représentations galoisiennes en p, on déduit de la congruence entre les représentations galoisiennes de f et f' que $\frac{\beta'}{p^{k'-2}}\equiv\frac{\beta}{p^{\ell-2}}$ et $\frac{\gamma'}{p^{k'-1}}\equiv\frac{\gamma}{p^{k-1}}$ modulo *varpi*. Mais alors la condition $\gamma'/\beta' = p$ contredit l'hypothèse $(*)$. On trouve donc bien, après localisation en $\mathfrak{m}$, que $eV^U[\kappa]_\mathfrak{m} = eH^0(S_\infty, \omega^{\kappa'})_\mathfrak{m}$. pour tout $k' \geq \ell' > 3$. Donc, l'énoncé erroné du Théorème 5 p.1141 est corrigé si on localise les deux membres en l'idéal maximal $\mathfrak{m}$.

De même, l'énoncé du Th.7 p.1145 doit être modifié en deux points : il faut localiser les modules considérés en l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et considérer soit un couple (a_0, b_0) congru au couple initial (a, b) mod. $p-1$, auquel cas les assertions 2 et 3 du Théorème 7 sont correctes ; soit, comme nous souhaitons le faire, considérer le couple $(a_0, b_0) = (-1, -1)$ qui n'est pas congru mod. $p-1$ au couple initial (a, b), puisque $a+b+3 < p-1$. Dans ce cas, on doit considérer le groupe I^+, resp. I_G^+, sous-groupe d'Iwahori strict de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ resp. $G(\mathbb{Z}_p)$ (ie le pro-p-Sylow du groupe d'Iwahori I resp. I_G) ; on introduit la variété d'Igusa T_{I^+} resp. la variété de Siegel $X_{I_G^+}(p)$ de niveau Np. On doit corriger les énoncés 2 et 3 en disant que la forme f_0 est eĺément de $H^0(T_{I^+}(p), \omega_{k_0,\ell_0})_\mathfrak{m}$ tandis que les f_i sont dans $H^0(X_{I_G^+}(p), \omega_{k_i,\ell_i})_\mathfrak{m}$. La démonstration est exactement la même que celle donnée dans l'article, mais utilise la descente jusqu'à T_{I^+} seulement ; le point 3 est esssentiellement le même que dans le texte, en utilisant la classicité des formes à poids réguliers due à Hida [15] (voir aussi Chapitre 1 de la thèse de Pilloni [22]).

11.2 Cas des surfaces abéliennes

La troisième erreur concerne l'application aux surfaces abéliennes (Section 5 de [31]). En fait, notre théorème de modularité p-adique Th.7, [31] ne peut s'appliquer au cas des surfaces abéliennes sur $\mathbb{Q}$, même si elles ont potentiellement bonne réduction ordinaire en p. En effet, nous n'autorisons que des représentations galoisiennes dont le facteur de similitude est congru modulo p à $\omega^{k+\ell-3}$; or, le facteur de similitude de la représentation galoisienne associée à une surface abélienne est congru modulo p à ω, et on a $k+\ell-3 \not\equiv 1$ (mod p). Rappelons que dans [31], nous avons établi un résultat de modularité p-adique.

L'application à certaines surfaces abéliennes sur $\mathbb{Q}$ dans la section 5 de [31] est donc erronée. Il aurait fallu pour inclure ces exemples démontrer le théorème $R = T$ dans le cas où le poids de f est $(k, \ell) = (p+1, p+1)$. Deux corrections sont possibles pour cette erreur.

-La première consiste à généraliser les théorèmes $R = T$ démontrés dans [21], [9] et [31] aux cas où le poids cohomologique (k, ℓ) n'est pas p-petit. Ceci a été réalisé aux Chapitres 1 et 4 de la thèse de V. Pilloni [22]. Notons d'ailleurs que dans ce travail, l'hypothèse que l'image de Galois contient $Sp_4(k")$ peut être remplacée par une hypothèse moins contraignante.

-La seconde consiste à appliquer le résultat de modularité p-adique au cas où A est une F-surface abélienne. Cette notion généralise la notion de surface abélienne comme suit : Une F-surface aélienne définie sur $\mathbb{Q}$ est un couple (A,λ) constitué d'une variété abélienne A définie sur $\mathbb{Q}$ telle qu'il existe un corps CM F et un plongement $F \hookrightarrow \mathrm{End}^0_{\mathbb{Q}}(A)$ de sorte que $\dim A = 2[F:\mathbb{Q}]$, et d'une isogénie $\lambda : A \to {}^tA$ F-linéaire. Pour une telle variété, par le théorème de Skolem-Noether, l'involution de Rosati sur F est induite par la conjugaison par $u \in \mathrm{Aut}(A)$. On peut alors remplacer l'accouplement de Weil $(\bullet,\bullet)_\lambda$ induit par λ par l'accouplement F-bilinéaire $< x,y >= (x,u(y))_\lambda$ Pour tout premier rationnel p premier au degré de λ, et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de F au-dessus de p, l'accouplement $< x,y >$ est $F_{\mathfrak{p}}$-bilinéaire, symplectique unimodulaire et on a une représentation galoisienne $\rho_{A,u,\mathfrak{p}} : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GSp_4(\mathcal{O}_{F,\mathfrak{p}})$ sur le $\mathcal{O}_{F,\mathfrak{p}}$-module de Tate de A ; pour cette représentation, on a $\nu \circ \rho_{A,u,p} = \epsilon\eta$, où η est un caractère donné par l'action de Galois sur u. Ceci rend possible la condition $\nu \circ \rho_{A,u,p} = \omega^{k+\ell-3}$ (comme le montre l'exemple de type GL_2 des variétés abéliennes de Shimura A_f qui sont facteurs de la jacobienne de $J_1(Np^r)$, avec $u = W_{Np^r}$ l'involution d'Atkin-Lehner). Pour appliquer le théorème de modularité p-adique, les hypothèses à imposer à une telle F-variété (A,λ) sont

1) A acquiert bonne réduction ordinaire sur $\mathbb{Q}(\zeta_p)$, et est semistable hors de p, et $\rho_{A,\mathfrak{p}} \equiv \overline{\rho}_{f,p} \bmod \mathfrak{p}$, C'est cette condition qui est maintenant possible, et ne l'était pas pour une surface abélienne classique.

2) L'image de $\overline{\rho}_{A,\mathfrak{p}}$ contient $Sp_4(\kappa')$ pour un sous-corps κ' de κ,

3) les racines $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ du polynôme de Hecke $P_p(X)$ de f en p sont telles que les réductions modulo ϖ des nombres $\alpha, \frac{\beta}{p^{\ell-2}}, \frac{\gamma}{p^{k-1}}, \frac{\delta}{p^{k+\ell-3}}$ sont deux à deux distinctes,

4) $\overline{\rho}_{A,\mathfrak{p}}$ est bien ramifiée (au sens de [9] Définition 2.2.2) en chaque premier ℓ divisant N.

Nous espérons donner de tels exemples ultérieurement.

Une fois le résultat de modularité p-adique acquis pour une telle F-surface abélienne, notre espoir est d'établir sa modularité au sens classique, en trouvant une forme propre cuspidale de poids $(2,2)$ classique dont la fonction L coïncide avec celle de A. Pour cela, suivant la méthode de Buzzard-Taylor, nous expliquons dans la section 10 comment appliquer le théorème 1 ci-dessus pour construire une forme p-adique compagnon de la forme p-adique construite dans [31]. Le problème sera ensuite de tenter de réaliser le prolongement analytique p-adique (par recollement) de ces formes p-adiques afin d'obtenir une forme classique de poids $(2,2)$. Nous espérons revenir sur cette question ultérieurement.

Références

[1] A.N. Andrianov, V.G. Zhuravlev : Modular Forms and Hecke Operators, Transl. of Math. Monographs, 145, AMS, Providence, 1995.

[2] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand : *Differential operators on the base affine space, and a study of* $\mathfrak{g}$*-modules*, *in* Lie Groups and Their Representations, ed. I.M. , Conf. Budapest 1971, Adam Hilger Publ. 1975.

[3] C. Breuil, M. Emerton : *Représentations* p*-adiques ordinaires de* $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ *et compatibilité local-global*, à paraître dans Astérisque.

[4] M. Demazure, P. Gabriel : Groupes algébriques, tome 1, Masson et Cie, Editeurs, North-Holland Publishing Co., 1970.

[5] G. Faltings : *Crystalline cohomology and* p*-adic Galois representations*, in Algebraic Analysis, ed. J.-I. Igusa, Proc. JAMI inaugural conference, Johns Hopkins University Press, 1990.

[6] G. Faltings, C.-L. Chai : Degeneration of abelian varieties, Erg. der Math. u. ihre Grenzgebiete, Springer Verlag 1990.

[7] G. Faltings, B. Jordan : *Crystalline cohomology and* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$, Israel J. Math. 90, 1-66, 1995.

[8] H. Garland, J. Lepowski :*Lie algebra homology and the Macdonald-Kac formulas*, Invent. Math. 34 (1976), 37-76.

[9] A. Genestier, J. Tilouine : *Systèmes de Taylor-Wiles pour* GSp_4, *in* Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque 302, pp.177-290, SMF 2005.

[10] T. Gee, D. Geraghty :*Companion forms for unitary and symplectic groups*, preprint.

[11] B. Gross : *A tameness criterion for Galois representations associated to modular forms (mod. p)*, Duke Math. J. 61 (1990), 445-517.

[12] R. Hartshorne : Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1980.

[13] F. Herzig : *The weight in a Serre-type conjecture for tame* n*-dimensional Galois representations*, Duke Math. J. 149 (2009), 37-116.

[14] F. Herzig, J. Tilouine : *Conjecture de type de Serre et formes compagnons pour* GSp_4, 36 pp., soumis.

[15] H. Hida : *Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*. J. Inst. Math. Jussieu 1 (2002), no. 1, 1–76.

[16] J. C. Jantzen : Representations of algebraic groups, Second edition, AMS 2003.

[17] B.W. Jordan, R. Livné : *Integral Hodge Theory and congruences between modular forms*, Duke Math. J. 80 (1995), 419-484.

[18] N. Katz : *Serre-Tate local moduli*, *in* Surfaces Algébriques, Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay, pp.138-202, eds J. Giraud, L. Illusie, M. Raynaud, Springer Lecture Notes 868, 1981.

[19] K.-W. Lan : Arithmetic Compactifications of PEL-type Shimura varieties, PhD Dissertation, Harvard, 2008.

[20] K.-W. Lan, J.C. Suh : *Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on compact PEL-type Shimura varieites*, preprint.

[21] A. Mokrane, J. Tilouine : *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications*, pp.1-95 (2002), Astérisque 280, Publ. Soc. Math. France.

[22] V. Pilloni : Arithmétique des variétés de Siegel, Thèse, U. de Paris 13, 2009.

[23] V. Pilloni :*Sur le prolongement analytique des formes de Siegel de genre* 2, à paraître.

[24] B. Perrin-Riou : *Représentations p-adiques ordinaires*, Astérisque 223, SMF, Paris (1994).

[25] A. Polo, J. Tilouine : *Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent over* $\mathbb{Z}_{(p)}$ *for representations with p-small weights*, pp.97-135 (2002), Astérisque 280, Publ. Soc. Math. France.

[26] D. Prasad : lettre à l'auteur, 4 janvier 2009.

[27] B. Stroh : Compactification des variétés de Siegel avec niveau parahorique, Thèse U. Nancy 2008.

[28] B. Stroh :*Classicité en Théorie de Hida*, preprint.

[29] R. Taylor : *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weights*, Duke Math. J. 63, fasc.2, 1991, 282-332.

[30] J. Tilouine : Deformations of Galois representations, AMS 1996.

[31] J. Tilouine : *Nearly ordinary degree four symplectic Galois representations and p-adic Siegel modular forms*, Compos. Math., vol.142, 1122-1156, 2006.

[32] J. Tilouine : *Companion forms and classicality in the* $GL_2(\mathbb{Q})$*-case*, to appear in Proc. Chennai Conf. for the 60th birthday of Prof. T.C. Vasudevan, held in Dec. 2005.

[33] T. Tsuji : *Poincaré Duality for Logarithmic Crystalline Cohomology*, Compos. Math. 118, 11-41, 1999.

[34] E. Urban : *Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de $GSp_4(\mathbb{Q})$* , *in* Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$, Astérisque 302, pp.151-176, 2005.

[35] E. Urban : *Eigenvarieties for reductive groups*, preprint.

[36] R. Weissauer : *Siegel modular forms mod p*, math.NT arXiv :0804.3134v1, 19 April 2008.

[37] Yoshida H. : *Siegel's Modular Forms and the Arithmetic of Quadratic Forms*, Invent. Math. 60, 193-248 (1980).

J. Tilouine, Département de Mathématiques, UMR 7539, Institut Galilée, Université de Paris 13, 93430 Villetaneuse. France

tilouine@math.univ-paris13.fr