
CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 7

||N.B. : Ce corrigé n'a bien sûr d'intérêt qu'à condition d'avoir préalablement cherché par soi-même les exercices.

Exercice 1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $\mathcal{E}(\mu)$ avec $\mu > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Rappelons que, pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda x}$, d'où $\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Z est une variable positive (car X et Y le sont) donc, pour $z \leq 0$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1$. Et pour $z > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z, Y > z) = 1 - \mathbb{P}(X > z)\mathbb{P}(Y > z) = 1 - e^{-(\lambda+\mu)z}$$

(en utilisant l'indépendance entre X et Y pour la 3^{ème} égalité). (On pouvait aussi écrire $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z \text{ ou } Y \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z) + \mathbb{P}(Y \leq z) - \mathbb{P}(X \leq z, Y \leq z)$) Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Comme X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est la loi de densité $\lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq Y) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \leq Y\}}] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{\{x \leq y\}} \mu_{(X,Y)}(dx, dy) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

3. Pour montrer que Z et $\mathbf{1}_{\{Z=X\}}$ sont indépendantes, il est suffisant de montrer que pour tout borélien A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A) \mathbb{P}(\mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1).$$

En effet, l'égalité similaire pour $\mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 0)$ s'en déduit en écrivant $\mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 0) = \mathbb{P}(Z \in A) - \mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1)$.

On a (comme à la question précédente) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \in A, \mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1) &= \mathbb{P}(X \in A, X \leq Y) \\ &= \int_A \left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y} dy \right) \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx \\ &= \lambda \int_A e^{-(\lambda+\mu)x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ (question 1) donc, en utilisant de plus le résultat de la question 2 :

$$\mathbb{P}(Z \in A) \mathbb{P}(\mathbf{1}_{\{Z=X\}} = 1) = \mathbb{P}(Z \in A) \mathbb{P}(X \leq Y) = \int_A (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu)z} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z) dz \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Ainsi, l'égalité voulue est satisfaite.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On note $Z = \min(X, Y)$.

4. X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc, pour $x < 1$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 1$ et, pour $x \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq [x]) = \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} = p \frac{1 - (1-p)^{[x]}}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^{[x]}.$$

Pour Y , on a (voir question 1) pour tout $y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y \leq y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)$.

5. On décompose la probabilité selon la valeur prise par X , et on utilise l'indépendance entre X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq Y, X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(k \leq Y, X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} p(1-p)^{k-1} = pe^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} ((1-p)e^{-\lambda})^l \\ &= \frac{pe^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1-p)}.\end{aligned}$$

6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k, Y \geq k) + \mathbb{P}(Y = k, X \geq k) = \mathbb{P}(X = k, Y \geq k)$$

car, Y étant une variable aléatoire à densité, $\mathbb{P}(Y = k, X \geq k) \leq \mathbb{P}(Y = k) = 0$. Ainsi, vu l'indépendance entre X et Y , $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y \geq k) = p(1-p)^{k-1}e^{-\lambda k}$.

7. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et a et b deux réels tels que $\ell < a < b < \ell + 1$. Sur l'événement $\{a < Z < b\}$, Z n'est pas entier, donc nécessairement $Z = Y$, et $X \geq Y$ équivaut à $X \geq \ell + 1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < Z < b) &= \mathbb{P}(a < Y < b, X \geq \ell + 1) = \mathbb{P}(a < Y < b) \mathbb{P}(X \geq \ell + 1) \\ &= \mathbb{P}(a < Y < b)(1 - \mathbb{P}(X \leq \ell)) = (e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b})(1-p)^\ell.\end{aligned}$$

Remarque : les deux dernières questions décrivent la loi de Z . Ce n'est ni une loi à densité ni une loi discrète, mais un mélange des deux.

Exercice 2

1. On pose $U = \sum_{k=0}^N X_k$ et on veut calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_U(t) = \mathbb{E}[e^{itU}]$. On décompose pour cela l'espérance selon la valeur de N (de façon à se ramener à une somme d'un nombre fixé de termes) :

$$\begin{aligned}\Phi_U(t) &= \sum_{m=0}^n \mathbb{E}[e^{it \sum_{k=0}^N X_k} \mathbf{1}_{\{N=m\}}] \\ &= \sum_{m=0}^n \mathbb{E}[e^{it \sum_{k=0}^m X_k} \mathbf{1}_{\{N=m\}}] \\ &= \sum_{m=0}^n \mathbb{E}[e^{it \sum_{k=0}^m X_k}] P(N = m),\end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance entre N et $(X_0, \dots, X_m)$ à la dernière ligne. Alors, par l'indépendance entre les X_k , et les lois respectives des variables :

$$\begin{aligned}\Phi_U(t) &= \sum_{m=0}^n \left(\prod_{k=0}^m \mathbb{E}[e^{itX_k}] \right) P(N = m), \\ &= \sum_{m=0}^n \Phi_{X_0}(t)^{m+1} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \\ &= \Phi_{X_0}(t) (p\Phi_{X_0}(t) + 1 - p)^n\end{aligned}$$

par la formule du binôme de Newton.

2. On pose $V = \sum_{i=1}^N X_i$ et, pour $s \in [-1, 1]$, on veut calculer $G_V(s) = \mathbb{E}[s^V]$. Comme plus haut, on

découpe selon la valeur de N et on utilise l'indépendance entre les variables aléatoires $N, X_1, X_2, \dots$:

$$\begin{aligned} G_V(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^V \mathbf{1}_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{\sum_{j=1}^n X_j} \mathbf{1}_{\{N=n\}}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p+sp)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{\lambda p(s-1)}. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre λp . Comme la fonction génératrice caractérise la loi, on en déduit que V suit cette loi.

Exercice 3

On note :

- pour $x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ (densité de la loi de X) ;
- pour $y \in \mathbb{R}$, $f_{Y|X=x}(y) = (y-x)e^{-(y-x)} \mathbf{1}_{x,+\infty[}(y)$ (densité de la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$) où $x \in [0,1]$ (pour $x \notin [0,1]$, la densité peut être choisie quelconque vu que $X \in [0,1]$ p.s.) ;
- pour $z \in \mathbb{R}$, $f_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) = (y-x)e^{-z(y-x)} \mathbf{1}_{0,+\infty[}(z)$ (densité de la loi conditionnelle de Z sachant $(X,Y)=(x,y)$) où $x \in [0,1]$ et $y \geq x$ (même remarque que ci-dessus si $x \notin [0,1]$ ou $y < x$ vu que $Y < X$ p.s.).

1. Le théorème du cours dit que si la loi de (X,Y) est de densité $f_{(X,Y)}$, alors la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $X=x$ admettent également des densités qui, si on les note respectivement f_X et $f_{Y|X=x}$, vérifient :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y) dy \text{ et } f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$$

quand $f_X(x) \neq 0$; et $f_{Y|X=x}$ est une densité quelconque si $f_X(x) = 0$. On a besoin ici d'une "réciproque" de ce résultat : si X est de densité f_X et, conditionnellement à $X=x$, Y est de densité $f_{Y|X=x}$, alors le couple (X,Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_{Y|X=x}(y)$. Ceci résulte directement de la définition de la loi conditionnelle : pour toute fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X,Y)] &= \int \left(\int g(x,y) d\mu_{Y|X=x}(y) \right) d\mu_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x,y) f_{Y|X=x}(y) dy \right) f_X(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_{Y|X=x}(y) f_X(x) dx dy. \end{aligned}$$

On a ainsi la loi du couple (X,Y) , et on obtient celle du triplet (X,Y,Z) par le même procédé : c'est la loi de densité

$$\begin{aligned} f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) &= f_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) f_{Y|X=x}(y) f_X(x) \\ &= (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)} \mathbf{1}_{0,+\infty[}(z) \mathbf{1}_{x,+\infty[}(y) \mathbf{1}_{[0,1]}(x). \end{aligned}$$

En effet, en utilisant à nouveau la définition des lois conditionnelles, on a, pour toute fonction g mesurable bornée de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X,Y,Z)] &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x,y,z) d\mu_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) \right) d\mu_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x,y,z) f_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) dz \right) f_{(X,Y)}(x,y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x,y,z) f_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) dz \right) f_{Y|X=x}(y) f_X(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} g(x,y,z) f_{Z|(X,Y)=(x,y)}(z) f_{Y|X=x}(y) f_X(x) dx dy dz. \end{aligned}$$

2. Comme la loi de (X, Y, Z) est de densité $f_{(X,Y,Z)}$, la loi de Z est une loi de densité $f_Z(z)$ qui s'obtient en intégrant $(x, y) \mapsto f_{(X,Y,Z)}(x, y, z)$ contre la mesure de Lebesgue $dx dy$ sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_x^\infty (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)} dy dx \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty u^2 e^{-(z+1)u} du dx \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $y \mapsto u = y - x$. Or :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u^2 e^{-(z+1)u} du &= \frac{1}{(z+1)^3} \int_0^\infty v^2 e^{-v} dv \\ &= \frac{\Gamma(3)}{(z+1)^3} \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u \mapsto v = (z+1)u$. Et $\Gamma(3) = 2! = 2$, donc finalement :

$$f_Z(z) = \frac{2}{(z+1)^3} \mathbf{1}_{]0, +\infty[}(z).$$

3. Comme la loi de $((X, Y), Z)$ admet pour densité $f_{(X,Y,Z)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$, la loi conditionnelle de (X, Y) sachant $Z = z$ est la loi de densité :

$$f_{(X,Y)|Z=z}(x, y) = \frac{f_{(X,Y,Z)}(x, y, z)}{f_Z(z)} = \frac{(z+1)^3}{2} (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \mathbf{1}_{]x, +\infty[}(y),$$

pour z tel que $f_Z(z) \neq 0$ (i.e. pour $z \geq 0$).

4. Alors, pour $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sqrt{Y-X}|Z=z] &= \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{y-x} f_{(X,Y)|Z=z}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_x^\infty \sqrt{y-x} \frac{(z+1)^3}{2} (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)} dy dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{z+1}} \int_0^1 \int_0^\infty u^{5/2} e^{-u} du dx \\ &= \frac{\Gamma(7/2)}{2\sqrt{z+1}} \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $y \mapsto u = (z+1)(y-x)$ (ou encore $(x, y) \mapsto (x, (z+1)(y-x))$ si l'on préfère). Or $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})$ (par l'équation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$), et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (en changeant de variable, c'est $2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$), donc :

$$\mathbb{E}[\sqrt{Y-X}|Z=z] = \frac{15}{16} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z+1}}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sqrt{Y-X}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sqrt{Y-X}|Z]] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}[\sqrt{Y-X}|Z=z] d\mu_Z(z) \\ &= \int_0^\infty \frac{15}{16} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z+1}} \frac{2}{(z+1)^3} dz \\ &= \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \int_1^\infty \frac{du}{u^{7/2}} \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

5. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y - X)$. Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. On utilise le changement de variable $(x, y, z) \mapsto (x, u, v) = \varphi(x, y, z) = (x, y - x, z(y - x))$, c'est à dire $y = x + u$ et $z = \frac{v}{u}$ (ce qui montre l'injectivité de φ , si $u \neq 0$). φ envoie $\{(x, y, z) | x \in [0, 1], y > x, z > 0\}$ sur $\{(x, u, v) | x \in [0, 1], u > 0, v > 0\}$, et le déterminant jacobien associé à φ^{-1} est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X, U, V)] &= \mathbb{E}[g(X, Y - X, Z(Y - X))] \\ &= \int_0^1 \int_x^\infty \int_0^\infty g(x, y - x, z(y - x)) f_{(X, Y, Z)}(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty g(x, u, v) f_{(X, Y, Z)}(x, x + u, \frac{v}{u}) \frac{1}{u} dv du dx \\ &= \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty g(x, u, v) u e^{-u-v} dv du dx. \end{aligned}$$

Ceci montre que la loi de (X, U, V) admet pour densité

$$f_{(X, U, V)}(x, u, v) = u e^{-u-v} \mathbf{1}_{[0, 1]}(x) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(u) \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(v)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$.

6. On peut écrire : $f_{(X, U, V)}(x, u, v) = f_X(x) f_U(u) f_V(v)$ où $f_X(x) = \mathbf{1}_{[0, 1]}(x)$, $f_U(u) = u e^{-u} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(u)$ et $f_V(v) = e^{-v} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(v)$. Cette décomposition de la densité montre que X , U et V sont indépendantes. De plus, X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, U suit la loi $\gamma_{2,1}$ et V suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 4

1. On pose $Y_i = X_i^2 e^{X_i}$. Les variables aléatoires Y_i , $i \geq 1$, sont indépendantes, de même loi, et on s'intéresse à la convergence de la suite de terme général :

$$S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}.$$

On voudrait donc appliquer la loi forte des grands nombres. Pour cela, il suffit de montrer que les variables Y_i sont intégrables. Or elles sont positives, et (en posant $u = x - 1$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1] &= \mathbb{E}[X_1^2 e^{X_1}] = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^x e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-(x-1)^2/2} e^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sqrt{e} \int_{\mathbb{R}} (u+1)^2 e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sqrt{e} \mathbb{E}[(Z+1)^2] = \sqrt{e} (\mathbb{E}[Z^2] + 2\mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[1]) = 2\sqrt{e} \end{aligned}$$

où Z est une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ d'où $\mathbb{E}[Z] = 0$ et $\mathbb{E}[Z^2] = 1$. Ainsi, par la loi forte des grands nombres, S_n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[Y_1] = 2\sqrt{e}$ lorsque l'indice n tend vers $+\infty$.

2. On pose $X_i = \mathbf{1}_{\{Y_i + Z_i \leq 1\}}$. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes, de même loi, et intégrables (elles sont à valeurs dans $[0, 1]$), donc par la loi forte des grands nombres :

$$\text{presque-sûrement, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}(Y_1 + Z_1 \leq 1),$$

et on calcule $\mathbb{P}(Y_1 + Z_1 \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} dz dy = \int_0^1 (1-y) dy = 1/2$.

3. Notons $M_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. On donne la loi de M_n par sa fonction de répartition : on a, pour $x < 0$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 0$, pour $x > 1$, $\mathbb{P}(M_n \leq x) = 1$ et, pour $x \in [0, 1]$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x, \dots, Y_n \leq x) = \mathbb{P}(Y_1 \leq x)^n = x^n.$$

Cette fonction de répartition est une primitive de la fonction $f_{M_n}(x) = nx^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$: on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_{M_n}(x)dx.$$

De ceci on déduit que f_{M_n} est une fonction de densité, et que la loi de M_n est de densité f_{M_n} (en pratique, f_{M_n} s'obtient en dérivant la fonction de répartition).

Soit $\varepsilon > 0$. On a, comme $M_n \leq 1$:

$$\mathbb{P}(|M_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n < 1 - \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geq 1 \\ (1 - \varepsilon)^n & \text{si } \varepsilon < 1. \end{cases}$$

Dans les deux cas, cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 1.