

DEVOIR MAISON N° 1 – CORRIGÉ

Exercice 1. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $X_0 = 0$ et par les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i + 1 | X_n = i) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i - 1 | X_n = i).$$

1. Déterminer les classes de cette chaîne de Markov, et sa période.

On constate que tous les états communiquent entre eux : si on note P la matrice (infinie) de transition, $P(i, i + 1) > 0$ et $P(i + 1, i) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ donc $i \leftrightarrow i + 1$, et ainsi $i \leftrightarrow i + 1 \leftrightarrow i + 2$ et, par récurrence, $i \leftrightarrow j$ pour tous entiers $i \leq j$, comme annoncé. Il n'y a donc qu'une classe, $\mathbb{Z}$, autrement dit la chaîne de Markov est irréductible.

Il suffit donc de déterminer la période de 0. L'ensemble $E = \{n \geq 1 | P^n(0, 0) > 0\}$ ne contient pas 1 puisque $P(0, 0) = 0$. En revanche, $2 \in E$ puisque $P^2(0, 0) \geq P(0, 1)P(1, 0) > 0$; et E ne contient aucun entier impair puisque la chaîne de Markov, partant de 0, doit effectuer autant de transitions vers la droite que vers la gauche (donc au total un nombre pair) pour revenir en 0. Par suite, la période vaut $d(0) = \text{pgcd}(E) = 2$.

2. Déterminer les mesures invariantes pour cette chaîne de Markov.

ν est une mesure invariante si, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\nu(j) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \nu(i)P(i, j)$, ce qui se réduit ici à

$$\nu(j) = \frac{1}{2} (\nu(j - 1) + \nu(j + 1)).$$

Ainsi, la suite $(\nu(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfait une récurrence du second ordre, de polynôme caractéristique $X^2 - 2X - 1 = (X - 1)^2$. Ce polynôme a 1 pour racine double donc les solutions sont de la forme $\nu(n) = (An + B)1^n = An + B \forall n \in \mathbb{Z}$, où $A, B \in \mathbb{R}$. On connaît souvent le théorème dans le cas de suites indexées par $\mathbb{N}$ mais il est en fait vrai ici aussi, par la même preuve : l'espace vectoriel des suites $(\nu(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui satisfont la relation de récurrence est toujours de dimension 2 (une solution est déterminée par exemple par $\nu(0)$ et $\nu(1)$), et on vérifie que les solutions dans le cas des suites indexées par $\mathbb{N}$ sont encore des solutions quand on les étend aux indices négatifs.

De plus, une mesure est à valeurs positives, ce qui impose $A = 0$ (si $A > 0$, $\nu(i) \rightarrow -\infty$ en $-\infty$ donc ν prend des valeurs négatives et de même, si $A < 0$, $\nu(i) \rightarrow -\infty$ en $+\infty$), et donc $\nu(i) = B$ pour tout i , d'où $B \geq 0$. Finalement, les mesures invariantes sont les mesures définies par $\nu(i) = B$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, où B est un réel positif.

3. On note N_0 le nombre de passages en 0. Montrer que

$$\mathbb{E}[N_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{2k} = 0).$$

(Exprimer N_0 à l'aide de fonctions indicatrices)

En écrivant

$$N_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=0\}},$$

on obtient, par linéarité de l'espérance (et par théorème de convergence monotone),

$$\mathbb{E}[N_0] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=0\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_n=0\}}],$$

et le fait que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ pour tout événement A donne la première égalité attendue. La seconde vient de la remarque faite à la question 1 selon laquelle $P^n(0, 0) = 0$ si n est impair.

4. Rappeler pourquoi, si 0 est transient, $\mathbb{E}[N_0] < \infty$.

Si un état x est transient, on sait par le cours que le nombre de visites en cet état suit une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(\tau_x = \infty)$ (> 0 vu que x est transient). En particulier, $\mathbb{E}_x[N_x] = \frac{1}{\mathbb{P}_x(\tau_x = \infty)} < \infty$.

5. Montrer que

$$\mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}.$$

En déduire que

$$\mathbb{P}(X_{2k} = 0) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}.$$

Pour avoir $X_{2k} = 0$, partant de $X_0 = 0$, il faut et il suffit que parmi les $2k$ premières transitions de la chaîne de Markov, il y ait k transitions vers la droite ($i \rightarrow i+1$) et k vers la gauche ($i \rightarrow i-1$). Il existe $\binom{2k}{k}$ façons de choisir quelles transitions sont vers la droite, et chaque possibilité a pour probabilité $(\frac{1}{2})^{2k}$ vu la définition de P . D'où, en sommant sur les différentes possibilités, $\mathbb{P}(X_{2k} = 0) = (\frac{1}{2})^{2k} \binom{2k}{k}$. Autre écriture, sous forme de formule :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2k} = 0) &= \sum_{\substack{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{2k-1} \in \{-1, 1\} \\ \text{tels que } \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{2k-1} = 0}} \mathbb{P}(X_1 = X_0 + \varepsilon_0, \dots, X_{2k} = X_{2k-1} + \varepsilon_{2k-1}) \\ &= \sum_{\text{idem}} P(0, \varepsilon_0) P(\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \varepsilon_1) \cdots P(\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{2k-2}, \varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{2k-2} + \varepsilon_{2k-1}) \\ &= \sum_{\text{idem}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = N \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, \end{aligned}$$

où N est le nombre de termes de la somme, c'est-à-dire $\binom{2k}{k}$, vu que la condition $\varepsilon_0 + \dots + \varepsilon_{2k-1} = 0$ équivaut à dire qu'il y a k termes égaux à $+1$ et k égaux à -1 , et le nombre de choix de k termes parmi $2k$ est $\binom{2k}{k}$.

L'équivalent de $\mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \frac{1}{4^k} \frac{(2k)!}{k!^2}$ vient de la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$: substituer et simplifier.

6. Conclure : quelle la nature de la chaîne ? (Si elle est récurrente, préciser récurrente nulle ou positive)

Vu l'équivalent trouvé à la question 5, la série $\sum_k \mathbb{P}(X_{2k} = 0)$ diverge, c'est-à-dire, par la question 3, $\mathbb{E}[N_0] = \infty$ et donc, par la question 4, 0 est récurrent. Par la question 1, la chaîne est irréductible, donc tous les états sont récurrents. De plus, par la question 2, on sait qu'il n'y a pas de probabilité invariante (la somme $\sum_k \nu(k)$ vaut 0 si $B = 0$ et ∞ sinon, donc jamais 1). Par suite, la chaîne de Markov est récurrente nulle.

Exercice 2 – Mesure réversible. Soit $X = (X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace d'états E . On suppose qu'il existe une mesure π telle que, pour tous $x, y \in E$,

$$\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x).$$

π est appelée une mesure réversible pour X .

1. Montrer que π est une mesure invariante pour X .

Pour tout état y , on a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \pi(x)p(x, y) &= \sum_{x \in E} \pi(y)p(y, x) \quad [\text{par la réversibilité}] \\ &= \pi(y) \sum_{x \in E} p(y, x) \\ &= \pi(y) \quad [\text{car la somme de chaque ligne de la matrice de transition vaut 1}] \end{aligned}$$

ce qui montre que π est invariante.

2. On suppose de plus que π est une mesure de probabilité. Quelle est la loi de X_n si la loi initiale est π ? Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in E$,

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = y | X_{n+1} = x) = p(x, y).$$

Si X_0 suit la loi π , alors X_1 suit la loi $\pi P = \pi$ et, de proche en proche, X_n suit la loi π pour tout n . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\pi(X_n = y | X_{n+1} = x) &= \frac{\mathbb{P}_\pi(X_n = y, X_{n+1} = x)}{\mathbb{P}_\pi(X_{n+1} = x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_\pi(X_n = y)p(y, x)}{\mathbb{P}_\pi(X_{n+1} = x)} \\ &= \frac{\pi(y)p(y, x)}{\pi(x)} \quad [\text{vu la remarque précédente}] \\ &= p(x, y) \quad [\text{par la réversibilité}]. \end{aligned}$$

3. Soit $N \geq 1$. Montrer, pour $0 \leq n \leq N$ et $x_n, \dots, x_N \in E$,

$$\mathbb{P}_\pi(X_n = x_n | X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n+2} = x_{n+2}, \dots, X_N = x_N) = p(x_{n+1}, x_n).$$

Que signifie cette propriété?

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\pi(X_n = x_n | X_{n+1} = x_{n+1}, X_{n+2} = x_{n+2}, \dots, X_N = x_N) \\ &= \frac{\mathbb{P}_\pi(X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_N = x_N)}{\mathbb{P}_\pi(X_{n+1} = x_{n+1}, \dots, X_N = x_N)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_\pi(X_n = x_n)p(x_n, x_{n+1}) \cdots p(x_{N-1}, x_N)}{\mathbb{P}_\pi(X_{n+1} = x_{n+1})p(x_{n+1}, x_{n+2}) \cdots p(x_{N-1}, x_N)} \\ &= \frac{\pi(x_n)p(x_n, x_{n+1})}{\pi(x_{n+1})} \\ &= p(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

avec les mêmes justifications qu'à la question précédente. Ainsi, en quelque sorte, le passé dépend du futur de la même manière que le futur dépend du passé, à savoir uniquement en fonction du présent ($X_{n+1} = x_{n+1}$ ci-dessus) et via la matrice p . Plus précisément, cette propriété montre que, si la loi initiale est π (la loi invariante, supposée réversible), alors le processus $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ défini par $Y_n = X_{N-n}$ pour $0 \leq n \leq N$ est une chaîne de Markov, de loi initiale π , de matrice de transition p . En effet, en posant $n = N - m$ et $y_i = x_{N-i}$ pour tout i , on peut réécrire l'égalité de la question comme

$$\mathbb{P}_\pi(Y_m = y_m | Y_{m-1} = y_{m-1}, \dots, Y_0 = y_0) = p(y_{m-1}, y_m).$$

Ceci justifie l'appellation « réversible » : en lisant la chaîne de Markov à l'envers (de X_N vers X_0), on observe une chaîne de Markov ayant même loi (même mesure initiale, même matrice de transition), à supposer que la loi initiale soit la loi invariante.

Exercice 3. On répartit dans deux urnes un total de N boules (par exemple, N à gauche et 0 à droite). À chaque instant $n \geq 0$, on tire une boule au hasard, uniformément parmi les N boules, et on la dépose dans l'urne opposée à celle où elle se trouvait.

1. On note X_n le nombre de boules dans la première urne avant le n -ième tirage. Justifier que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov sur $E = \{0, \dots, N\}$ et donner sa matrice de transition.

Notons d'abord que, pour tout $n \geq 0$, X_n est bien à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$ puisque le nombre total de boules ne change pas ; de plus, $X_{n+1} = X_n - 1$ si la boule tirée vient de la première urne (qui en

contient X_n), et $X_{n+1} = X_n + 1$ si elle vient de la deuxième (qui en contient $N - X_n$). Puisque le sujet suppose implicitement que les tirages sont indépendants, on a donc, pour tous $x_0, \dots, x_n$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1 | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \frac{x_n}{N}$$

et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1 | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = \frac{N - x_n}{N},$$

ce qui montre que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par

$$P(x, x+1) = \frac{x}{N} \quad \text{et} \quad P(x, x-1) = \frac{N-x}{N} = 1 - \frac{x}{N}.$$

(et $P(x, y) = 0$ si $y \notin \{x-1, x+1\}$).

2. Déterminer les éventuelles mesures réversibles pour la chaîne de Markov (cf. exercice précédent). Quelle est la loi invariante pour $(X_n)_n$?

Une mesure ν est réversible si, pour tous états x, y , $\nu(x)P(x, y) = \nu(y)P(y, x)$. Ici, les deux termes sont nuls si $y \notin \{x-1, x+1\}$ donc il suffit de vérifier, pour tout $0 \leq x < N$, $\nu(x)P(x, x+1) = \nu(x+1)P(x+1, x)$, c'est-à-dire

$$\nu(x) \frac{N-x}{N} = \nu(x+1) \frac{x+1}{N}.$$

On a donc

$$\nu(1) = \frac{N}{1} \nu(0), \quad \nu(2) = \frac{N-1}{2} \nu(1) = \frac{N(N-1)}{2} \nu(0), \quad \nu(3) = \frac{N-2}{3} \nu(2) = \frac{N(N-1)(N-2)}{2 \cdot 3} \nu(0)$$

et on montre par récurrence que, pour $0 \leq x \leq N$,

$$\nu(x) = \frac{N(N-1) \cdots (N-x+1)}{x!} \nu(0) = \binom{N}{x} \nu(0).$$

Pour $\nu(0) \geq 0$, ce sont les mesures réversibles. Vu l'exercice précédent, ces mesures sont invariantes. Pour obtenir la probabilité invariante π , on calcule la masse totale :

$$\sum_{x=0}^N \nu(x) = \sum_{x=0}^N \binom{N}{x} \nu(0) = \left(\sum_{x=0}^N \binom{N}{x} 1^x 1^{N-x} \right) \nu(0) = (1+1)^N \nu(0) = 2^N \nu(0)$$

(par la formule du binôme de Newton), donc la masse totale vaut 1 lorsque $\nu(0) = 2^{-N}$. Autrement dit, la loi invariante est la loi π donnée par

$$\pi(x) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{x}.$$

C'est la loi binomiale de paramètre $(N, \frac{1}{2})$.

3. Calculer la période de la chaîne. Que pouvez-vous dire de la limite en loi de $(X_n)_{n \geq 0}$?

Il suffit de considérer la période de l'état 0 (la première urne est vide) puisque la chaîne est irréductible. Pour que la première urne soit à nouveau vide, il faut qu'il y ait eu autant d'échanges dans un sens que dans l'autre, ce qui n'est possible qu'après un nombre pair d'échanges. De plus, c'est possible après 2 échanges ($P^2(0,0) \geq P(0,1)P(1,0) > 0$). Comme dans l'exercice 1, la période est donc 2. La chaîne n'est pas apériodique, donc $(X_n)_n$ ne converge pas en loi vers π . En revanche, par le théorème du cours, $(X_{2n})_n$ converge en loi vers π_0 et $(X_{2n+1})_n$ vers π_1 données par, pour $0 \leq x \leq N/2$,

$$\pi_0(2x) = 2 \frac{1}{2^N} \binom{N}{2x} \quad \text{et} \quad \pi_1(2x+1) = 2 \frac{1}{2^N} \binom{N}{2x+1}.$$

C'est-à-dire $\mathbb{P}_\nu(X_{2n} = 2x) \rightarrow_n \pi_0(2x)$ et $\mathbb{P}_\nu(X_{2n+1} = 2x+1) \rightarrow_n \pi_1(2x+1)$ où ν est quelconque.