

Quelques contributions à l'étude des marches aléatoires en milieu aléatoire

Laurent Tournier

Institut Camille Jordan, Université Lyon 1

Thèse sous la direction de Christophe Sabot

Soutenance de thèse, le 25 Juin 2010



Plan de l'exposé

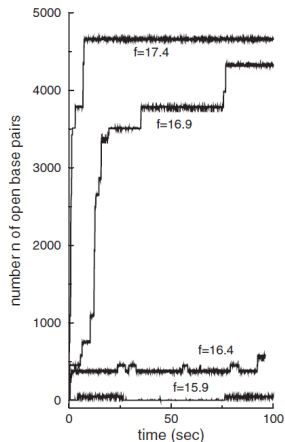
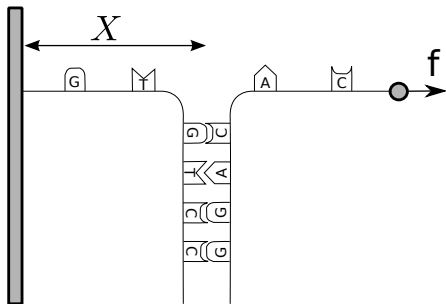
- 1 Introduction
 - Motivation
 - Modèle
 - Résultats
- 2 Fluctuations stables des MAMAs transientes sur \mathbb{Z}
 - Énoncés
 - Potentiel
 - Preuve
- 3 Environnements de Dirichlet
 - Définition
 - Résultats

Marches aléatoires en milieu aléatoire

- Modèle datant des années 1970, en physique et en biologie
- Motivation : affiner les modèles des phénomènes de transport (diffusion de matière) en tenant compte des fluctuations du milieu
 - petites perturbations (irregularités,...)
 - inhomogénéités intrinsèques (cf. alliage, ADN)
- Modélisation par un milieu aléatoire : régularité statistique sur de grandes échelles

Dézippage d'une chaîne d'ADN

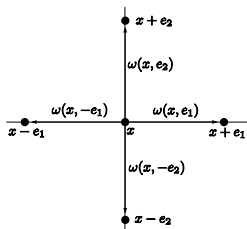
Expérience de micromanipulation (Bockelmann *et al.*, 1997)



Définition du modèle – loi *quenched*

Base canonique (e_1, \dots, e_d) de \mathbb{Z}^d . $\mathcal{V} = \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$
 Un *environnement* sur \mathbb{Z}^d est une famille

$$\omega = (\omega(x, e), e \in \mathcal{V})_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega = (\text{Prob}(\mathcal{V}))^{\mathbb{Z}^d}$$



Pour $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, loi *quenched* issue de x :

$P_{x,\omega}$: loi de la chaîne de Markov issue de x de transition ω .

Définition du modèle – loi *annealed*

Soit μ une loi sur $\text{Prob}(\mathcal{V})$.

On munit Ω de la probabilité $P = \mu^{\mathbb{Z}^d}$ (loi du milieu aléatoire).

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, loi *annealed* issue de x :

$$\mathbb{P}_x(\cdot) = \int_{\Omega} P_{x,\omega}(\cdot) dP(\omega) = E[P_{x,\omega}(\cdot)].$$

(loi de la marche aléatoire en milieu aléatoire)

Définition du modèle – loi *annealed*

Soit μ une loi sur $\text{Prob}(\mathcal{V})$.

On munit Ω de la probabilité $P = \mu^{\mathbb{Z}^d}$ (loi du milieu aléatoire).

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, loi *annealed* issue de x :

$$\mathbb{P}_x(\cdot) = \int_{\Omega} P_{x,\omega}(\cdot) dP(\omega) = E[P_{x,\omega}(\cdot)].$$

(loi de la marche aléatoire en milieu aléatoire)

Loi de X , où (X, ω) est tel que $\omega \sim P$ et, sachant ω , $X \sim P_{x,\omega}$.

Définition du modèle – loi *annealed*

Soit μ une loi sur $\text{Prob}(\mathcal{V})$.

On munit Ω de la probabilité $P = \mu^{\mathbb{Z}^d}$ (loi du milieu aléatoire).

Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, loi *annealed* issue de x :

$$\mathbb{P}_x(\cdot) = \int_{\Omega} P_{x,\omega}(\cdot) dP(\omega) = E[P_{x,\omega}(\cdot)].$$

(loi de la marche aléatoire en milieu aléatoire)

Loi de X , où (X, ω) est tel que $\omega \sim P$ et, sachant ω , $X \sim P_{x,\omega}$.

Sous \mathbb{P}_x , les pas de X ne sont pas indépendants
(il y a renforcement des transitions choisies)

Principaux résultats de la thèse

- Environnements de Dirichlet sur \mathbb{Z}^d
 - Condition d'intégrabilité des temps de sortie de parties finies sous \mathbb{P}_o
 - Critère de ballisticité ($\frac{X_n}{n} \rightarrow v \neq 0$)
 - Critère de transience directionnelle ($X_n \cdot \ell \rightarrow +\infty$)

- Sur \mathbb{Z} , dans le cas balistique sous-diffusif
 - Théorème limite pour les fluctuations de $\frac{X_n}{n}$ par rapport à v
 - avec constantes explicites
 - et une analyse fine du comportement *quenched* de la marche

Articles



L. Tournier (2008)

Integrability of exit times and ballisticity of random walks in Dirichlet environment.

Electronic Journal of Probability, 14, no. 16, 431–451.



L. Tournier et C. Sabot (2009)

Time reversal and directional transience of random walks in Dirichlet environment.

Annales de l'Institut Poincaré (à paraître)



N. Enriquez, C. Sabot, L. Tournier et O. Zindy (2010)

Stable fluctuations of ballistic random walks in random environment on \mathbb{Z} .

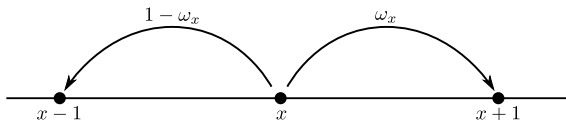
Prépublication, disponible sur arXiv

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Modèle
 - Résultats
- 2 Fluctuations stables des MAMAs transientes sur \mathbb{Z}
 - Énoncés
 - Potentiel
 - Preuve
- 3 Environnements de Dirichlet
 - Définition
 - Résultats

MAMA sur \mathbb{Z}

Environnement : famille $(\omega_x)_{x \in \mathbb{Z}} \in \Omega = (0, 1)^{\mathbb{Z}}$



Loi μ sur $(0, 1)$, d'où $P = \mu^{\mathbb{Z}}$ sur Ω .

Transience/Récurrance

On pose $\rho = \frac{1-\omega_0}{\omega_0}$.

Théorème (Solomon 1975)

- Si $E[\log \rho] < 0$ alors $X_n \rightarrow_n +\infty$, \mathbb{P}_0 -p.s.
- Si $E[\log \rho] = 0$ alors

$$\liminf_n X_n = -\infty \text{ et } \limsup_n X_n = +\infty, \quad \mathbb{P}_0\text{-p.s.}$$

Transience/Récurrance

On pose $\rho = \frac{1-\omega_0}{\omega_0}$.

Théorème (Solomon 1975)

- Si $E[\log \rho] < 0$ alors $X_n \rightarrow_n +\infty$, \mathbb{P}_0 -p.s.
- Si $E[\log \rho] = 0$ alors

$$\liminf_n X_n = -\infty \text{ et } \limsup_n X_n = +\infty, \quad \mathbb{P}_0\text{-p.s.}$$

On suppose $E[\log \rho] < 0$. Alors

- Si $E[\rho] < 1$ alors $\frac{X_n}{n} \rightarrow_n v = \frac{1 - E[\rho]}{1 + E[\rho]} > 0$, \mathbb{P}_0 -p.s.
- Si $E[\rho] \geq 1$ alors $\frac{X_n}{n} \rightarrow_n 0$, \mathbb{P}_0 -p.s.

Fluctuations stables

Hypothèses

- (a) Il existe $0 < \kappa < 2$ tel que $E[\rho^\kappa] = 1$, et $E[\rho^\kappa(\log \rho)_+] < \infty$
 (b) La loi de $\log \rho$ est non-arithmétique.

Théorème (Kesten-Kozlov-Spitzer 1975)

Supposons (a)-(b). Alors, sous \mathbb{P}_0 ,

• Si $0 < \kappa < 1$, $\frac{X_n}{n^\kappa} \xrightarrow[\text{loi}]{n} (A_\kappa \mathcal{S}_\kappa)^{-1/\kappa}$ $E[e^{it\mathcal{S}_\kappa}] = e^{-(-it)^\kappa}$

• Si $\kappa = 1$, $\frac{X_n - A_1 \frac{n}{\log n} u_n}{(\log n)^2} \xrightarrow[\text{loi}]{n} -A_1 \mathcal{S}_1$ $E[e^{it\mathcal{S}_1}] = e^{-\frac{\pi}{2}|t| - it \log |t|}$

• Si $1 < \kappa < 2$, $\frac{X_n - vn}{n^{1/\kappa}} \xrightarrow[\text{loi}]{n} -v^{1+\frac{1}{\kappa}} A_\kappa \mathcal{S}_\kappa$ $E[e^{it\mathcal{S}_\kappa}] = e^{(-it)^\kappa}$

$u_n \rightarrow 1, A_\kappa > 0$ (\mathcal{S}_κ suit une loi κ -stable totalement asymétrique)

Explicitation des constantes

On note C_K la constante de renouvellement de Kesten :

$$\text{si } R = 1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \dots, \quad P(R > t) \sim C_K t^{-\kappa}.$$

Théorème (Enriquez-Sabot-T.-Zindy 2010)

- On a, pour $\kappa \neq 1$, $A_\kappa = 2 \left(\frac{\pi \kappa^2}{|\sin(\pi \kappa)|} (C_K)^2 E[\rho^\kappa \log \rho] \right)^{1/\kappa}$ et

$$A_1 = \frac{E[\rho \log \rho]}{2}.$$

Notamment, si $\kappa = 1$ (i.e. $E[\rho] = 1$), on a donc

$$\frac{X_n}{n/\log n} \xrightarrow[n]{(p)} \frac{E[\rho \log \rho]}{2}.$$

Explicitation des constantes

On note C_K la constante de renouvellement de Kesten :

$$\text{si } R = 1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \dots, \quad P(R > t) \sim C_K t^{-\kappa}.$$

Théorème (Enriquez-Sabot-T.-Zindy 2010)

• On a, pour $\kappa \neq 1$, $A_\kappa = 2 \left(\frac{\pi \kappa^2}{|\sin(\pi \kappa)|} (C_K)^2 E[\rho^\kappa \log \rho] \right)^{1/\kappa}$ et

$$A_1 = \frac{E[\rho \log \rho]}{2}.$$

Notamment, si $\kappa = 1$ (i.e. $E[\rho] = 1$), on a donc

$$\frac{X_n}{n/\log n} \xrightarrow[n]{(p)} \frac{E[\rho \log \rho]}{2}.$$

Si $\mu = \text{Beta}(\alpha, \beta)$, alors $\kappa = \alpha - \beta$ et $\frac{1}{C_K} = (\alpha - \beta)B(\alpha - \beta, \beta)$

Explicitation des constantes

On note C_K la constante de renouvellement de Kesten :

$$\text{si } R = 1 + \rho_1 + \rho_1\rho_2 + \dots, \quad P(R > t) \sim C_K t^{-\kappa}.$$

Théorème (Enriquez-Sabot-T.-Zindy 2010)

- On a, pour $\kappa \neq 1$, $A_\kappa = 2 \left(\frac{\pi \kappa^2}{|\sin(\pi \kappa)|} (C_K)^2 E[\rho^\kappa \log \rho] \right)^{1/\kappa}$ et

$$A_1 = \frac{E[\rho \log \rho]}{2}.$$

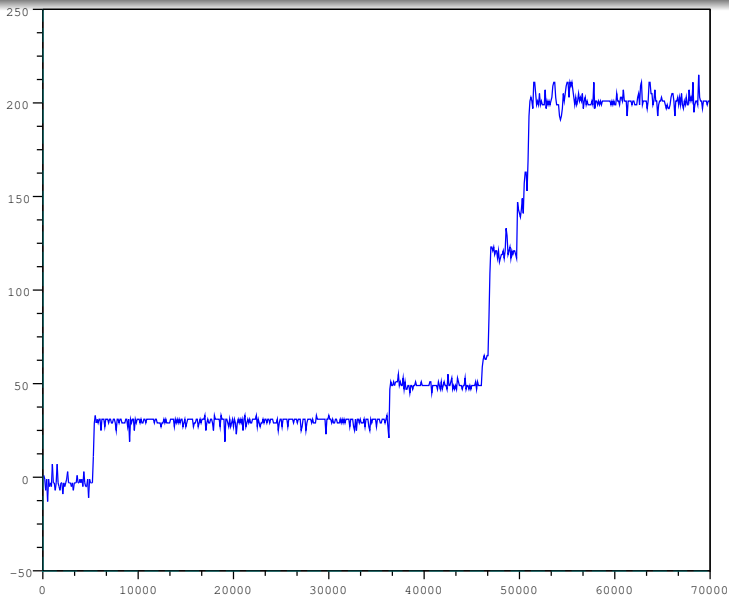
Notamment, si $\kappa = 1$ (i.e. $E[\rho] = 1$), on a donc

$$\frac{X_n}{n/\log n} \xrightarrow[n]{(p)} \frac{E[\rho \log \rho]}{2}.$$

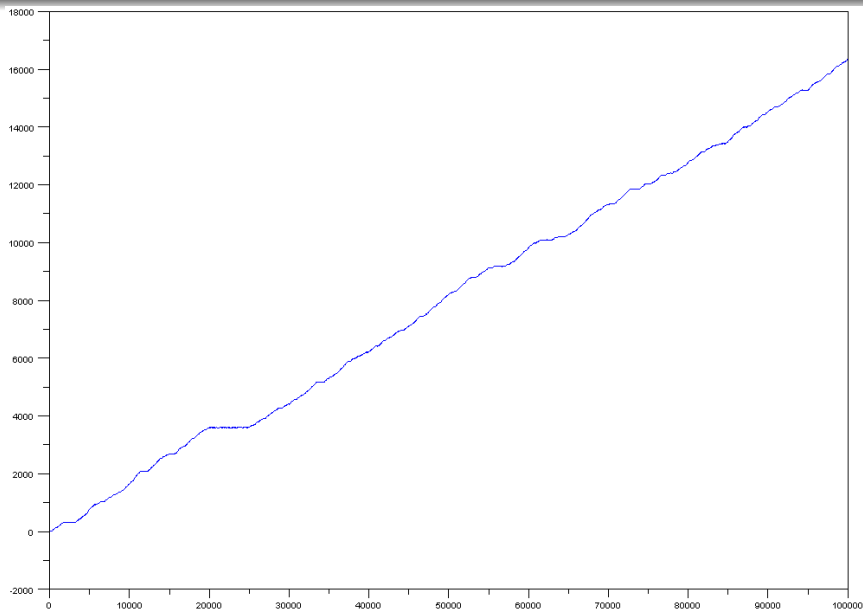
- Description du comportement *quenched*

Si $\mu = \text{Beta}(\alpha, \beta)$, alors $\kappa = \alpha - \beta$ et $\frac{1}{C_K} = (\alpha - \beta)B(\alpha - \beta, \beta)$

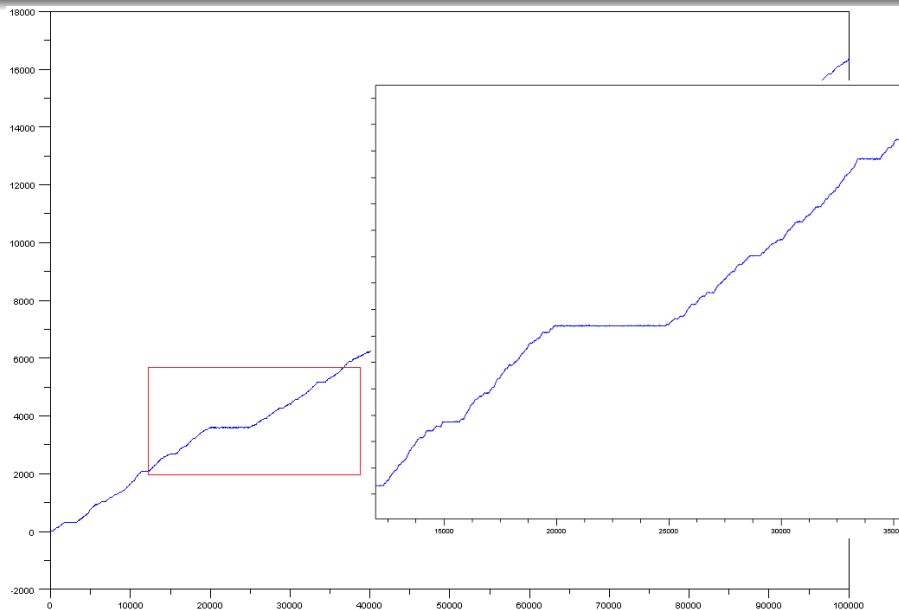
Exemple de trajectoire ($0 < \kappa < 1$)



Exemple de trajectoire ($1 < \kappa < 2$)



Exemple de trajectoire ($1 < \kappa < 2$)



Potentiel associé à l'environnement

Pour $x \in \mathbb{Z}$, on définit $V(x)$ par $V(0) = 0$ et

$$\omega_x = \frac{e^{-V(x)}}{e^{-V(x)} + e^{-V(x-1)}}$$

Potentiel associé à l'environnement

Pour $x \in \mathbb{Z}$, on définit $V(x)$ par $V(0) = 0$ et

$$\omega_x = \frac{e^{-V(x)}}{e^{-V(x)} + e^{-V(x-1)}}$$

$V(x)$ est « l'énergie du système quand X est sur $(x, x + 1)$ »

Potentiel associé à l'environnement

Pour $x \in \mathbb{Z}$, on définit $V(x)$ par $V(0) = 0$ et

$$\omega_x = \frac{e^{-V(x)}}{e^{-V(x)} + e^{-V(x-1)}}$$

$V(x)$ est « l'énergie du système quand X est sur $(x, x + 1)$ »

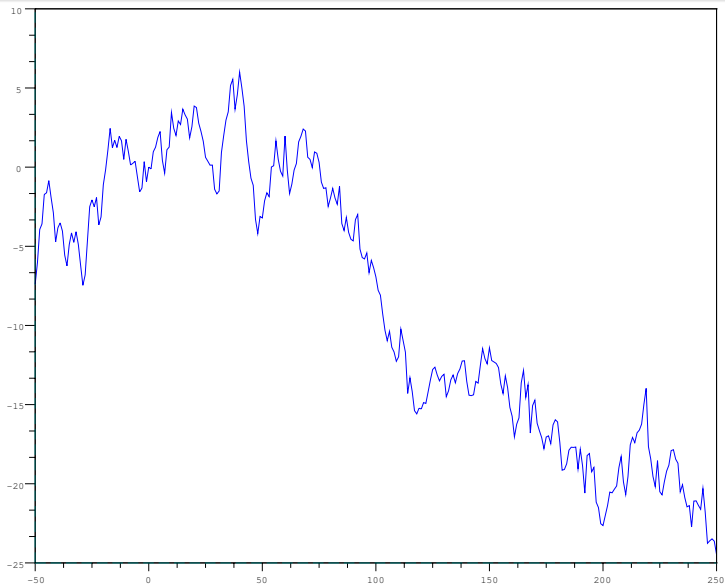
$$V(x) - V(x - 1) = \log \frac{1 - \omega_x}{\omega_x}$$

d'où

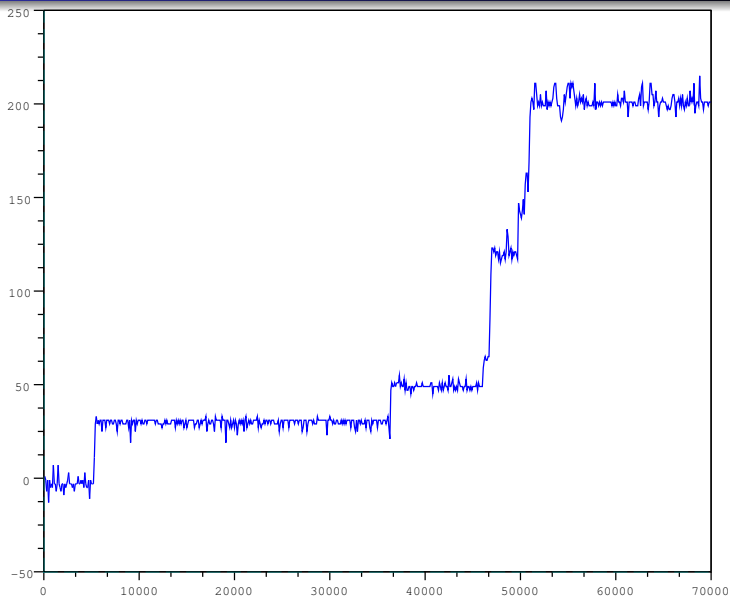
$$V(x) = \begin{cases} \sum_{0 < y \leq x} \log \rho_y & \text{si } x \geq 0 \\ -\sum_{x < y \leq 0} \log \rho_y & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\rho_y = \frac{1 - \omega_y}{\omega_y}$

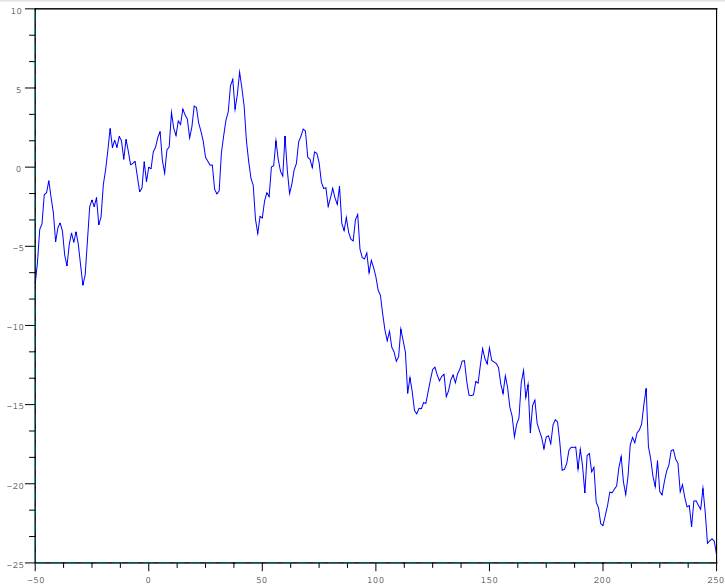
Exemple de potentiel



Exemple de trajectoire



Exemple de potentiel



Principe de la preuve (cas balistique)

De façon équivalente, on montre un théorème limite pour la suite des temps d'atteinte $\tau(x) = \inf\{k | X_k = x\}$:

$$\frac{\tau(x) - \mathbb{E}_0[\tau(x)]}{x^{1/\kappa}} \xrightarrow[x]{(\text{loi})} A_\kappa \mathcal{S}_\kappa$$

Principe de la preuve (cas balistique)

De façon équivalente, on montre un théorème limite pour la suite des temps d'atteinte $\tau(x) = \inf\{k | X_k = x\}$:

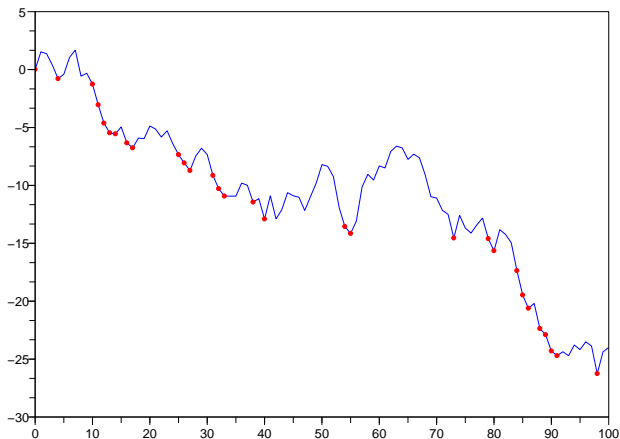
$$\frac{\tau(x) - \mathbb{E}_0[\tau(x)]}{x^{1/\kappa}} \xrightarrow[x]{(\text{loi})} A_\kappa \mathcal{S}_\kappa$$

« La contribution principale aux fluctuations de $\tau(x)$ vient de la traversée d'un petit nombre de hautes barrières de potentiel »

Découpage du potentiel en excursions

Temps de descente large du potentiel : $e_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$,

$$e_{n+1} = \inf\{k \geq e_n | V(k) \leq V(e_n)\}.$$

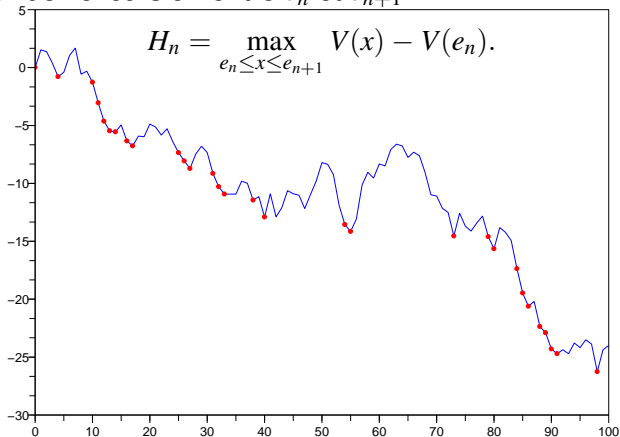


Découpage du potentiel en excursions

Temps de descente large du potentiel : $e_0 = 0$ et, pour $n \geq 0$,

$$e_{n+1} = \inf\{k \geq e_n \mid V(k) \leq V(e_n)\}.$$

Hauteur de l'excursion entre e_n et e_{n+1} :



Étapes de la preuve – Loi d'une traversée

- Estimée d'Iglehart :

$$P(H > h) \sim C_I e^{-\kappa h}$$

Étapes de la preuve – Loi d'une traversée

- Estimée d'Iglehart :

$$P(H > h) \sim C_I e^{-\kappa h}$$

- Loi du temps de traversée d'une haute excursion $\tau(e_1)$

$$\tau(e_1) \simeq E_\omega[\tau(e_1)]e,$$

où $e \sim \mathcal{E}(1)$, et $E_\omega[\tau(e_1)] \simeq e^H M_1 M_2$. Quand $t \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}_0^{\geq 0}(\tau(e_1) > t) \sim C_T t^{-\kappa}.$$

Étapes de la preuve – Découpage (cas balistique)

Excursion est « haute » si de hauteur $\geq h_n = \frac{1}{\kappa} \log n - \log \log n$

On décompose

$$\tau(e_n) = \tau_{\text{petites}} + \tau_{\text{hautes}}$$

Étapes de la preuve – Découpage (cas balistique)

Excursion est « haute » si de hauteur $\geq h_n = \frac{1}{\kappa} \log n - \log \log n$

On décompose

$$\tau(e_n) = \tau_{\text{petites}} + \tau_{\text{hautes}}$$

Hautes excursions :

- Il y a de l'ordre de $(\log n)^\kappa$ hautes excursions avant e_n
- Définition de vallées profondes ; disjointes avec grande probabilité
- À des termes négligeables près, τ_{hautes} est somme de variables indépendantes et de même loi

Étapes de la preuve – Découpage (cas balistique)

Excursion est « haute » si de hauteur $\geq h_n = \frac{1}{\kappa} \log n - \log \log n$

On décompose

$$\tau(e_n) = \tau_{\text{petites}} + \tau_{\text{hautes}}$$

Hautes excursions :

- Il y a de l'ordre de $(\log n)^\kappa$ hautes excursions avant e_n
- Définition de vallées profondes ; disjointes avec grande probabilité
- À des termes négligeables près, τ_{hautes} est somme de variables indépendantes et de même loi

Petites excursions :

- $\text{Var}_0(\tau_{\text{petites}}) = \text{Var}(E_{0,\omega}[\tau_{\text{petites}}]) + E[\text{Var}_{0,\omega}(\tau_{\text{petites}})] = o(n^{2/\kappa})$

Plan de l'exposé

- 1 Introduction
 - Motivation
 - Modèle
 - Résultats
- 2 Fluctuations stables des MAMAs transientes sur \mathbb{Z}
 - Énoncés
 - Potentiel
 - Preuve
- 3 Environnements de Dirichlet
 - Définition
 - Résultats

Loi de Dirichlet

Soit une famille $\alpha = (\alpha_e)_{e \in \mathcal{V}}$ (où $\mathcal{V} = \{\pm e_i, 1 \leq i \leq d\}$).

On note aussi $\alpha_{\pm i} = \alpha_{\pm e_i}$.

La loi de Dirichlet de paramètre α sur $\text{Prob}(\mathcal{V})$ est

$$\mathcal{D}((\alpha_e)_{e \in \mathcal{V}}) = \frac{\Gamma(\sum_{e \in \mathcal{V}} \alpha_e)}{\prod_{e \in \mathcal{V}} \Gamma(\alpha_e)} \left(\prod_{e \in \mathcal{V}} x_e^{\alpha_e - 1} \right) d\lambda((x_e)_e),$$

$\lambda((x_e)_e) = \prod_{e \neq e_0} dx_e$ étant la mesure de Lebesgue sur $\text{Prob}(\mathcal{V})$.

Loi de Dirichlet et marches renforcées

La loi de la marche aléatoire en milieu aléatoire de Dirichlet de paramètre α vérifie :

$$\mathbb{P}_o((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_n(e)}{\sum_{f=X_n} (\alpha_f + N_n(f))},$$

où $N_n(f)$ est le nombre de traversées de l'arête f avant l'instant n .

Loi de Dirichlet et marches renforcées

La loi de la marche aléatoire en milieu aléatoire de Dirichlet de paramètre α vérifie :

$$\mathbb{P}_o((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \dots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_n(e)}{\sum_{f=X_n} (\alpha_f + N_n(f))},$$

où $N_n(f)$ est le nombre de traversées de l'arête f avant l'instant n .

Proposition

La loi *annealed* de la marche aléatoire dans un environnement de Dirichlet de paramètres $(\alpha_e)_{e \in \mathcal{V}}$ coïncide avec la loi d'une marche aléatoire linéairement renforcée par arêtes orientées de poids initiaux $(\alpha_e)_{e \in \mathcal{V}}$.

En dimension $d \geq 2$

Pour les MAMAs en général, résultats très partiels.

- Environnements équilibrés ($\omega(x, x + e) = \omega(x, x - e)$ p.s.) : récurrent (transient) si $d \leq 2$ ($d \geq 3$) (Zeitouni)
- Fluctuations isotropes/anisotropes par rapport à la marche simple (Bricmont-Kupiainen, Sznitman, Bothausen-Zeitouni)
- Balisticité : critère de Kalikow, conditions (T),(T') de Sznitman

En dimension $d \geq 2$

Pour les MAMAs en général, résultats très partiels.

- Environnements équilibrés ($\omega(x, x + e) = \omega(x, x - e)$ p.s.) : récurrent (transient) si $d \leq 2$ ($d \geq 3$) (Zeitouni)
- Fluctuations isotropes/anisotropes par rapport à la marche simple (Bricmont-Kupiainen, Sznitman, Bothausen-Zeitouni)
- Balisticité : critère de Kalikow, conditions (T),(T') de Sznitman

(souvent sous l'hypothèse d'ellipticité uniforme : $\omega_e > \varepsilon$ p.s.).

Condition d'intégrabilité

$G = (V \cup \{\partial\}, E)$ graphe **fini** orienté, $(\alpha_e)_{e \in E}$ des poids > 0 .
 Les marches sur G sont tuées en ∂ . On suppose que tout sommet est relié à ∂ .

Pour $\omega \in \Omega$, on note $G^\omega(x, y)$ le nombre moyen de visites à y sous $P_{x, \omega}$.

Pour $A \subset E$, on note $\beta_A = \sum_{e \in \partial EA} \alpha_e$.

Théorème (T. 2008)

Soit $o \in V$. Pour tout $s > 0$, de façon équivalente :

- 1 $E[G^\omega(o, o)^s] < \infty$;
- 2 pour tout $A \subset E$ connexe avec $o \in \underline{A}$, $\beta_A > s$.

Condition d'intégrabilité

$G = (V \cup \{\partial\}, E)$ graphe **fini** orienté, $(\alpha_e)_{e \in E}$ des poids > 0 .
 Les marches sur G sont tuées en ∂ . On suppose que tout sommet est relié à ∂ .

Pour $\omega \in \Omega$, on note $G^\omega(x, y)$ le nombre moyen de visites à y sous $P_{x, \omega}$.

Pour $A \subset E$, on note $\beta_A = \sum_{e \in \partial EA} \alpha_e$.

Théorème (T. 2008)

Soit $o \in V$. Pour tout $s > 0$, de façon équivalente :

- 1 $E[G^\omega(o, o)^s] < \infty$;
- 2 pour tout $A \subset E$ connexe avec $o \in \underline{A}$, $\beta_A > s$.

Condition de non-intégrabilité et rôle de β_A .

Pour $\varepsilon > 0$, sur $\mathcal{E}_\varepsilon = \{\forall e \in \partial EA, \omega_e \leq \varepsilon\}$, $E_{o, \omega}[T_A] \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Et on a $P(\mathcal{E}_\varepsilon) \sim C\varepsilon^{\beta_A}$.

Condition d'intégrabilité – Idée de la preuve

On souhaite majorer $G^\omega(o, o)$.

Condition d'intégrabilité – Idée de la preuve

On souhaite majorer $G^\omega(o, o)$.

À tout $\omega \in \Omega$ on associe un sous-graphe connexe $C(\omega) \subset E$ contenant o , au sein duquel une ellipticité uniforme « faible » est vérifiée.

Condition d'intégrabilité – Idée de la preuve

On souhaite majorer $G^\omega(o, o)$.

À tout $\omega \in \Omega$ on associe un sous-graphe connexe $C(\omega) \subset E$ contenant o , au sein duquel une ellipticité uniforme « faible » est vérifiée.

Identifier entre eux les sommets de ce sous-graphe affecte peu l'intégrabilité de $G^\omega(o, o)$. Grâce à ce quotientage, on peut ainsi procéder à une récurrence sur le nombre de sommets du graphe.

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet – balisticité

Poids initiaux $\alpha_{(x, x \pm e_i)} = \alpha_{\pm i}$. On note $\Sigma = \sum_{i=1}^d \alpha_i + \alpha_{-i}$, et $d_m = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i - \alpha_{-i}}{\Sigma} e_i = E_o[X_1]$.

Théorème (T. 2008)

Si $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$, alors il existe $v \neq 0$ tel que, P_o -p.s.,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v.$$

Et, alors,

$$\left| v - \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} d_m \right|_1 < \frac{1}{\Sigma - 1}.$$

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet – balisticité

Poids initiaux $\alpha_{(x, x \pm e_i)} = \alpha_{\pm i}$. On note $\Sigma = \sum_{i=1}^d \alpha_i + \alpha_{-i}$, et $d_m = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i - \alpha_{-i}}{\Sigma} e_i = E_o[X_1]$.

Théorème (T. 2008)

Si $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$, alors il existe $v \neq 0$ tel que, P_o -p.s.,

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v.$$

Et, alors, $\left| v - \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} d_m \right|_1 < \frac{1}{\Sigma - 1}$.

(critère de Kalikow + formule d'« intégration par parties » pour la loi de Dirichlet + intégrabilité des temps de sortie de boîtes)

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet – transience

À l'aide d'une propriété de stabilité des lois de Dirichlet par retournement du temps, Sabot (2009) a montré la transience p.s. en dimension $d \geq 3$.

Sabot-T., 2009

- Preuve probabiliste de la stabilité par retournement du temps, exploitant le renforcement
- Transience directionnelle : On suppose $\alpha_i > \alpha_{-i}$. Alors

$$X_n \cdot e_i \xrightarrow[n]{} +\infty \quad \text{avec probabilité positive}$$

$$\text{d'où} \quad |X_n \cdot e_i| \xrightarrow[n]{} +\infty \quad \mathbb{P}_o - \text{p.s.}$$

$$X_n \cdot e_i \xrightarrow[n]{} +\infty \quad \mathbb{P}_o - \text{p.s. si } d \leq 2.$$

En dimension $d \geq 2$, cas Dirichlet – transience

À l'aide d'une propriété de stabilité des lois de Dirichlet par retournement du temps, Sabot (2009) a montré la transience p.s. en dimension $d \geq 3$.

Sabot-T., 2009

- Preuve probabiliste de la stabilité par retournement du temps, exploitant le renforcement
- Transience directionnelle : On suppose $\alpha_i > \alpha_{-i}$. Alors

$$X_n \cdot e_i \xrightarrow[n]{} +\infty \quad \text{avec probabilité positive}$$

$$\text{d'où} \quad |X_n \cdot e_i| \xrightarrow[n]{} +\infty \quad \mathbb{P}_o - \text{p.s.}$$

$$X_n \cdot e_i \xrightarrow[n]{} +\infty \quad \mathbb{P}_o - \text{p.s. si } d \leq 2.$$

\Rightarrow Existence d'un régime de transience directionnelle à vitesse nulle.

Environnement « inversé »

Grphe fini connexe $G = (V, E)$, environnement $\omega = (\omega_e)_{e \in E}$.

π : mesure invariante pour la chaîne de Markov de transition ω .

$\check{G} = (V, \check{E})$: graphe formé des arêtes retournées $\check{e} = (\bar{e}, \underline{e})$.

$$\text{Pour } (x, y) \in E, \check{\omega}(y, x) = \frac{\pi(x)}{\pi(y)} \omega(x, y)$$

Environnement « inversé »

Graphe fini connexe $G = (V, E)$, environnement $\omega = (\omega_e)_{e \in E}$.

π : mesure invariante pour la chaîne de Markov de transition ω .

$\check{G} = (V, \check{E})$: graphe formé des arêtes retournées $\check{e} = (\bar{e}, \underline{e})$.

$$\text{Pour } (x, y) \in E, \check{\omega}(y, x) = \frac{\pi(x)}{\pi(y)} \omega(x, y)$$

On note $\check{\alpha}_e = \alpha_{\bar{e}}$ pour $e \in \check{E}$ et, pour $x \in V$, $\alpha_x = \sum_{e=x} \alpha_e$.

Propriété

On suppose $\text{div}(\alpha) = 0$: $\alpha_x = \check{\alpha}_x$ pour tout $x \in V$. Alors :

Si ω suit la loi $P^{(\alpha)}$, alors $\check{\omega}$ suit la loi $P^{(\check{\alpha})}$.

Environnement « inversé »

Graphe fini connexe $G = (V, E)$, environnement $\omega = (\omega_e)_{e \in E}$.

π : mesure invariante pour la chaîne de Markov de transition ω .

$\check{G} = (V, \check{E})$: graphe formé des arêtes retournées $\check{e} = (\bar{e}, \underline{e})$.

$$\text{Pour } (x, y) \in E, \check{\omega}(y, x) = \frac{\pi(x)}{\pi(y)} \omega(x, y)$$

On note $\check{\alpha}_e = \alpha_{\check{e}}$ pour $e \in \check{E}$ et, pour $x \in V$, $\alpha_x = \sum_{e=x} \alpha_e$.

Propriété

On suppose $\text{div}(\alpha) = 0$: $\alpha_x = \check{\alpha}_x$ pour tout $x \in V$. Alors :

Si ω suit la loi $P^{(\alpha)}$, alors $\check{\omega}$ suit la loi $P^{(\check{\alpha})}$.

Début de preuve. Soit $\sigma = (e_1, \dots, e_n)$ un cycle de G . On a

$\check{\omega}(\check{\sigma}) = \omega(\sigma)$. D'où

$$E^{(\alpha)}[\check{\omega}(\check{\sigma})] = E^{(\alpha)}[\omega(\sigma)] = \frac{\prod_{e \in E} \alpha_e \cdots (\alpha_e + n_e(\sigma) - 1)}{\prod_{x \in V} \alpha_x \cdots (\alpha_x + n_x(\sigma) - 1)} = E^{(\check{\alpha})}[\omega(\check{\sigma})].$$

Résumé

- En dimension 1, loi *quenched* réversible (déf. du potentiel), expressions explicites de quantités *quenched*, structure linéaire des pièges

Résumé

- En dimension 1, loi *quenched* réversible (déf. du potentiel), expressions explicites de quantités *quenched*, structure linéaire des pièges \Rightarrow analyse qualitative fine du comportement *quenched* de la marche

Résumé

- En dimension 1, loi *quenched* réversible (déf. du potentiel), expressions explicites de quantités *quenched*, structure linéaire des pièges \Rightarrow analyse qualitative fine du comportement *quenched* de la marche
- En dimension supérieure, les résultats précis pour les environnements de Dirichlet sont rendus possibles par quelques relations explicites (retournement du temps, intégration par partie, et propriétés élémentaires : associativité, restriction).

Merci de votre attention !