

Critères de balisticité pour les marches aléatoires en milieu aléatoire multidimensionnel

Laurent Tournier

Sous la direction de Christophe Sabot

Table des matières

1	Présentation du modèle	3
1.1	Marche aléatoire en milieu aléatoire	3
1.2	Quelques résultats sur le modèle unidimensionnel	4
1.3	Résultats heuristiques : «pièges» et valeurs propres du laplacien	5
2	Structure de renouvellement	12
3	Condition (T), premiers résultats	19
3.1	Définition	19
3.2	Quelques premières conséquences de la structure de renouvellement	20
3.3	Condition équivalente	23
3.4	En dimension 1	27
3.5	Critère de Kalikow	28
4	Balisticité sous la condition (T)	32
4.1	Cas <i>non-nestling</i> et <i>marginal nestling</i>	32
4.2	Cas général	34
4.3	Grandes déviations	44
4.4	Théorème central limite	49
5	Critère effectif	55
5.1	Notations et énoncé	55

5.2	Etape de renormalisation	56
5.3	Récurrence	60
5.4	Fin de la preuve	62
6	Condition (T')	64
6.1	Definitions	64
6.2	Une importante majoration de grandes déviations	64
6.3	Condition équivalente	66
6.4	Retour au critère effectif	67
6.5	Généralisations	68
6.5.1	Balisticité	68
6.5.2	Grandes déviations	69
6.6	Exemple	70

Introduction

Les marches aléatoires en milieu aléatoire ont été introduites il y a une trentaine d'années pour modéliser simplement certains mouvements d'enzymes le long de brins d'ADN. Il s'agissait donc d'un modèle unidimensionnel, qui a depuis été intensément étudié. Les résultats obtenus ont mis en évidence certains phénomènes nouveaux par rapport aux marches aléatoires en milieu déterministe, en particulier un ralentissement de la transience, dont la compréhension passe par l'étude de la formation de «pièges» dans le milieu. Bien que la généralisation du modèle à un milieu multidimensionnel soit immédiate, très peu de résultats ont été obtenus dans ce cadre-ci, où les méthodes exploitées en dimension 1 s'adaptent mal ; en particulier, à la différence de la dimension 1, on ne dispose pas, pour l'instant, de classification des comportements asymptotiques selon la loi de l'environnement, et une telle classification semble encore relativement hors de portée.

L'aspect auquel on s'intéressera ici, en dimension $d \geq 2$, est la *convergence balistique* de la marche $(X_n)_n$, c'est à dire l'existence d'une limite au quotient $\frac{X_n}{n}$, autrement dit d'une vitesse asymptotique. Cette question vient affiner des résultats obtenus depuis le début des années 80 (article [3] de S. Kalikow) concernant la transience dans une direction $l \in \mathbb{S}^{d-1}$: peut-on trouver une condition sur l'environnement pour avoir, presque-sûrement, $X_n \cdot l \rightarrow_n \infty$? Une telle condition traduit l'existence d'un biais dans la direction l et la difficulté est d'obtenir un critère qui englobe des cas où ce biais n'est pas presque-sûr et donc où le caractère aléatoire de l'environnement intervient fortement (ce sera le cas *plain nestling* introduit au paragraphe 1.3). Il se trouve que le critère introduit alors suffit aussi pour avoir une convergence balistique. Ce mémoire se base pour l'essentiel sur les articles [6] et [7] d'A.-S. Sznitman qui introduisent respectivement des conditions appelées (T) et (T') étendant les critères antérieurs et garantissant la convergence balistique et un théorème central limite.

Après une courte introduction du modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire, la partie 1 évoque quelques résultats connus en dimension 1 et introduit la notion de «piège» dans l'environnement qui joue un rôle important dans la suite, en particulier à travers une classification selon l'influence qu'a le caractère aléatoire de l'environnement sur le comportement asymptotique de la marche. L'étude de la transience dans une direction repose de façon essentielle sur la mise en évidence d'une structure de renouvellement, c'est à dire la possibilité de découper la trajectoire en tronçons indépendants et équidistribués ; c'est l'objet de la section 2. On aura alors toutes les notations nécessaires pour introduire la condition (T) de Sznitman (section 3), et prouver le premier résultat important à savoir la convergence balistique sous cette condition, des résultats de grandes déviations autour de la vitesse limite, ainsi qu'un théorème central limite (section 4). La section 5 présente un critère «effectif» (on reviendra sur cette appellation) pour une condition *a priori* légèrement plus

faible que (T), la condition (T'), mais sous laquelle la marche admet également une convergence balistique, comme le montrera la section 6.

1 Présentation du modèle

1.1 Marche aléatoire en milieu aléatoire

Les marches aléatoires en milieu (ou environnement) aléatoire constituent un modèle simple de déplacement dans un environnement désordonné. Le cas étudié ici est celui d'une marche aléatoire aux plus proches voisins et à valeurs dans \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$.

Notons (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{Z}^d . Supposons associée à chaque point x de \mathbb{Z}^d une loi de probabilité $\omega(x, \cdot)$ sur l'ensemble fini $\{e \in \mathbb{Z}^d \mid |e| = 1\} = \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$. Ceci permet de définir une chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ sur les sites de \mathbb{Z}^d , la probabilité de transition du site x au site $x + e$ étant donnée par $\omega(x, e)$. La famille $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ est appelée l'«environnement» de cette marche aléatoire. Le modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire que l'on considère revient à tirer les probabilités $\omega = \omega(x, \cdot)$ au hasard (de façon indépendante entre les sites et selon la même loi) puis à regarder le processus $(X_n)_{n \geq 0}$ dont la loi se déduit de ω . Chaque tirage de ce processus $(X_n)_n$ consiste donc en un tirage de l'environnement ω puis en celui de la trajectoire $(X_n)_n$.

Formalisons cette description. On note \mathcal{P} l'ensemble des probabilités sur l'ensemble fini $\{e \in \mathbb{Z}^d \mid |e| = 1\} = \{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$; \mathcal{P} peut se voir comme l'ensemble des familles $(p(e))_{e \in \mathbb{Z}^d, |e|=1}$ de réels positifs avec $\sum_e p(e) = 1$, et donc être muni de la topologie usuelle (induite par celle de \mathbb{R}^{2d}), ainsi que de la tribu borélienne. Soit μ une probabilité sur \mathcal{P} . L'*environnement* est la famille canonique (donnée par les coordonnées) de variables aléatoires $(\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ sur l'espace $\Omega = \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$, muni de la tribu produit et de la probabilité produit $\mathbb{P} = \mu^{\otimes \mathbb{Z}^d}$. La *marche aléatoire dans le milieu* $\omega = (\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$ (*fixé*) est la chaîne de Markov canonique $(X_n)_{n \geq 0}$ d'espace d'états \mathbb{Z}^d (donc définie sur l'espace de probabilités $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu produit), donnée par la famille de probabilités $(P_{x,\omega})_{x \in \mathbb{Z}^d}$ où, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$ avec $|e| = 1$, pour tout $n \geq 1$: $P_{x,\omega}$ -p.s.,

$$P_{x,\omega}(X_0 = x) = 1$$

et :

$$P_{x,\omega}(X_{n+1} = X_n + e \mid X_0, \dots, X_n) = \omega(X_n, e).$$

La loi $P_{x,\omega}$ est appelée loi *quenched* issue de x sous l'environnement ω . Pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, on définit aussi la loi *annealed*¹ sur $\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ par moyenne de $P_{x,\omega}$ contre la loi \mathbb{P} :

$$P_x = \mathbb{P} \times P_{x,\omega}.$$

(il s'agit d'un produit semi-direct) En notant $((\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}, (X_n)_{n \geq 0})$ le processus canonique de $\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ muni de la loi P_x , $(\omega(x, \cdot))_{x \in \mathbb{Z}^d}$ suit la loi \mathbb{P} , et le processus $(X_n)_n$ est la *marche aléatoire en milieu aléatoire issue de x définie par la loi μ* ; par un léger abus de notation, on désignera aussi par P_x la loi de $(X_n)_n$, c'est à dire la marginale selon $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ de la loi précédente : $P_x = \mathbb{E}[P_{x,\omega}(\cdot)]$.

C'est ce dernier processus que l'on étudie. Il est important de noter que, sauf cas dégénéré, ce *n'est pas* une chaîne de Markov. Ceci peut se comprendre intuitivement : conditionner par rapport à X_0, \dots, X_n apporte de l'information sur l'environnement aux points X_0, \dots, X_{n-1} (les points à partir desquels une transition a déjà eu lieu) donc, si $X_n \in \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$, $X_{n+1} - X_n$ n'est pas indépendant de X_0, \dots, X_n . Dit autrement, conditionnellement au fait qu'une certaine transition $x \rightarrow x + e$ a déjà été effectuée par la marche, la loi de l'environnement n'est plus \mathbb{P} : cette transition est favorisée, renforcée, et la marche a une probabilité plus grande de l'emprunter lors de ses prochains passages en x .

¹Ce vocabulaire vient de la métallurgie : *quenched* se traduit par «trempé» et *annealed* par «recuit». La trempe consiste à plonger un matériau chaud dans un fluide plus froid ; c'est un refroidissement brutal de la pièce qui a pour objectif de figer la structure obtenue lors de la mise en solution. Par analogie, on utilise le même terme pour qualifier la situation sous la loi $P_{x,\omega}$ c'est à dire à environnement fixé («figé»). Par opposition, le recuit est une opération de chauffage de pièces métalliques, et c'est sous ce nom que l'on désigne la situation en moyenne, sous P_x .

Par la suite, on supposera toujours que la loi μ vérifie une *condition d'ellipticité stricte* : il existe $\kappa \in (0, 1)$ tel que le support de la loi μ est inclus dans l'ensemble

$$\mathcal{P}_\kappa = \{(p(e))_{e \in \mathbb{Z}^d, |e|=1} \in \mathcal{P} \mid \text{pour tout } e, p(e) \in [\kappa, 1]\}.$$

Autrement dit, μ -p.s., pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$ avec $|e| = 1$, $\omega(0, e) \geq \kappa$. En particulier, si x_0, x_1, \dots, x_n sont des points de \mathbb{Z}^d avec $x_0 = 0$ et, pour $i = 1, \dots, n$, $|x_i - x_{i-1}| = 1$, on a, en utilisant la propriété de Markov faible (à ω fixé) successivement aux temps $n-1, n-2, \dots, 1, 0$:

$$\begin{aligned} P_0(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{E}[P_{0,\omega}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)] \\ &= \mathbb{E}[E_{0,\omega}[X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, P_{x_{n-1},\omega}(X_1 = x_n - x_{n-1})]] \\ &\geq P_0(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \cdot \kappa \\ &\geq \dots \geq P_0(X_0 = x_0) \cdot \kappa^n \\ &\geq \kappa^n. \end{aligned}$$

Introduisons enfin des notations pour la suite. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, on désignera par t_x la translation de \mathbb{Z}^d de vecteur x (notons que la loi \mathbb{P} est invariante par t_x) et, pour $p \in \mathbb{N}$, l'opérateur de décalage de $(\mathbb{Z}^d)^\mathbb{N}$ de p pas vers la droite sera noté $\Theta_p : \Theta_p((X_n)_{n \geq 0}) = (X_{n+p})_{n \geq 0}$.

On fera usage de divers temps aléatoires : pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $u \in \mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} T_U &= \inf \{n \geq 0 \mid X_n \notin U\} \\ H_U &= \inf \{n > 0 \mid X_n \in U\} \\ T_u^l &= \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq u\} \\ \tilde{T}_u^l &= \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \leq u\} \\ L_u^l &= \sup \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \leq u\}. \end{aligned}$$

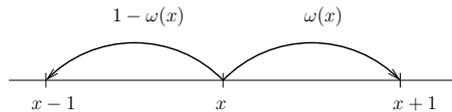
Ce sont bien sûr, à l'exception du dernier, des temps d'arrêt.

Enfin, on a déjà utilisé certaines des notations classiques suivantes : on note $|A|$ le cardinal d'un ensemble A . Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $|x|$ est la norme euclidienne de x et $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_d|$ sa norme l_1 . On désigne par (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{R}^d . La boule et la sphère unité de \mathbb{R}^d sont notées respectivement \mathbb{B}^d et \mathbb{S}^{d-1} . Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $r \geq 0$, $\mathbb{B}^d(x, r)$ est la boule de \mathbb{R}^d de rayon r centrée en x . On fera fréquemment l'abus de notation consistant, pour $U \subset \mathbb{R}^d$, à noter de même le bord ∂U de U au sens de la topologie de \mathbb{R}^d et, si $U \subset \mathbb{Z}^d$, le bord ∂U de U au sens du graphe \mathbb{Z}^d :

$$\partial U = \{x \in \mathbb{Z}^d \setminus U \mid \text{il existe } y \in U \text{ tel que } |x - y| = 1\}.$$

1.2 Quelques résultats sur le modèle unidimensionnel

Le cas $d = 1$ possède diverses particularités qui le rendent beaucoup plus simple à étudier. On en présente ici quelques unes, avec leurs premières conséquences.



L'environnement se décrit ici par une suite de réels : pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on note $p(x, \omega) = \omega(x, 1)$ (transition vers la droite) et $q(x, \omega) = 1 - p(x, \omega)$ (transition vers la gauche), de sorte que ω s'identifie à la suite $(\omega(x))_{x \in \mathbb{Z}} := (p(x, \omega))_{x \in \mathbb{Z}}$. Sous $P_{x,\omega}$, on remarque tout de suite que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est réversible; la mesure invariante peut s'écrire explicitement. On peut également écrire explicitement une

fonction f_ω harmonique, c'est à dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $(f_\omega(X_n))_{n \geq 0}$ soit une martingale (par rapport à la filtration canonique) sous $P_{x,\omega}$: on trouve, en notant $\rho(x,\omega) = \frac{q(x,\omega)}{p(x,\omega)}$,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{Z}, f_\omega(x) = \begin{cases} -\sum_{0 \leq z < x} \prod_{0 < y \leq z} \rho(y,\omega) & \text{si } x \geq 0; \\ \sum_{x \leq z < 0} \prod_{z < y \leq 0} \rho(y,\omega)^{-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

À l'aide de la loi forte des grands nombres et des théorèmes de convergence de martingale, on peut en déduire la première partie du théorème suivant (cf. [4]) :

THÉORÈME 1. – DE SOLOMON

Selon que la quantité $\mathbb{E}[\ln \rho]$ ($= \mathbb{E}[\ln \rho(x,\omega)]$ pour x quelconque) est strictement négative, strictement positive, ou nulle, on a respectivement :

- P_0 -p.s., $\lim_n X_n = +\infty$,
- P_0 -p.s., $\lim_n X_n = -\infty$, ou
- P_0 -p.s., $\limsup_n X_n = +\infty$ et $\liminf_n X_n = -\infty$.

De plus, P_0 -p.s., la suite $(\frac{X_n}{n})_{n \geq 1}$ admet une limite v déterministe, donnée par :

- si $\mathbb{E}[\rho] < 1$, $v = \frac{1-\mathbb{E}[\rho]}{1+\mathbb{E}[\rho]} > 0$,
- si $\frac{1}{\mathbb{E}[\rho^{-1}]} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho]$, $v = 0$, et
- si $1 < \frac{1}{\mathbb{E}[\rho^{-1}]}$, $v = \frac{\mathbb{E}[\rho^{-1}]-1}{1+\mathbb{E}[\rho^{-1]}} < 0$.

REMARQUES.

- Compte-tenu de l'inégalité $\frac{1}{\mathbb{E}[\rho^{-1}]} \leq \mathbb{E}[\rho]$ fournie par l'inégalité de Jensen, la seconde partie du théorème couvre effectivement tous les cas possibles.
- Il est possible d'avoir $\mathbb{E}[\ln \rho] < 0$ et $\frac{1}{\mathbb{E}[\rho^{-1}]} \leq 1 \leq \mathbb{E}[\rho]$, et dans ce cas $X_n \rightarrow_n +\infty$ et $\frac{X_n}{n} \rightarrow_n 0$.

Pour montrer cette deuxième partie du théorème, un outil utile est «l'environnement vu par la particule», c'est à dire le processus $(t_{X_n} \omega)_{n \geq 0}$ à valeurs dans Ω , dont on montre facilement que c'est une chaîne de Markov sous $P_{x,\omega}$ et sous P_x (ceci vaut en toute dimension d). Dans le cas $d = 1$, cette chaîne de Markov admet une mesure invariante absolument continue par rapport à \mathbb{P} et que l'on peut expliciter.

En dimension supérieure, on ne dispose actuellement d'aucune classification comme celle-ci, et relativement peu de résultats généraux sont connus. Sauf cas particulier, la marche n'est pas réversible, et on ne dispose pas de fonction harmonique explicite (non constante), de sorte que les méthodes précédentes ne s'appliquent pas. Le paragraphe qui suit introduit des outils pour une compréhension intuitive de certains phénomènes, les «pièges» dans l'environnement, et une première classification, assez grossière, dans cette direction.

1.3 Résultats heuristiques : «pièges» et valeurs propres du laplacien

Pour un environnement ω fixé (propriété *quenched*), les «pièges» sont des zones de l'espace où, intuitivement, la marche passe un temps long avec une forte probabilité. Cette notion apparaît importante dans l'étude des propriétés asymptotiques de la marche aléatoire. On va ici préciser ce qu'elle signifie, et mettre en évidence une classification des lois μ en plusieurs catégories selon l'intensité des pièges (cas *nestling*, *non-nestling*,...).

Soit U une partie connexe de \mathbb{Z}^d de cardinal ≥ 2 . On définit le temps de sortie de U :

$$T_U = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \notin U\}.$$

C'est bien sûr un temps d'arrêt. Par propriété de Markov, on a, pour tous $m, n \geq 0$, pour tout $x \in U$:

$$\begin{aligned} P_{x,\omega}(T_U > n + m) &= E_{x,\omega}[T_U > n, P_{X_n,\omega}(T_U > m)] \\ &\leq P_{x,\omega}(T_U > n) \sup_{x' \in U} P_{x',\omega}(T_U > m), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que la suite de terme général $\sup_{x \in U} P_{x,\omega}(T_U > n)$ (strictement positif) est sous-multiplicative, et donc que la suite $(\frac{1}{n} \ln \sup_{x \in U} P_{x,\omega}(T_U > n))_n$ converge et :

$$\lambda_\omega(U) := \lim_n -\frac{1}{n} \ln \sup_{x \in U} P_{x,\omega}(T_U > n) = -\inf_n \frac{1}{n} \ln \sup_{x \in U} P_{x,\omega}(T_U > n).$$

Cette quantité $\lambda_\omega(U) \in (0, \infty]$ mesure la «force» du piège formé par la partie U : $\lambda_\omega(U)$ est le plus petit réel λ tel que, pour tout n ,

$$\sup_{x \in U} P_{x,\omega}(T_U > n) \geq e^{-\lambda n},$$

donc si $\lambda_\omega(U)$ est petit, le temps de sortie de U est long avec une relativement grande probabilité, et par suite l'effet de piège important. Notons que la propriété d'ellipticité implique : pour tout n , pour tout $x \in U$, $P_{x,\omega}(T_U > n) \geq \kappa^n$, d'où

$$\lambda_\omega(U) \leq \ln \frac{1}{\kappa}.$$

Une autre remarque : si $U \subset V$, on a $\lambda_\omega(U) \geq \lambda_\omega(V)$ (la marche passe bien sûr plus de temps dans V que dans U).

Ce qui précède concerne la situation *quenched* : à environnement ω fixé. Montrons une minoration relative au cas *annealed* (en moyenne). Pour tout $L > 0$, on note B_L la boule euclidienne de \mathbb{R}^d centrée en 0 et de rayon L .

PROPOSITION 2. – Soit $L > 0$ et $n \geq 0$. On a :

$$P_0(T_{B_{2L}} > n) \geq \frac{1}{|B_L|} \mathbb{E} \left[e^{-n\lambda_\omega(B_L)} \right].$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in B_L$, $B_L - x \subset B_{2L}$, donc $P_0(T_{B_{2L}} > n) \geq P_0(T_{B_L - x} > n) = P_x(T_{B_L} > n)$ (en utilisant l'invariance de \mathbb{P} par translation). Par suite :

$$\begin{aligned} P_0(T_{B_{2L}} > n) &\geq \frac{1}{|B_L|} \sum_{x \in B_L} P_x(T_{B_L} > n) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{|B_L|} \sum_{x \in B_L} P_{x,\omega}(T_{B_L} > n) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\frac{1}{|B_L|} \sup_{x \in B_L} P_{x,\omega}(T_{B_L} > n) \right] \geq \frac{1}{|B_L|} \mathbb{E} \left[e^{-n\lambda_\omega(B_L)} \right]. \end{aligned}$$

□

REMARQUE. La notation $\lambda_\omega(U)$ n'est pas anodine : elle admet une interprétation spectrale. En effet, définissons l'opérateur $R_\omega^U : L_\infty(U) \rightarrow L_\infty(U)$ de la façon suivante : pour tout $f \in L_\infty(U)$,

$$\text{pour tout } x \in U, R_\omega^U f(x) = E_{x,\omega}[f(X_1), X_1 \in U] = \sum_{|e|=1, x+e \in U} \omega(x, e) f(x+e)$$

(il s'agit du laplacien discret sur U , associé à l'environnement ω). En appliquant la propriété de Markov faible, on obtient, pour tout $n \geq 0$, pour tout $f \in L_\infty$:

$$\text{pour tout } x \in U, \left((R_\omega^U)^n f \right) (x) = E_{x,\omega}[F_M(X_n), T_U > n],$$

de sorte que :

$$\left\| (R_\omega^U)^n \right\|_{\infty, \infty} = \sup_{x \in U} P_{x,\omega}(T_U > n).$$

(l'inégalité \leq est évidente, et l'autre s'obtient en choisissant f constante) On retrouve donc la sous-multiplicativité, et le rayon spectral de R_ω^U est :

$$\lim_n \left\| (R_\omega^U)^n \right\|_{\infty, \infty}^{1/n} = e^{-\lambda_\omega(U)}.$$

On va maintenant mettre en évidence une grande disparité de comportement des variables $\lambda_\omega(U)$ (dans le cas où U est une boule) selon une condition géométrique sur μ .

Pour tout $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, la dérive en x dans l'environnement ω est

$$d(x, \omega) := E_{x, \omega}[X_1 - X_0] = \sum_{|e|=1} \omega(x, e)e.$$

On note $K_0 \subset \mathbb{R}^d$ l'enveloppe convexe du support de la loi de $d(0, \omega)$ sous \mathbb{P} .

DÉFINITIONS. – On dit que l'on se trouve dans le cas :

- *non-nestling*² si $0 \notin K_0$;
- *marginal nestling* si $0 \in \partial K_0$;
- *plain nestling* si 0 appartient à l'intérieur de K_0 ,

la réunion des deux derniers cas formant le cas dit *nestling*, caractérisé par $0 \in K_0$.

Le premier cas, et dans une moindre mesure le second, traduisent l'existence d'un biais de la marche dans une direction indépendante de l'environnement (\mathbb{P} -p.s.). L'ordre de grandeur de $\lambda_\omega(B_L)$ diffère selon chacun de ces cas :

THÉORÈME 3. – Il existe des constantes $c_1(d), c_2(d) > 0$ telles que :

- dans le cas *non-nestling* :

$$\mathbb{P}\text{-p.s., pour tout } L > 1, c_2 \leq \lambda_\omega(B_L) \leq c_1;$$

- dans le cas *marginal nestling* :

$$\mathbb{P}\text{-p.s., pour tout } L > 1, \frac{c_2}{L^2} \leq \lambda_\omega(B_L), \text{ et, pour tout } L > 1, \mathbb{P}\left(\lambda_\omega(B_L) \leq \frac{c_1}{L^2}\right) > 0;$$

- dans le cas *plain nestling* :

$$\mathbb{P}\text{-p.s., pour tout } L > 1, e^{-c_1 L} \leq \lambda_\omega(B_L), \text{ et, pour tout } L \text{ grand, } \mathbb{P}\left(\lambda_\omega(B_L) \leq e^{-c_2 L}\right) > 0.$$

DÉMONSTRATION. • On se place dans le cas *non-nestling*. Autrement dit, $\eta = \inf\{|x| \mid x \in K_0\} > 0$ (K_0 est fermé) et, par convexité de K_0 , on peut trouver un vecteur unitaire $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que, pour tout $w \in K_0$, $w \cdot l \geq \eta$. Par définition du support d'une loi, l'événement :

$$\Omega_{\eta, l} = \{\text{pour tout } x \in \mathbb{Z}^d, d(x, \omega) \cdot l \geq \eta\} (\subset \Omega)$$

vérifie donc $\mathbb{P}(\Omega_{\eta, l}) = 1$. Soit $\omega \in \Omega_{\eta, l}$. La marche dans cet environnement présente un fort biais dans la direction l , d'où l'on va déduire une surmartingale. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. Pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, on a (avec un léger abus de notation) :

$$\begin{aligned} E_{x, \omega} \left[e^{-\alpha(X_1 - X_0) \cdot l} \right] &= \sum_{|e|=1} \omega(x, e) e^{-\alpha e \cdot l} \\ &= 1 - \alpha \sum_{|e|=1} \omega(x, e) e \cdot l + o_{\alpha \rightarrow 0}(\alpha) \\ &\leq 1 - \alpha \eta + \alpha \frac{\eta}{2} = 1 - \alpha \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\beta = -\ln(1 - \alpha \frac{\eta}{2})$, on a $E_{x, \omega} [e^{-\alpha(X_1 - X_0) \cdot l + \beta}] \leq 1$, si bien que :

$$(e^{-\alpha X_n \cdot l + n\beta})_{n \geq 0} \text{ est une } P_{x, \omega}\text{-surmartingale positive.}$$

Par suite, $P_{x, \omega}$ -p.s., elle converge vers un réel $a \in [0, \infty)$ et donc $X_n \cdot l \rightarrow_n +\infty$. Pour tout réel u , on définit le temps d'arrêt :

$$T_u^l = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l > u\}.$$

²Le mot *nestling*, introduit par M. Zerner dans l'article [12], se traduit par «oisillon». Dans cet article, M. Zerner montre que la propriété *nestling* équivaut à : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 2$ tel que $\mathbb{P}(P_{0, \omega}(X_n = 0) > e^{-\varepsilon n}) > 0$ (ce qui peut s'obtenir à partir de la preuve du théorème dans le cas *marginal-nestling* (qui vaut pour le cas *nestling* en général)), et en fait le commentaire suivant : «The term "nestling property" is supposed to describe figuratively the behavior of a random walker who in the sense of [this equivalent statement] sticks to the starting point roughly comparable to a young bird that often returns to its nest before if finally leaves it.»

Dès que $x \cdot l \leq u$, ce temps est $P_{x,\omega}$ -p.s. fini par ce qui précède. On applique le théorème d'arrêt au temps T_L^l : pour tout $x \in B_L$,

$$E_{x,\omega} \left[e^{-\alpha X_{T_L^l} \cdot l + \beta T_L^l} \right] \leq e^{-\alpha x \cdot l} \leq e^{\alpha L},$$

d'où, vu que $T_L^l \geq T_{B_L}$:

$$E_{x,\omega} [e^{\beta T_{B_L}}] \leq E_{x,\omega} [e^{\beta T_L^l}] \leq e^{\alpha(L+1) + \alpha L} = e^{\alpha(2L+1)}.$$

Par la définition de $\lambda_\omega(B_L)$ et l'inégalité de Markov, on a, pour tout $n \geq 0$:

$$e^{-\lambda_\omega(B_L)n} \leq \sup_{x \in B_L} P_{x,\omega}(T_{B_L} > n) \leq \sup_{x \in B_L} e^{-\beta n} E_{x,\omega} [e^{\beta T_{B_L}}] \leq e^{\alpha(2L+1) - \beta n},$$

et donc $\lambda_\omega(B_L) \geq \beta > 0$. Quant à la majoration, elle résulte d'une propriété déjà citée : $\lambda_\omega(B_L) \leq \ln \frac{1}{\kappa}$.

• Passons au cas *marginal nestling*. Ici, $0 \in K_0$ et il existe $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $K_0 \subset \{w \in \mathbb{R}^d \mid w \cdot l \geq 0\}$. Avec la notation du cas précédent, on a donc $\mathbb{P}(\Omega_{0,l}) = 1$. Soit $\omega \in \Omega_{0,l}$. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$. Notons, pour tout n ,

$$M_n = X_n \cdot l - X_0 \cdot l - A_n,$$

où

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} d(X_k, \omega) \cdot l$$

(par l'hypothèse, $(A_n)_n$ est un processus croissant). $(M_n)_n$ est une martingale sous $P_{x,\omega}$ pour tout x , et le théorème d'arrêt appliqué au temps d'arrêt T_{U_L} (fini $P_{x,\omega}$ -p.s.) donne, pour $L \geq 1$:

$$E_{x,\omega}[A_{T_{U_L}}] = E_{x,\omega}[(X_{T_{U_L}} - X_0) \cdot l] \leq 2L + 1 \leq 3L.$$

Le processus $(\widetilde{M}_n)_n$ suivant est bien sûr aussi une martingale sous $P_{x,\omega}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_n &= (X_n \cdot l)^2 - (X_0 \cdot l)^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|e|=1} \omega(X_k, e) (((X_k + e) \cdot l)^2 - (X_k \cdot l)^2) \\ &= (X_n \cdot l)^2 - (X_0 \cdot l)^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(2(X_k \cdot l) d(X_k, \omega) + \sum_{|e|=1} \omega(X_k, e) (e \cdot l)^2 \right), \end{aligned}$$

et l'application du théorème d'arrêt au temps T_{U_L} donne ici :

$$\begin{aligned} 0 &= E_{x,\omega}[\widetilde{M}_{T_{U_L}}] \\ &= E_{x,\omega}[(X_{T_{U_L}} \cdot l)^2 - (X_0 \cdot l)^2] - E_{x,\omega} \left[\sum_{k=0}^{T_{U_L}-1} 2(X_k \cdot l) d(X_k, \omega) \cdot l \right] - E_{x,\omega} \left[\sum_{k=0}^{T_{U_L}-1} \sum_{|e|=1} \omega(X_k, e) (e \cdot l)^2 \right] \\ &\leq (L+1)^2 + 0 + 2LE_{x,\omega}[A_{T_{U_L}}] - 2\kappa E_{x,\omega}[T_{U_L}], \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $d(X_k, \omega) \cdot l \geq 0$ pour minorer la première somme. Avec la majoration précédente, on obtient donc une constante $C > 0$, indépendante de x , telle que, pour tout $L \geq 1$:

$$E_{x,\omega}[T_{U_L}] \leq CL^2.$$

Pour en déduire une majoration de $E_{x,\omega}[e^{cT_{U_L}}]$ pour c petit, on utilise une méthode due à Khas'minskii (valable pour un temps de sortie relatif à une chaîne de Markov quelconque) : pour tout $c > 0$, en notant T au lieu

de T_{U_L} , on a :

$$\begin{aligned}
E_{x,\omega}[e^{cT_{U_L}}] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{m!} E_{x,\omega}[T^m] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^m}{m!} E_{x,\omega} \left[\sum_{k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0} \mathbf{1}_{\{T > k_1, \dots, T > k_m\}} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c^m E_{x,\omega} \left[\sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_m} \mathbf{1}_{\{T > k_m\}} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c^m \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{m-1}} E_{x,\omega} \left[\sum_{k \geq k_{m-1}} \mathbf{1}_{\{T > k\}} \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c^m \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{m-1}} E_{x,\omega} \left[\mathbf{1}_{\{T > k_{m-1}\}} E_{X_{k_{m-1}}, \omega} \left[\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{T > k\}} \right] \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c^m \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{m-1}} E_{x,\omega} \left[\mathbf{1}_{\{T > k_{m-1}\}} E_{X_{k_{m-1}}, \omega}[T] \right] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c^m \sum_{0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_{m-1}} E_{x,\omega} [\mathbf{1}_{\{T > k_{m-1}\}}] CL^2 \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} c^m (CL^2)^m,
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov faible puis une récurrence à la dernière ligne, d'où, pour $c = \frac{c'}{L^2}$:

$$E_{x,\omega}[e^{\frac{c'}{L^2} T_{U_L}}] \leq \frac{1}{1 - c'C} \leq 2$$

pour c' suffisamment proche de 0 (indépendant de ω). Ainsi, pour tout n ,

$$e^{-\lambda_\omega(T_{U_L})n} \leq P_{x,\omega}(T_{B_L} > n) \leq P_{x,\omega}(T_{U_L} > n) \leq e^{-\frac{c'}{L^2}n} E_{x,\omega} \left[e^{\frac{c'}{L^2} T_{U_L}} \right] \leq 2e^{-\frac{c'}{L^2}n},$$

ce qui donne :

$$\lambda_\omega(B_L) \geq \frac{c'}{L^2}.$$

Montrons maintenant la seconde propriété : $\mathbb{P}(\lambda_\omega(B_L) \leq \frac{c}{L^2}) > 0$ pour $L > 1$. Il s'agit de minorer $P_{x,\omega}(T_{B_L} > n)$ sur un ensemble de \mathbb{P} -probabilité strictement positive, correspondant à une situation où l'«effet de piège» de B_L est suffisamment fort. Soit $M = 2N$ un entier pair ≥ 2 ; c' est au temps de sortie de $D_M = \{1, \dots, M-1\}^d$ que l'on s'intéresse. On définit la fonction $F_M : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d, F_M(x) = \sin \frac{\pi x_1}{M} \dots \sin \frac{\pi x_d}{M}.$$

Cette fonction vérifie $F_M(x) = 0$ si $x \in \partial D_M$ (bord au sens de \mathbb{Z}^d), et $0 < F_M(x) \leq 1$ si $x \in D_M$. Par la formule de Taylor, on a, $P_{x,\omega}$ -p.s. :

$$\begin{aligned}
F_M(X_1) &= F_M(x) + \nabla F_M(x) \cdot (X_1 - x) + \sum_{i,j} \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (x + t(X_1 - x)) \cdot (X_1 - x)_i (X_1 - x)_j (1-t) dt \\
&= F_M(x) + \nabla F_M(x) \cdot (X_1 - x) - \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 \int_0^1 (1-t) F_M(x + t(X_1 - x)) dt
\end{aligned}$$

car une seule des composantes de $X_1 - x$ n'est pas nulle et, pour tout i , $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x) = -\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 F_M(x)$. Notons maintenant que, pour tout i , si $v \in [-1, 1]$, $F_M(x + ve_i) \leq 2F_M(x)$. Ceci découle du fait que, si $1 \leq k \leq M-1$, $\sin \frac{\pi v}{M} \geq 0$ et $\sin \frac{\pi k}{M} \geq 0$, et donc :

$$\sin \frac{\pi(k+v)}{M} \leq \sin \frac{\pi k}{M} + \sin \frac{\pi v}{M} \leq 2 \sin \frac{\pi k}{M}.$$

En prenant alors l'espérance dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$E_{x,\omega}[F_M(X_1)] \geq F_M(x) + \nabla F_M(x) \cdot d(x,\omega) - \left(\frac{\pi}{M}\right)^2 F_M(x).$$

Vu l'hypothèse *marginal nestling*, pour tout voisinage V de 0, $\mathbb{P}(d(x,\omega) \in V) > 0$. On en déduit que l'événement

$$\mathcal{E}_M = \{\text{pour tout } x \in D_M, \nabla F_M(x) \cdot d(x,\omega) \geq -\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 F_M(x)\}$$

vérifie $\mathbb{P}(\mathcal{E}_M) > 0$ (pour $x \in D_M$, $F_M(x) > 0$, et D_M est fini). De plus, pour M grand, si $\omega \in \mathcal{E}_M$, pour tout $x \in D_M$, l'inégalité précédente devient :

$$E_{x,\omega}[F_M(X_1)] \geq \left(1 - 2\left(\frac{\pi}{M}\right)^2\right) F_M(x) \geq e^{-3\left(\frac{\pi}{M}\right)^2} F_M(x),$$

donc :

$$\text{si } \omega \in \mathcal{E}_M, \left(F_M(X_{n \wedge T_{D_M}}) e^{3\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 (n \wedge T_{D_M})}\right)_{n \geq 0} \text{ est une sous-martingale sous } P_{x,\omega}.$$

Prenons $x = (N, \dots, N)$ (on a posé $N = \frac{M}{2}$). Pour tout n , on a, si $\omega \in \mathcal{E}_M$:

$$\begin{aligned} 1 = \prod_{i=1}^d \sin \frac{\pi N}{M} = F_M(x) &\leq E_{x,\omega} \left[F_M(X_{n \wedge T_{D_M}}) e^{3\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 (n \wedge T_{D_M})} \right] \\ &\leq P_{x,\omega}(T_{D_M} > n) e^{3\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 n} \end{aligned}$$

($F_M(X_{n \wedge T_{D_M}}) = 0$ si $n \geq T_{D_M}$), d'où $P_{x,\omega}(T_{D_M} > n) \geq e^{-3\left(\frac{\pi}{M}\right)^2 n}$, et donc $\lambda_\omega(D_M) \leq 3\left(\frac{\pi}{M}\right)^2$. Par invariance de \mathbb{P} par translation et en utilisant la décroissance de $U \mapsto \lambda_\omega(U)$ (et $D_{\lfloor \frac{2L}{\sqrt{d}} \rfloor} - x \subset B_L$), on a l'énoncé annoncé.

• Il reste à traiter le cas *plain nestling*. La minoration n'utilise que l'hypothèse d'ellipticité : pour tout $L \geq 1$, pour tout $x \in B_L$, on a $P_{x,\omega}(T_{B_L} > L+1) \leq 1 - \kappa^{L+1}$, et donc, en appliquant la propriété de Markov faible aux temps $[L+1], 2[L+1], \dots$:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_L} P_{x,\omega}(T_{B_L} > n) &\leq (1 - \kappa^{L+1})^{\lfloor \frac{n}{L+1} \rfloor} \leq (1 - \kappa^{L+1})^{\frac{n}{L+1} - 1} \\ &\leq \frac{1}{1 - \kappa^{L+1}} \exp\left(-\frac{n}{L+1} \kappa^{L+1}\right) \\ &\leq \frac{1}{1 - \kappa} \exp(-ne^{-\gamma L}) \end{aligned}$$

où $\gamma = \ln \frac{1}{\kappa} + \sup_{v \geq 1} \frac{1}{v} \ln \frac{v+1}{\kappa}$ (indépendant de L), d'où $\lambda_\omega(B_L) \geq e^{-\gamma L}$.

On passe à la majoration. L'idée est ici de considérer des «pièges naïfs» : pour tout $\gamma > 0$, on introduit l'événement

$$\mathcal{T}_L = \{\text{pour tout } x \in B_L \setminus \{0\}, d(x,\omega) \cdot \frac{x}{|x|} \leq -\gamma\}.$$

Sur cet événement, les dérivées en tous les points de B_L sont orientées vers le centre de la boule, ce qui tend à rallonger le temps passé à l'intérieur (figure 1). Précisons ceci à nouveau à l'aide d'une surmartingale. Soit $r > 0$, $\omega \in \mathcal{T}_r$. Pour $c > 0$ et $x \in B_r$, on a :

$$\begin{aligned} E_{x,\omega} \left[e^{c|X_1|} \right] &= e^{c|x|} \sum_{|e|=1} \omega(x, e) e^{c(|x+e|-|x|)} \\ &= e^{c|x|} \left(1 + c \frac{x}{|x|} \cdot d(x,\omega) + c O_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) + O_{c \rightarrow 0} (c^2) \right) \\ &\leq e^{c|x|} (1 - c\gamma + c\gamma) = e^{c|x|} \end{aligned}$$

si $|x| \geq r_0$, r_0 étant choisi assez grand, et si c est assez petit. Ainsi, si $r > r_0$, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ avec $r_0 < |x| < r$:

si $\omega \in \mathcal{T}_r$, $\left(e^{c|X_n \wedge T_{B_r} \wedge H_{B_{r_0}}|} \right)_{n \geq 0}$ est une surmartingale positive sous $P_{x,\omega}$.

(pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, $H_U = \inf \{n > 0 \mid X_n \in U\}$, temps d'atteinte de U , est un temps d'arrêt) Soit $\omega \in \mathcal{T}_r$. Par le théorème d'arrêt, on en déduit :

$$P_{x,\omega}(T_{B_r} < H_{B_{r_0}}) e^{cr} \leq E_{x,\omega} \left[e^{c|X_{T_{B_r} \wedge H_{B_{r_0}}}|} \right] \leq e^{c|x|},$$

d'où :

$$P_{x,\omega}(T_{B_r} < H_{B_{r_0}}) \leq e^{c(|x|-r)} = e^{-c(r-|x|)}.$$

On rend cette majoration uniforme : si $L > 2(r_0 + 1)$, on a, pour tout $x \in \partial B_{r_0}$, si $\omega \in \mathcal{T}_L$,

$$P_{x,\omega}(T_{B_L} > H_{B_{r_0}}) \geq 1 - e^{-c(L-(r_0+1))} \geq 1 - e^{-c\frac{L}{2}}.$$

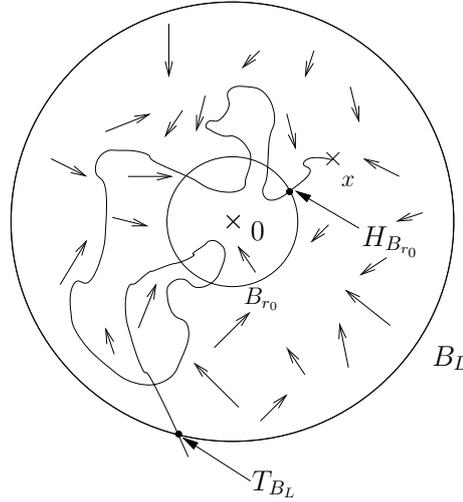


FIG. 1 – «Piège naïf» : réalisation de \mathcal{T}_L (flèches : dérives) et d'une trajectoire.

Soit $L > 2(r_0 + 1)$. Une manière pour la marche de rester un temps $> n$ dans B_L , en partant de $x \in B_L \setminus B_{r_0}$, consiste à atteindre B_{r_0} avant de quitter B_L , puis à atteindre à nouveau B_{r_0} (à partir du pas suivant) avant de quitter B_L , etc., et de faire ainsi au moins n excursions à l'intérieur de B_L atteignant B_{r_0} à chaque fois (en profitant de la dérive de l'environnement). Par la propriété de Markov forte, on a donc, pour $\omega \in \mathcal{T}_L$:

$$P_{x,\omega}(T_{B_L} > n) \geq \left(\inf_{x' \in \partial B_{r_0}} P_{x',\omega}(T_{B_L} > H_{B_{r_0}}) \right)^n \geq \left(1 - e^{-c\frac{L}{2}} \right)^n.$$

Pour L grand, on a par suite, si $\omega \in \mathcal{T}_L$:

$$\lambda_\omega(B_L) \geq -\ln \left(1 - e^{-c\frac{L}{2}} \right) \leq e^{-\frac{cL}{3}}.$$

Il reste à voir que l'on a $\mathbb{P}(\mathcal{T}_L) > 0$, au moins pour $\gamma > 0$ suffisamment petit. Vu l'hypothèse *plain nestling*, pour tout $w \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\mathbb{E}[(d(0,\omega) \cdot w)_-] > 0$ et donc, par continuité, et compacité de \mathbb{S}^{d-1} :

$$\gamma := \frac{1}{2} \inf_{w \in \mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}[(d(0,\omega) \cdot w)_-] > 0.$$

Pour tout $x \in B_L \setminus \{0\}$, on a alors, en utilisant l'inégalité $\mathbb{E}[X^2] \geq \frac{1}{4}\mathbb{E}[X]^2 P(X > \frac{1}{2}\mathbb{E}[X])$ avec $X = (d(0, \omega) \cdot w)_-$ (de carré intégrable) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(d(x, \omega) \cdot \frac{x}{|x|} \leq -\gamma\right) &= \mathbb{P}\left(\left(d(x, \omega) \cdot \frac{x}{|x|}\right)_- \geq \gamma\right) \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} \geq \frac{\gamma^2}{\mathbb{E}[X^2]} \geq \gamma. \end{aligned}$$

De là, vu l'indépendance entre les sites sous \mathbb{P} :

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_L) \geq \gamma^{|B_L|} > 0,$$

ce qui conclut cette démonstration. \square

2 Structure de renouvellement

L'étude de la convergence balistique de la marche repose essentiellement sur la possibilité de découper la trajectoire en tronçons indépendants et suivant la même loi, mettant ainsi en évidence une «structure de renouvellement» qui permet ensuite de faire appel à la loi des grands nombres (si une certaine condition d'intégrabilité est satisfaite).

Cette construction requiert quelques notations. On considère tout d'abord les temps d'arrêts suivants :

$$T_u^l = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq u\} \text{ pour } l \in \mathbb{S}^{d-1} \text{ et } u > 0,$$

et

$$D = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l < X_0 \cdot l\}.$$

Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$. On définit les suites $(S_k)_{k \geq 0}$ et $(R_k)_{k \geq 1}$ de temps d'arrêts (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$) et la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ des maxima successifs par (voir figure 2) :

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ M_0 &= l \cdot X_0, \\ S_1 &= T_{M_0+a}^l = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq M_0 + a\}, \\ R_1 &= S_1 + D \circ \Theta_{S_1} = \inf \{n \geq S_1 \mid X_n \cdot l < X_{S_1} \cdot l\}, \\ M_1 &= \sup \{X_n \cdot l \mid 0 \leq n \leq R_1\} \end{aligned}$$

et, pour $k \geq 1$, par récurrence :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= T_{M_k+a}^l = \inf \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \geq M_k + a\}, \\ R_{k+1} &= S_{k+1} + D \circ \Theta_{S_{k+1}} = \inf \{n \geq S_{k+1} \mid X_n \cdot l < X_{S_{k+1}} \cdot l\}, \\ M_{k+1} &= \sup \{X_n \cdot l \mid 0 \leq n \leq R_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Dans cette construction, toutes les variables peuvent *a priori* être infinies, et on a bien sûr :

$$0 = S_0 \leq S_1 \leq R_1 \leq S_2 \leq R_2 \leq \dots,$$

avec des inégalités strictes tant que les variables sont finies.

On peut déjà introduire le temps de «renouvellement» relatif à $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$, qui joue un rôle central dans la suite :

$$\tau_1 = S_K, \text{ où } K = \inf \{k \geq 1 \mid S_k < \infty, R_k = \infty\}.$$

Bien sûr, τ_1 n'est pas un temps d'arrêt puisqu'il dépend de toute la trajectoire. Par construction, cet instant, lorsqu'il est fini, est tel que, pour tout $n < \tau_1$, $X_n \cdot l < X_{\tau_1} \cdot l$, et $D \circ \tau_1 = \infty$: pour tout $n \geq \tau_1$, $X_n \cdot l \geq X_{\tau_1} \cdot l$.

C'est cette propriété, en assurant que les sites visités avant et après τ_1 sont distincts et donc associés à des probabilités de transitions indépendantes, qui va permettre d'aboutir au théorème 9, objectif de cette section.

Auparavant, il est utile de donner des conditions sous lesquelles cette variable τ_1 est finie. Pour cela, on commence par établir quelques lois du 0-1 relatives au comportement asymptotique de $(X_n)_n$ vis-à-vis de la direction l .

Pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, on définit les événements :

$$A_l = \{\lim_n X_n \cdot l = +\infty\},$$

$$B_l = A_l \cup A_{-l} = \{\lim_n X_n \cdot l = +\infty \text{ ou } \lim_n X_n \cdot l = -\infty\}$$

et

$$C_l = \{\text{la suite } (X_n \cdot l)_n \text{ est de signe constant } > 0 \text{ ou } < 0 \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$

PROPOSITION 4. – LOIS DU 0-1 POUR B_l ET C_l

Pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $P_0(B_l) \in \{0, 1\}$ et $P_0(C_l) \in \{0, 1\}$.

DÉMONSTRATION. On commence par un résultat qui servira à nouveau plus loin :

LEMME 5. – LEMME FONDAMENTAL

Pour tout $k \geq 1$:

$$P_0(R_k < \infty) \leq P_0(D < \infty)^k.$$

PREUVE DU LEMME. On a, en appliquant la propriété de Markov au temps S_k :

$$\begin{aligned} P_0(R_k < \infty) &= P_0(S_k < \infty, D \circ \Theta_{S_k < \infty}) \\ &= \mathbb{E}[E_{0,\omega}[S_k < \infty, P_{S_k,\omega}(D < \infty)]] \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[P_{0,\omega}(S_k < \infty, S_k = x) P_{x,\omega}(D < \infty)], \end{aligned}$$

et on constate que $S_k = T_{M_k+a}$, $P_{0,\omega}(S_k < \infty, S_k = x)$ est une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu engendrée par les $\omega(y)$ où $y \cdot l < x \cdot l$, tandis que $P_{x,\omega}(D < \infty)$ est mesurable par rapport à celle engendrée par les $\omega(y)$ où $y \cdot l \geq x \cdot l$, si bien que ces deux variables sont indépendantes sous \mathbb{P} . Ainsi :

$$\begin{aligned} P_0(R_k < \infty) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_0(S_k < \infty, S_k = x) \cdot P_x(D < \infty)] \\ &= P_0(D < \infty) \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} E_0[S_k < \infty, S_k = x] \\ &= P_0(D < \infty) P_0(S_k < \infty) \\ &\leq P_0(D < \infty) P_0(R_{k-1} < \infty), \end{aligned}$$

ce qui donne le lemme par récurrence. Au passage, on remarque que l'énoncé devient une égalité dès que l'on a $P_0(\limsup_n X_n \cdot l = \infty) = 1$ puisqu'alors $S_k = T_{M_{k-1}+a}^l < \infty$ P_0 -p.s. dès que $M_{k-1} < \infty$, donc dès que $R_{k-1} < \infty$. \square

• Montrons la loi du 0-1 pour C_l . On définit l'événement :

$$C_l^+ = \{\text{il existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq n_0, X_n \cdot l > 0\},$$

de sorte que $C_l = C_l^+ \cup C_{-l}^+$. Comme $P_0(C_l^+) = P_0(C_{-l}^+) = 0$ implique $P_0(C_l) = 0$, il suffit de montrer que si $P_0(C_l^+) > 0$ ou $P_0(C_{-l}^+) > 0$, alors $P_0(C_l) = 1$.

Supposons $P_0(C_l^+) > 0$ (par symétrie des rôles de l et de $-l$ dans C_l , le cas de C_{-l}^+ s'en déduira). Dans ce cas, $P_0(D < \infty) < 1$. En effet, dans le cas contraire on aurait, \mathbb{P} -p.s. : $D < \infty$ $P_{0,\omega}$ -p.s., mais aussi $P_{x,\omega}$ -p.s. pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ par invariance de \mathbb{P} par translation et parce que \mathbb{Z}^d est dénombrable, de telle sorte que, par la propriété de Markov forte, la suite $(D_i)_{i \geq 0}$ définie par $D_0 = 0$ et $D_{i+1} = D_i + D \circ \Theta_{D_i}$ pour $i \geq 0$ serait une suite strictement croissante de temps d'arrêt finis P_0 -p.s. telle que $X_{D_i} < 0$ pour tout i , en contradiction

avec $P_0(C_l^+) > 0$. En application du lemme précédent, on en déduit $\sum_k P_0(R_k < \infty) < \infty$ et donc, par le lemme de Borel-Cantelli :

$$P_0\text{-p.s.}, \text{ il existe } k \geq 1 \text{ tel que } R_k = \infty.$$

Cet événement peut se produire de deux manières : ou bien il existe $k \geq 1$ tel que $S_k < \infty$ et $R_k = \infty$, auquel cas, pour tout $n \geq S_k$, $X_n \cdot l \geq X_{S_k} \cdot l > 0$, donc C_l (en fait, C_l^+) est vérifié, ou bien il existe $k \geq 2$ tel que $R_{k-1} < \infty$ et $S_k = \infty$, c'est à dire que, pour tout $n \geq R_{k-1}$, $X_n \cdot l < M_{k-1} + a(< \infty)$: en particulier, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $X_n \cdot l \leq M$ pour tout n . Il ne reste qu'à montrer que cette dernière propriété implique presque sûrement C_l (en fait, C_l^-) pour conclure à $P_0(C_l) = 1$.

Soit $M \in \mathbb{N}$. On raisonne «par l'absurde» en montrant : $P_0((C_l)^c, X_n \cdot l < M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}) = 0$. Sur l'événement $(C_l)^c$, la bande $\mathcal{H} = \{|x \cdot l| < \sqrt{d}\} \cap \mathbb{Z}^d$ (qui contient les éléments de \mathbb{Z}^d les plus proches de l'hyperplan $\{x \cdot l = 0\}$) est traversée une infinité de fois par $(X_n)_n$. On peut trouver $c > 0$ tel que tout point de \mathcal{H} peut être relié à un point $x' \in \mathbb{Z}^d$ vérifiant $x' \cdot l \geq M$ par un chemin de longueur $\leq c$ donc, par l'hypothèse d'ellipticité, pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a $\mathbb{P}\text{-p.s.} : P_{x,\omega}(T_M^l \leq c) \geq \kappa^c$. On note $(U_i)_{i \geq 0}$ la suite de temps d'arrêts définie par $U_0 = 0$ et, pour tout $i \geq 0$, $U_{i+1} = \inf \{n > U_i + c \mid X_n \in \mathcal{H}\}$. Sur l'événement $(C_l)^c$, U_i est fini pour tout i . Or les événements $F_i = \{\text{il existe } n \in [U_i, U_i + c] \text{ tel que } X_n \cdot l \geq M\} = \{T_M^l \circ \Theta_{U_i} \leq c\}$, $i \geq 0$, sont tels que :

$$\text{pour tout } i, F_i \in \mathcal{F}_{U_i+c} \text{ et } P_{0,\omega}(F_i | \mathcal{F}_{U_{i-1}+c}) \geq \kappa^c \mathbf{1}_{(U_i < \infty)}$$

en utilisant la propriété de Markov forte. On déduit du second lemme de Borel-Cantelli (voir proposition 12 à la fin de cette section) que, sur l'événement $(C_l)^c$, il existe P_0 -p.s. une infinité de i pour lesquels F_i a lieu. Ainsi, comme annoncé :

$$P_0((C_l)^c, X_n \cdot l < M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}) = 0.$$

On en déduit :

$$P_0((C_l)^c, \text{ il existe } M \in \mathbb{N} \text{ tel que } X_n \cdot l < M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}) = 0$$

et, compte-tenu de ce qui précède, la loi du 0-1 pour C_l est démontrée.

• Déduisons-en maintenant celle relative à B_l . Comme $B_l \subset C_l$, si $P_0(C_l) = 0$, alors $P_0(B_l) = 0$. Supposons $P_0(C_l) > 0$, c'est à dire $P_0(C_l) = 1$ par la loi du 0-1 que l'on vient de démontrer. Par une méthode très similaire à celle utilisée à la fin de la preuve ci-dessus (ellipticité, suites $(U_i)_i$ et $(F_i)_i$, et second lemme de Borel-Cantelli), on démontre que : presque sûrement, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, si $(X_n)_n$ rencontre $\mathcal{H}_M = \{x \cdot l \in [-M, M]\}$ une infinité de fois, alors $l \cdot X_n < 0$ pour une infinité de n . Autrement dit, avec la notation C_l^+ précédente :

$$\text{pour tout } M > 0, P_0(C_l^+ \cap \limsup_n \{X_n \cdot l \in [-M, M]\}) = 0.$$

On a bien sûr le même résultat avec C_l^+ en changeant l en $-l$ dans la preuve, ce qui donne, compte-tenu que $1 = P_0(C_l) = P_0(C_l^+) + P_0(C_l^-)$, et parce que \mathbb{N} est dénombrable :

$$P_0 \left(\bigcup_{M \in \mathbb{N}^*} \limsup_n \{X_n \cdot l \in [-M, M]\} \right) = 0.$$

Or cet événement («pour un certain $M \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $X_n \cdot l \in [-M, M]$ ») est le complémentaire de $B_l = \{X_n \cdot l \xrightarrow[n]{} \pm\infty\}$, ce qui donne : $P_0(B_l) = 1$. \square

On dit que la marche est transiente dans la direction l lorsque $P_0(B_l) = 1$. Ceci équivaut à $P_x(B_l) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$ vu que, pour tout $\omega \in \Omega$, $P_{x,\omega}(B_l) = P_{0,t_x\omega}(B_l)$ et que la probabilité \mathbb{P} est invariante par t_x . Dans ce cas, on a $P_0(A_l) > 0$ ou $P_0(A_{-l}) > 0$. À l'heure actuelle, on ignore d'ailleurs si A_l satisfait une loi du 0-1, et donc si on peut avoir simultanément $P_0(A_l) > 0$ et $P_0(A_{-l}) > 0$.

Revenons à l'étude de τ_1 et de la propriété de renouvellement.

PROPOSITION 6. – On suppose $P_0(A_l) > 0$. Alors $P_0(D = \infty) > 0$ et, P_0 -p.s., $A_l = \{\tau_1 < \infty\}$.

DÉMONSTRATION. Cette proposition a presque déjà été démontrée au début de la preuve de la loi du 0-1 pour C_l . On suppose $P_0(A_l) > 0$. Alors en particulier $P_0(C_l^+) \geq P_0(A_l) > 0$, d'où $P_0(D < \infty) < 1$ comme montré dans la preuve indiquée. Par le lemme fondamental, on en déduit (même référence) :

$$P_0\text{-p.s.}, \text{ il existe } k \geq 1 \text{ tel que } R_k = \infty.$$

Or on a, P_0 -p.s. sur l'événement $A_l : T_M^l < \infty$ pour tout $M > 0$ et par conséquent $S_1 = T_{X_0 \cdot l + a} < \infty$ et, pour tout $k \geq 2$, $S_k = T_{M_{k-1} + a} < \infty$ si $M_{k-1} < \infty$, donc si $R_{k-1} < \infty$. Par suite, sur l'événement A_l , P_0 -p.s., le plus petit $k \geq 1$ tel que $R_k = \infty$ satisfait aussi $S_k < \infty$, ce qui donne $\tau_1 = S_k < \infty$.

Pour l'inclusion réciproque, remarquons que, vu la loi du 0-1 pour B_l , comme $P_0(B_l) \geq P_0(A_l) > 0$, on a en fait $P_0(B_l) = 1 : P_0$ -p.s., $X_n \cdot l \xrightarrow{n} \pm \infty$, de sorte que $\tau_1 < \infty$ implique non seulement $\liminf_n X_n \cdot l \geq X_{\tau_1} \cdot l > -\infty$ mais aussi, P_0 -p.s., $\lim_n X_n \cdot l = +\infty$, c'est à dire A_n . \square

Dans la suite, on suppose $P_0(A_l) > 0$. On peut donc s'intéresser à la probabilité $P_0(\cdot | \tau_1 < \infty) = P_0(\cdot | A_l)$. Considérons la tribu :

$$\mathcal{G}_1 = \sigma(\tau_1, (X_{n \wedge \tau_1})_{n \geq 0}, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l < X_{\tau_1} \cdot l}).$$

Intuitivement, cette tribu contient toute l'information relative au passé de la marche avant τ_1 et à la partie de l'environnement qu'elle a pu visiter jusqu'alors. Par le choix de τ_1 , on s'attend à ce que la marche aléatoire $(X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0}$ soit indépendante de \mathcal{G}_1 , et suive la même loi que $(X_n)_{n \geq 0}$ conditionnée à ne pas revenir dans $\{x \cdot l < 0\}$. La proposition suivante précise ceci.

PROPOSITION 7. – La variable aléatoire $((X_{\tau_1+n} - X_{\tau_1})_{n \geq 0}, (\omega(X_{\tau_1} + y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ est indépendante de \mathcal{G}_1 sous $P_0(\cdot | \tau_1 < \infty) = P_0(\cdot | A_l)$, et sa loi est celle de $((X_n)_{n \geq 0}, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ sous $P_0(\cdot | D = \infty)$.

DÉMONSTRATION. Soient f, g, h des fonctions bornées respectivement mesurables par rapport à $\sigma((X_n)_{n \geq 0})$, $\sigma((\omega(y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ et \mathcal{G}_1 . Il s'agit de montrer :

$$E_0[f(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}) \cdot g \circ t_{X_{\tau_1}} \cdot h, \tau_1 < \infty] = E_0[f \cdot g | D = \infty] E_0[h, \tau_1 < \infty].$$

Par définition de τ_1 , le premier membre est égal à :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 1} E_0[f(X_{\tau_1+} - X_{\tau_1}) \cdot g \circ t_{X_{\tau_1}} \cdot h, S_k < \infty, R_k = \infty] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} E_0[f(X_{S_k+} - x) \cdot g \circ t_x \cdot h, X_{S_k} = x, S_k < \infty, R_k = \infty]. \end{aligned}$$

Comme h est \mathcal{G}_1 -mesurable, il existe une fonctionnelle H telle que, P_0 -p.s., $h = H(\tau_1, X_{\tau_1 \wedge \cdot}, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l < X_{\tau_1} \cdot l})$, si bien que, sur $\{\tau_1 = S_k, X_{S_k} = x\}$, P_0 -p.s., $h = H(S_k, X_{S_k \wedge \cdot}, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l < x \cdot l}) = h_{x,k}$ où $h_{x,k}$ est mesurable par rapport à $\sigma((\omega(y, \cdot))_{y \cdot l < y \cdot x}) \otimes \mathcal{F}_{S_k}$. Ceci permet d'appliquer la propriété de Markov forte en S_k dans la quantité ci-dessus : (en poursuivant les égalités précédentes)

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[f(X_{S_k+} - x) \cdot h_{x,k}, X_{S_k} = x, S_k < \infty, D \circ \Theta_{S_k} = \infty] \cdot g \circ t_x] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[h_{x,k}, S_k < \infty, X_{S_k} = x, E_{S_k,\omega}[f(X_{S_k+} - x), D = \infty]] \cdot g \circ t_x] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[h_{x,k}, S_k < \infty, X_{S_k} = x] E_{x,\omega}[f(X_{S_k+} - x), D = \infty] \cdot g \circ t_x]. \end{aligned}$$

Et l'on remarque que $E_{0,\omega}[h_{x,k}, S_k < \infty, X_{S_k} = x]$ est mesurable par rapport à $\sigma((\omega(y, \cdot))_{y \cdot l < y \cdot x})$ tandis que $E_{x,\omega}[f(X_{S_k+} - x) \cdot g \circ t_x, D = \infty]$ est mesurable par rapport à $\sigma((\omega(y, \cdot))_{y \cdot l \geq y \cdot x})$, et ces variables sont bornées, donc elles sont indépendantes sous \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} E_0[h_{x,k}, S_k < \infty, X_{S_k} = x] E_x[f(X_{S_k+} - x) \cdot g \circ t_x, D = \infty] \\ &= \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} E_0[h_{x,k}, S_k < \infty, X_{S_k} = x] E_0[f \cdot g, D = \infty] \\ &= E_0[f \cdot g | D = \infty] \sum_{k \geq 1, x \in \mathbb{Z}^d} E_0[h_{x,k}, S_k < \infty, X_{S_k} = x] P_0(D = \infty) \\ &= E_0[f \cdot g | D = \infty] E_0[h, \tau_1 < \infty], \end{aligned}$$

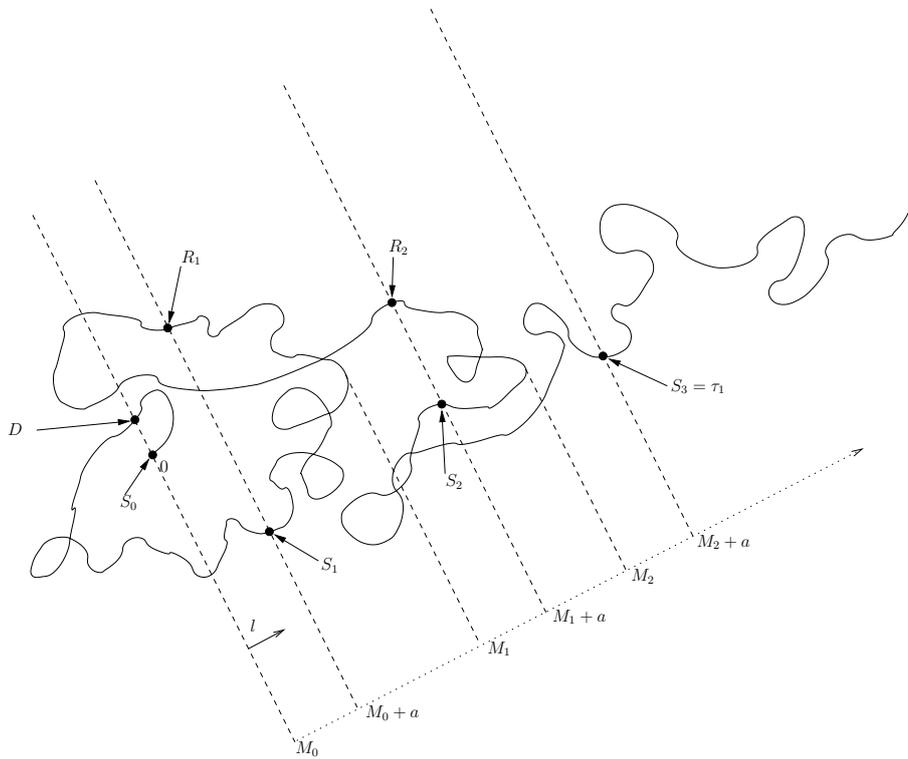


FIG. 2 – Définition de la structure de renouvellement. Ici, $K = 3$ si $D \circ \Theta_{S_3} = \infty$.

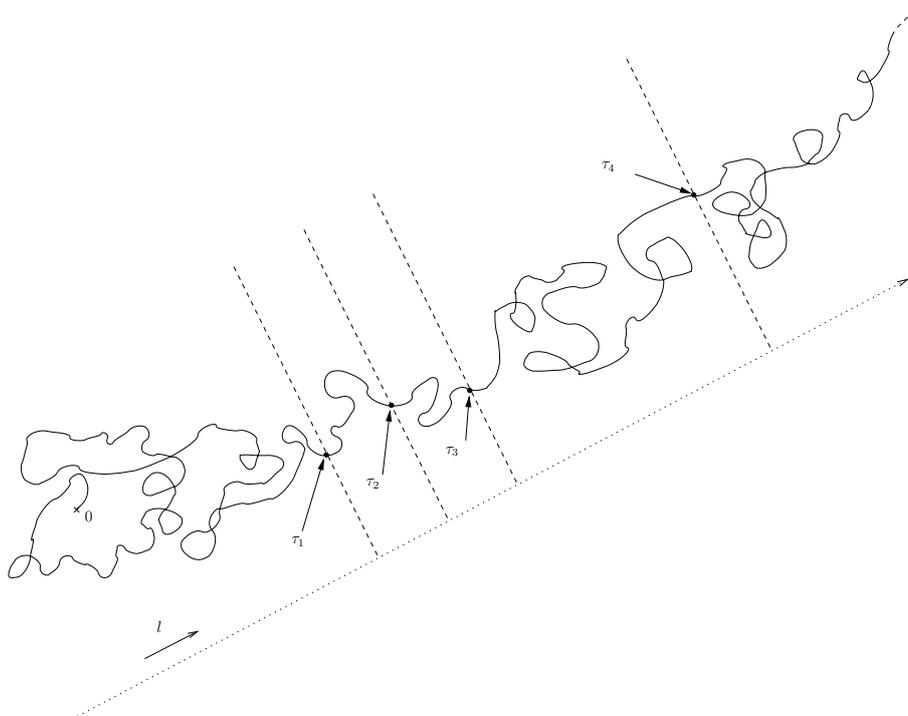


FIG. 3 – Itération de la construction

où la deuxième ligne exploite l'invariance par translation de \mathbb{P} , et où la dernière ligne s'obtient en prenant $f = g = 1$ dans les égalités montrées jusque là. On a obtenu l'égalité voulue. \square

L'étape suivante consiste à itérer cette construction après τ_1 .

Considérant τ_1 comme une fonction de X_\cdot , on définit, sur $\{\tau_1 < \infty\}$ (voir figure 3) :

$$\tau_2 = \tau_1(X_\cdot) + \tau_1(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1})$$

et, par récurrence, pour tout $k \geq 1$:

$$\tau_{k+1} = \tau_1(X_\cdot) + \tau_k(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1}) = \tau_k(X_\cdot) + \tau_1(X_{\tau_k+\cdot} - X_{\tau_k})$$

(l'égalité se montre par récurrence), avec $\tau_{k+1} = \infty$ sur $\{\tau_k = \infty\}$. On a déjà vu que P_0 -p.s., $\{\tau_1 < \infty\} = A_l$; comme $\{D = \infty\} \subset A_l$, on a donc $P_0(\cdot|D = \infty)$ -p.s., $\tau_1 < \infty$, et on déduit de la dernière proposition et à l'aide d'une récurrence que :

$$P_0\text{-p.s.}, \{\tau_1 < \infty\} = A_l = \{\tau_k < \infty\} \text{ pour tout } k \geq 1.$$

On introduit la tribu :

$$\mathcal{G}_k = \sigma(\tau_1, \dots, \tau_k, (X_{n \wedge \tau_k})_{n \geq 0}, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l < X_{\tau_k} \cdot l}).$$

PROPOSITION 8. – Pour tout $k \geq 1$, la variable aléatoire $((X_{\tau_k+n} - X_{\tau_k})_{n \geq 0}, (\omega(X_{\tau_k}+y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ est indépendante de \mathcal{G}_k sous $P_0(\cdot|A_l)$, et sa loi est celle de $((X_n)_{n \geq 0}, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ sous $P_0(\cdot|D = \infty)$.

DÉMONSTRATION. On reprend les notations f, g, h de la démonstration précédente, et l'égalité démontrée alors. On remarque que P_0 -p.s., $\{D = \infty\} \subset A_l = \{\tau_1 < \infty\}$ et, comme $\{D = \infty\} \in \mathcal{G}_1$ (car $\{D = \infty\} = \{D \leq \tau_1\}$), $h' = h \mathbf{1}_{\{D = \infty\}}$ est mesurable par rapport à \mathcal{G}_1 et bornée, ce qui donne :

$$\begin{aligned} E_0[f(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1}) \cdot g \circ t_{X_{\tau_1}} \cdot h, D = \infty] &= E_0[f(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1}) \cdot g \circ t_{X_{\tau_1}} \cdot h, D = \infty, \tau_1 < \infty] \\ &= E_0[f \cdot g | D = \infty] E_0[h, D = \infty, \tau_1 < \infty] \\ &= E_0[f \cdot g | D = \infty] E_0[h, D = \infty]. \end{aligned}$$

Ce calcul montre que la variable aléatoire $(X_{\tau_1+\cdot} - X_{\tau_1}, (\omega(X_{\tau_1}+y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ sous $P_0(\cdot|D = \infty)$ est indépendante de \mathcal{G}_1 et a même loi que $(X_\cdot, (\omega(y, \cdot))_{y \cdot l \geq 0})$ sous $P_0(\cdot|D = \infty)$. Associé à ce résultat, celui de la proposition précédente fournit alors l'énoncé cité par récurrence sur $k \geq 1$. \square

On en déduit immédiatement le résultat essentiel de cette section :

THÉORÈME 9. – PROPRIÉTÉ DE RENOUVELLEMENT

Sous $P_0(\cdot|A_l)$, les variables aléatoires $(X_{\tau_1}, \tau_1), (X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$ sont indépendantes. De plus, sous $P_0(\cdot|A_l)$, $(X_{\tau_2} - X_{\tau_1}, \tau_2 - \tau_1), \dots, (X_{\tau_{k+1}} - X_{\tau_k}, \tau_{k+1} - \tau_k), \dots$ ont même loi que (X_{τ_1}, τ_1) sous $P_0(\cdot|D = \infty)$.

Annexe

Le résultat suivant sera utile plus tard pour majorer $E[e^{cX_{\tau_1} \cdot l}]$ (preuve du théorème 17). Ce n'est pas une conséquence du théorème ci-dessus, mais le fonctionnement de la démonstration est identique à celui de la preuve du lemme fondamental 5, d'où sa place dans cette section.

PROPOSITION 10. – On suppose que, P_0 -p.s., $X_n \cdot l \rightarrow_n \infty$. Si τ_1 est relatif à l et $a > 0$ alors, sous P_0 , la variable aléatoire $X_{\tau_1} \cdot l$ est stochastiquement dominée par $a + 1 + G_j$ où, pour tout $j \geq 0$:

$$G_j = \bar{M}_1 + \dots + \bar{M}_j,$$

$(\bar{M}_j)_{j \geq 0}$ étant une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $a' + 1 + M$ sous $P_0(\cdot|D < \infty)$, avec :

$$M = \sup \{(X_k - X_0) \cdot l_0 \mid 0 \leq k \leq D\},$$

et J est une variable aléatoire indépendante des \bar{M}_j , $j \geq 0$, suivant la loi géométrique de paramètre $P_0(D < \infty)$ ($P_0(J \geq j) = P_0(D < \infty)^j$ pour tout $j \geq 0$).

DÉMONSTRATION. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante positive. On a, en procédant comme dans le lemme 5 :

$$\begin{aligned}
E_0[F(X_{\tau_1} \cdot l)] &= \sum_{k \geq 1} E_0[F(X_{S_k} \cdot l), S_k < \infty, D \circ \Theta_{S_k} = \infty] \\
&= \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}[E_{0,\omega}[F(X_{S_k} \cdot l), S_k < \infty, P_{X_{S_k},\omega}(D = \infty)]] \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} F(x \cdot l) \mathbb{E}[P_{0,\omega}(X_{S_k} = x, S_k < \infty) P_{x,\omega}(D = \infty)] \\
&= \sum_{k \geq 1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} F(x \cdot l) P_0(X_{S_k} = x, S_k < \infty) P_0(D = \infty) \\
&= P_0(D = \infty) \sum_{k \geq 1} E_0[F(X_{S_k} \cdot l), S_k < \infty].
\end{aligned}$$

Soit $k \geq 2$. Si $S_k < \infty$, alors $S_{k-1} < \infty$ et $D \circ \Theta_{S_{k-1}} < \infty$, et on a $X_{S_k} \cdot l = X_{T_{M_{k-1}+a}} \cdot l \leq M_{k-1} + a + 1$, d'où :

$$\begin{aligned}
E_0[F(X_{S_k} \cdot l), S_k < \infty] &\leq E_0[F(M_{k-1} + a + 1), S_{k-1} < \infty, D \circ \Theta_{S_{k-1}} < \infty] \\
&= E_0[F(X_{S_{k-1}} \cdot l + M \circ \Theta_{S_{k-1}} + a + 1), S_{k-1} < \infty, D \circ \Theta_{S_{k-1}} < \infty] \\
&= \mathbb{E}[E_{0,\omega}[E_{X_{S_{k-1}},\omega}[F(x \cdot l + M + a + 1), D < \infty] \Big|_{x=X_{S_{k-1}}}, S_{k-1} < \infty]] \\
&= E_0 \bar{E}[F(X_{S_{k-1}} \cdot l + \bar{M}_{k-1}), S_{k-1} < \infty] P_0(D < \infty)
\end{aligned}$$

où \bar{M}_{k-1} a, sous la loi \bar{P} , même loi que $M + a + 1$ sous $P_0(\cdot | D < \infty)$ (l'intégration ci-dessus se fait contre la loi produit $P_0 \otimes \bar{P}$ sur l'espace $(\Omega \times (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}) \times \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}$ étant le nouvel espace sur lequel on définit \bar{M}_{k-1}). En procédant par récurrence, on obtient finalement :

$$E_0[F(X_{S_k} \cdot l), S_k < \infty] \leq \bar{E}^{\otimes(k-1)}[F(\bar{M}_1 + \dots + \bar{M}_{k-1} + a + 1)] P_0(D < \infty)^{k-1}$$

où, pour tout $k \geq 1$, \bar{M}_k est une variable aléatoire définie sur un certain espace $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{P})$ et de même loi que $M + a + 1$ sous $P_0(\cdot | D = \infty)$. On remarque que l'identité obtenue est aussi valable pour $k = 1$ (si $S_1 < \infty$, $X_{S_1} \cdot l \leq a + 1$); par conséquent :

$$E_0[F(X_{\tau_1} \cdot l)] \leq P_0(D = \infty) \sum_{k \geq 1} P_0(D < \infty)^{k-1} \bar{E}^{\otimes(k-1)}[F(\bar{M}_1 + \dots + \bar{M}_{k-1} + a + 1)].$$

De cette identité découle la proposition. \square

Second lemme de Borel-Cantelli

PROPOSITION 11. – Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité, $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration de cet espace, et $(X_n)_n$ une martingale par rapport à cette filtration vérifiant, pour tout n , $|X_{n+1} - X_n| \leq M$ où $M > 0$. On a $P(C \cup D) = 1$, où :

$$C = \{(X_n)_n \text{ converge dans } \mathbb{R}\}$$

et

$$D = \{\liminf_n X_n = -\infty \text{ et } \limsup_n X_n = +\infty\}.$$

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer $(X_n)_n$ par $(X_n - X_0)_n$, on peut supposer $X_0 = 0$. Soit $K > 0$. On note $N_K = \inf \{n | X_n \leq -K\} \geq 1$; c'est un temps d'arrêt. Ainsi, $(X_{n \wedge N_K})_n$ est une martingale qui vérifie, pour tout n , $X_{n \wedge N_K} \geq -K - M$ (pour tout $n < N_K$, $X_n > -K$ et, si $1 \leq N_K < \infty$, l'hypothèse donne :

$X_{N_K} \geq X_{N_K-1} - M > -K - M$). Par le théorème de convergence de Doob, elle admet donc presque sûrement une limite finie. On en déduit : presque sûrement, pour tout $K \in \mathbb{N}^*$, $(X_{n \wedge N_K})_n$ converge, et donc : presque sûrement, s'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_K = \infty$, alors $(X_n)_n$ converge. Or $\{\liminf_n X_n > -\infty\} = \{\text{il existe } K \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } N_K = \infty\}$, d'où : presque sûrement, si $\liminf_n X_n > -\infty$, alors $(X_n)_n$ converge. On obtient une assertion similaire relative à la limite supérieure en remplaçant $(X_n)_n$ par $(-X_n)_n$, ce qui donne la conclusion. \square

PROPOSITION 12. – SECOND LEMME DE BOREL-CANTELLI

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ une filtration de (Ω, \mathcal{F}) , et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'événements vérifiant $A_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \geq 1$.

On a :

$$\limsup_n A_n = \left\{ \sum_{n \geq 1} P(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \infty \right\},$$

où $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$.

DÉMONSTRATION. La suite $(X_n)_n$ définie, pour tout $n \geq 0$, par :

$$X_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} - P(A_k | \mathcal{F}_{k-1})$$

est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_k)_k$, et elle vérifie, pour tout n , $|X_{n+1} - X_n| \leq 1$. Par suite, à l'aide de la proposition précédente, presque-sûrement, ou bien la suite $(X_n)_n$ converge dans \mathbb{R} , ou bien elle vérifie $\limsup_n X_n = +\infty$ et $\liminf_n X_n = -\infty$. Dans le premier cas, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k} = \infty$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \infty$, et dans le second cas ces deux quantités sont infinies, ce qui conclut. \square

3 Condition (T), premiers résultats

3.1 Définition

L'objet de l'article [6] est d'introduire une condition sur la loi μ (la loi définissant l'environnement) de laquelle on puisse déduire une loi forte des grands nombres concernant la suite $(X_n)_n$. Au vu de la structure de renouvellement mise en place dans la section précédente, on devine l'importance du contrôle de la variable $X_{\tau_1}^*$, où $X_n^* = \max\{|X_0|, \dots, |X_n|\}$. C'est ce que permet la condition suivante, à laquelle il sera constamment fait référence dans la suite :

DÉFINITION. – Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$. La marche aléatoire $(X_n)_n$ satisfait la condition (T) relativement à la direction l et au réel $a > 0$, que l'on abrège en (T)| l, a , si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) P_0 -presque sûrement, $\lim_n X_n \cdot l = \infty$;
- (ii) il existe $c > 0$ tel que $E_0[\exp(cX_{\tau_1}^*)] < \infty$,

τ_1 étant défini selon la direction l et à l'aide du paramètre a .

Dans la suite de cette section, lorsque l'on supposera vérifiée la condition (T)| l, a , les temps τ_k , $k \geq 0$, seront définis, sauf mention contraire, relativement au vecteur l .

Comme on aura souvent besoin de majorer des quantités de la forme $\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0(\dots)$ (on s'intéresse à des comparaisons dans une échelle exponentielle), le lemme suivant tiré de [1] (lemme 1.2.15) pourra être utile :

LEMME 13. – «LEMME SYMPA»

Soit $(a_n)_n$ une suite qui diverge vers $+\infty$, et $(\alpha_n^1)_n, \dots, (\alpha_n^k)_n$ des suites de réels > 0 . On a :

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} \ln \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_n^i = \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_n \frac{1}{a_n} \ln \alpha_n^i.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout n , on a :

$$\frac{1}{a_n} \max_{1 \leq i \leq k} \ln \alpha_n^i \leq \frac{1}{a_n} \ln \sum_{1 \leq i \leq k} \alpha_n^i \leq \frac{1}{a_n} \ln(k \max_{1 \leq i \leq k} \alpha_n^i) = \frac{1}{a_n} \max_{1 \leq i \leq k} \ln \alpha_n^i + \frac{\ln k}{a_n},$$

et $(\ln k)/a_n \rightarrow_n 0$, donc il suffit de voir que :

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} \max_{1 \leq i \leq k} \ln \alpha_n^i = \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_n \frac{1}{a_n} \ln \alpha_n^i.$$

L'inégalité « \geq » est évidente ; pour le sens réciproque, si on choisit une sous-suite $(\frac{1}{a_{\varphi(n)}} \max_{1 \leq i \leq k} \ln \alpha_{\varphi(n)}^i)_n$ qui converge vers la limite supérieure, il existe $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ pour lequel une infinité d'entiers vérifient $\max_{1 \leq i \leq k} \alpha_{\varphi(n)}^i = \alpha_{\varphi(n)}^{i_0}$, de sorte que :

$$\limsup_n \frac{1}{a_n} \max_{1 \leq i \leq k} \ln \alpha_n^i = \limsup_n \frac{1}{a_n} \ln \alpha_n^{i_0} \leq \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_n \frac{1}{a_n} \ln \alpha_n^i.$$

□

3.2 Quelques premières conséquences de la structure de renouvellement

La condition (T)(i) assure, via la proposition 6, que $P_0(D = \infty) > 0$, et que les temps τ_k , $k \geq 0$, sont tous finis P_0 -p.s.. On peut donc faire appel aux résultats de la partie précédente. En particulier, le théorème 9 fournit aisément l'existence d'une direction asymptotique :

PROPOSITION 14. – On suppose la condition (T) vérifiée relativement à $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$. Alors il existe $\hat{v} \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\hat{v} \cdot l > 0$, et :

$$P_0\text{-p.s.}, |X_n| \xrightarrow[n]{} \infty \text{ et } \frac{X_n}{|X_n|} \xrightarrow[n]{} \hat{v}.$$

De plus, on a :

$$\hat{v} = \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]}{|E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]|}.$$

DÉMONSTRATION. Par (T)(i), on a P_0 -p.s., $|X_n| \geq X_n \cdot l \rightarrow_n \infty$. L'hypothèse (T)(ii) montre que X_{τ_1} est intégrable sous P_0 , et donc sous $P_0(\cdot | D = \infty)$. En appliquant la loi forte des grands nombres à la structure de renouvellement précédente, on obtient alors :

$$P_0\text{-p.s.}, \frac{X_{\tau_k}}{k} \xrightarrow[k]{} E_0[X_{\tau_1} | D = \infty],$$

et l'hypothèse (T)(ii) donne de plus $E_0[X_{\tau_1}^* | D = \infty] < \infty$, d'où :

$$P_0\text{-p.s.}, \frac{1}{k} \max_{\tau_k \leq n \leq \tau_{k+1}} |X_n - X_{\tau_k}| \xrightarrow[k]{} 0.$$

Comme $X_{\tau_1} \cdot l > 0$, on a $E_0[X_{\tau_1} | D = \infty] \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et on peut donc définir \hat{v} par la formule de l'énoncé, qui vérifie bien $\hat{v} \cdot l > 0$. On note $k_n = \max \{k \geq 0 \mid \tau_k \leq n\}$: ainsi, $\tau_{k_n} \leq n < \tau_{k_n+1}$. Comme $\tau_k < \infty$ pour tout k , on a $k_n \rightarrow_n \infty$, donc on déduit des limites précédentes que :

$$\left| \frac{X_n}{k_n} - E_0[X_{\tau_1} | D = \infty] \right| \leq \left| \frac{X_{\tau_{k_n}}}{k_n} - E_0[X_{\tau_1} | D = \infty] \right| + \frac{1}{k_n} \max_{\tau_{k_n} \leq n' \leq \tau_{k_n+1}} |X_{n'} - X_{\tau_{k_n}}| \xrightarrow[n]{} 0,$$

d'où la proposition résulte en écrivant (pour n assez grand) :

$$\frac{X_n}{|X_n|} = \frac{X_n}{k_n} \times \frac{k_n}{|X_n|}.$$

□

L'objet de la prochaine partie sera de montrer que ce résultat peut être fortement amélioré sous la forme :

$$\text{il existe } v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \text{ tel que } P_0\text{-p.s., } \frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{n} v.$$

Cette loi des grands nombres repose sur de nombreuses estimations dont voici la première, qui utilise également fortement la propriété de renouvellement.

Lorsque (T) est vérifiée, en définissant \hat{v} comme dans le lemme précédent, on note π la projection orthogonale sur \hat{v}^\perp : pour $w \in \mathbb{R}^d$, $\pi(w) = w - (w \cdot \hat{v})\hat{v}$.

LEMME 15. – On suppose (T)| l, a . Pour $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$, et $\rho > 0$, on a :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{2\gamma-1}} \ln P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq \rho u^\gamma \right) < 0,$$

où l'on rappelle que $L_u^l = \sup \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \leq u\}$.

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord qu'il suffit de raisonner pour $X_n \cdot w$ pour tout $w \perp \hat{v}$, au lieu de $|\pi(X_n)|$. En effet, si (v, w_1, \dots, w_{d-1}) est une base orthonormale \mathbb{R}^d , $|\pi(X_n)|^2 = |w_1 \cdot X_n|^2 + \dots + |w_{d-1} \cdot X_n|^2$, d'où

$$\left\{ \sup_n |\pi(X_n)| \geq \rho u^\gamma \right\} \subset \bigcup_{i=1}^{d-1} \left\{ \sup_n X_n \cdot w_i \geq \frac{\rho}{\sqrt{d-1}} u^\gamma \right\}.$$

Soit $w \perp \hat{v}$. La preuve consiste maintenant à découper la trajectoire avant L_u^l selon les temps τ_k , et à utiliser la propriété de renouvellement. On note $k_n = \sup \{k \geq 0 \mid \tau_k \leq n\}$. Par construction de τ_k , on a, pour tout k et tout $m \geq \tau_k$, $X_m \cdot l \geq X_{\tau_k} \cdot l \geq ka$, d'où pour tout $m \geq n(\geq \tau_{k_n})$, $k_n a \leq X_{\tau_{k_n}} \cdot l \leq X_m \cdot l$, de sorte que si $n \leq L_u^l$, alors :

$$k_n \leq \frac{u}{a}. \quad (*)$$

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$X_n \cdot w \leq X_{\tau_{k_n}} \cdot w + \sup_{\tau_k \leq m \leq \tau_{k+1}} |X_m - X_{\tau_k}| \leq X_{\tau_{k_n}} \cdot w + X^* \circ \Theta_{\tau_{k_n}},$$

où $X^* = \sup_{0 \leq m \leq \tau_1} |X_m - X_0|$ ($= X_{\tau_1}^*$ avec la notation déjà définie), donc pour tout $\rho > 0, u > 0, \gamma \in (\frac{1}{2}, 1]$, $\lambda > 0$, d'après (*):

$$\begin{aligned} P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq \rho u^\gamma \right) &\leq \sum_{0 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0(X_{\tau_1} \cdot w + (X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot w + X^* \circ \Theta_{\tau_k} > \rho u^\gamma) \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0(X_{\tau_1} \cdot w > \frac{\rho u^\gamma}{3}) + P_0((X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot w > \frac{\rho u^\gamma}{3}) \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0(X^* \circ \Theta_{\tau_k} > \frac{\rho u^\gamma}{3}) \\ &\leq e^{-\frac{\lambda \rho}{3} u^\gamma} \left(\sum_{1 \leq k \leq \frac{u}{a}} E_0[e^{\lambda X_{\tau_1} \cdot w}] + E_0[e^{\lambda(X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot w}] \sum_{0 \leq k \leq \frac{u}{a}} E_0[e^{\lambda X^* \circ \Theta_{\tau_k}}] \right). \end{aligned}$$

De plus, $X_{\tau_1} \cdot w \leq X^*$, $E_0[e^{\lambda(X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot w}] = E_0[e^{\lambda X_{\tau_1} \cdot w} | D = \infty]^{k-1}$ et $E_0[e^{\lambda X^* \circ \Theta_{\tau_k}}] = E_0[e^{\lambda X^*} | D = \infty]$ par le renouvellement, donc, en posant $H(\lambda) = \ln E_0[e^{\lambda X_{\tau_1} \cdot w} | D = \infty]$, on a :

$$\begin{aligned} P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq \rho u^\gamma \right) &\leq e^{-\frac{\lambda \rho}{3} u^\gamma} \left(\left(2 \frac{u}{a} + 1 \right) E_0[e^{\lambda X^*} | D = \infty] + \frac{u}{a} e^{\frac{u}{a} H(\lambda)} \right) \\ &\leq e^{-\frac{\lambda \rho}{3} u^\gamma} \left(2 \frac{u}{a} + 1 \right) \left(E_0[e^{\lambda X^*} | D = \infty] + e^{\frac{u}{a} H(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

D'après la condition (T), $H(\lambda)$ est fini pour $0 < \lambda < c$. De plus, la fonction H vérifie $H(0) = 0$, H est indéfiniment dérivable (car $X_{\tau_1} \cdot w$ a tous ses moments finis via (T)), et $H'(0) = E_0[X_{\tau_1} \cdot w | D = \infty] = 0$ d'après la définition de \hat{v} et le fait que $\hat{v} \cdot w = 0$. Ainsi, $H(\lambda) = O_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^2)$.

Si $\gamma = 1$ (d'où $2\gamma - 1 = 1$), on choisit $0 < \lambda < c$ tel que $H(\lambda) < \lambda \frac{\rho a}{3}$, de sorte que $\frac{H(\lambda)}{a} < \frac{\lambda \rho}{3}$ et donc :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq \rho u \right) \leq \frac{H(\lambda)}{a} - \frac{\lambda \rho}{3} < 0.$$

Si $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, prendre λ constant ne mène à rien (le second membre de l'inégalité diverge vers $+\infty$); prenons donc plutôt $\lambda = \nu u^\alpha$ où $\alpha < 0$, ce qui donne $uH(\lambda) \leq aC\nu^2 u^{2\alpha+1}$ pour u assez grand, avec $C > 0$ indépendant de ν . En considérant séparément les cas $2\alpha+1 > 0$ et $2\alpha+1 \leq 0$, on trouve que la valeur fournissant l'inégalité la plus fine (au niveau de l'exposant de u dans l'exponentielle) est $\alpha = \gamma - 1$, qui donne, en choisissant ν suffisamment petit :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{2\gamma-1}} \ln P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq \rho u^\gamma \right) \leq -\frac{\nu \rho}{3} + C\nu^2 < 0.$$

□

Donnons une application importante de ce lemme, relative à la face de sortie d'un cylindre orienté selon \hat{v} .

On note \hat{R} une rotation telle que $\hat{R}(e_1) = \hat{v}$, puis on définit, pour $\varepsilon, r, a > 0$, le cylindre :

$$\text{Cyl}_{\varepsilon, a, r} = \hat{R}((-\varepsilon, a) \times \mathbb{B}^{d-1}(0, r))$$

ou, autrement dit, $\text{Cyl}_{\varepsilon, a, r} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \cdot \hat{v} \in (-\varepsilon, a) \text{ et } |\pi(x)| < r\}$, et, pour $u > 0$:

$$\text{Cyl}_{\varepsilon, a, r}^u = (u \text{Cyl}_{\varepsilon, a, r}) \cap \mathbb{Z}^d.$$

PROPOSITION 16. – Sous (T), pour tous $\varepsilon, a, r > 0$, on a :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0(T_{au}^{\hat{v}} > T_{\text{Cyl}_{\varepsilon, a, r}^u}) < 0.$$

(La probabilité apparaissant dans l'énoncé est la probabilité pour la marche de sortir du cylindre $\text{Cyl}_{\varepsilon, r, a}^u$ ailleurs que par la face «supérieure», celle dans la direction de \hat{v})

DÉMONSTRATION. Dans la preuve, on note Cyl^u le cylindre $\text{Cyl}_{\varepsilon, a, r}^u$. On découpe l'événement de l'énoncé selon que la marche sort par les faces latérales ou par la face inférieure (le «fond») du cylindre :

$$\{T_{au}^{\hat{v}} > T_{\text{Cyl}^u}\} \subset \{T_{\text{Cyl}^u} < \tilde{T}_{-\varepsilon u}^{\hat{v}} \wedge T_{au}^{\hat{v}}\} \cup \{\tilde{T}_{-\varepsilon u}^{\hat{v}} < T_{au}^{\hat{v}}, \sup_{n < \tilde{T}_{-\varepsilon u}^{\hat{v}}} |\pi(X_n)| < ru\}.$$

Notons (I) et (II) respectivement ces deux événements. Par le «lemme sympa», on peut les considérer séparément. On commence par s'occuper de (I) (sortie par une face latérale). Il s'agit de faire appel au lemme démontré juste avant. Pour cela, on remarque que, pour tout $x \in \text{Cyl}^u$:

$$x \cdot l = (x \cdot \hat{v})(\hat{v} \cdot l) + \pi(x) \cdot l \leq au + ru = (a+r)u,$$

si bien que $T_{\text{Cyl}^u} \leq L_{(a+r)u}^l$, et donc :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0((\text{I})) \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0 \left(\sup_{n < L_{(a+r)u}^l} |\pi(X_n)| \geq ru \right) < 0.$$

Passons à (II) (sortie par le fond). Sur (II), P_0 -p.s., $X_{\tilde{T}_{-\varepsilon u}^{\hat{v}}}$ est à une distance au plus 1 du fond du cylindre donc on a :

$$X_{\tilde{T}_{-\varepsilon u}^{\hat{v}}} \cdot l \leq -\varepsilon u(\hat{v} \cdot l) + ru + 1 = -(\varepsilon(\hat{v} \cdot l) - r)u + 1 \leq -\frac{\varepsilon(\hat{v} \cdot l) - r}{2}u,$$

pour u suffisamment grand. Supposons tout d'abord que $\varepsilon(\widehat{v} \cdot l) - r > 0$. Dans ce cas, on a :

$$P_0((\text{II})) \leq P_0(X_{\widetilde{T}^u_{-\frac{\varepsilon(\widehat{v} \cdot l) - r}{2}}} < \infty) \leq P_0(X_{\tau_1}^* \geq \frac{\varepsilon(\widehat{v} \cdot l) - r}{2}) \leq \exp(-c \frac{\varepsilon(\widehat{v} \cdot l) - r}{2} u) E_0[\exp(cX_{\tau_1}^*)],$$

où grâce à (T) l'espérance est finie, ce qui donne bien $\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0((\text{II})) \leq -c \frac{\varepsilon(\widehat{v} \cdot l) - r}{2} < 0$.

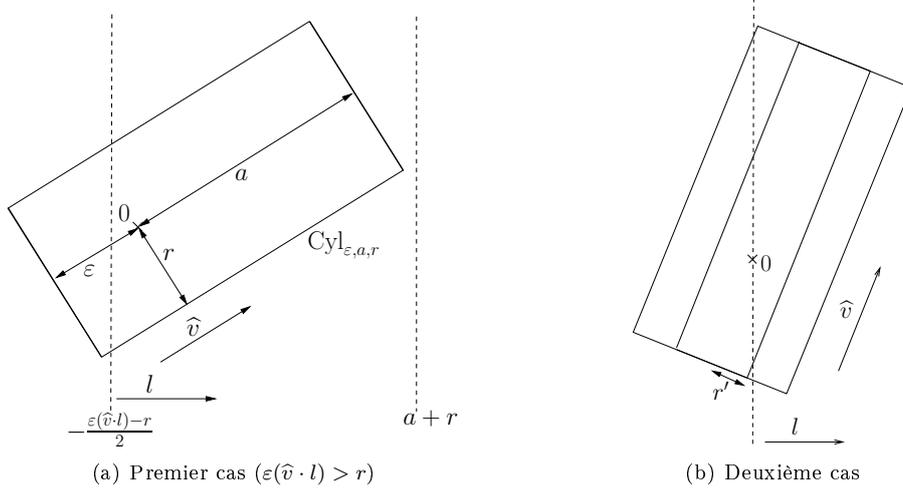


FIG. 4 – Illustration de la preuve de la proposition 16

Dans le cas général, on a la même conclusion en découpant le fond du cylindre en deux parties : la partie correspondant au fond d'un petit cylindre central concentrique $\text{Cyl}_{\varepsilon,a,r'}$ avec r' assez petit pour que l'hypothèse du premier cas soit satisfaite, et le reste du fond, pour lequel on peut raisonner comme pour le terme (I) puisque ses éléments x vérifient $|\pi(x)| \geq r'u$. On a donc la même conclusion, ce qui achève la preuve (voir la figure 4) \square

3.3 Condition équivalente

Telle que définie, la condition (T) se prête bien au calcul mais se laisse difficilement vérifier, en particulier parce que τ_1 n'est pas un temps d'arrêt. On va ici s'intéresser à exprimer de façon équivalente la condition (T)| l, a en fonction des distributions de sortie de la marche de certains ensembles (à la manière du cylindre du paragraphe précédent), sans faire intervenir τ_1 , ce qui pourra permettre de mieux comprendre cette condition.

THÉORÈME 17. – Soit $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $b, r > 0$ et, pour L grand, des parties (finies) $\Delta_L \subset \mathbb{Z}^d$ satisfaisant $0 \in \Delta_L \leq \{l_0 \cdot x \geq -bL\} \cap \mathbb{B}^d(0, rL)$ et :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) < 0,$$

où $\partial_0 \Delta_L = \partial \Delta_L \cap \{l_0 \cdot x \geq L\}$;

- (ii) la condition (T) relative à l_0 et a est vérifiée ;
- (iii) la condition (T) est vérifiée pour tous $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ dans un voisinage de l_0 , $a > 0$.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, on peut définir $\widehat{v} = \lim_n \frac{X_n}{|X_n|}$ via la proposition 14, et la condition (T) est satisfaite relativement à $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$ si et seulement si $l \cdot \widehat{v} > 0$.

DÉMONSTRATION. • L'implication (iii) \Rightarrow (ii) est évidente.

• Montrons (iii) \Rightarrow (i) pour commencer. On suppose qu'il existe un voisinage V de l_0 sur lequel (T)| a est satisfaite. On peut donc définir \widehat{v} . On complète $(f_1) = (l_0)$ en une base orthonormale (f_1, f_2, \dots, f_d) de \mathbb{R}^d , puis on choisit $l_{i,+}, l_{i,-} \in V \cap \mathbb{S}^{d-1}$, $i = 2, \dots, d$, tels que, pour $i = 2, \dots, d$:

- (i) $l_{i,\pm} \in \mathbb{R}f_1 + \mathbb{R}f_i$;
- (ii) $l_{i,\pm} \cdot f_1 > 0$;
- (iii) $l_{i,+} \cdot f_i > 0$ et $l_{i,-} \cdot f_i < 0$.

Ceci est possible puisque $f_1 \cdot \widehat{v} > 0$, $f_1 \cdot f_i = 0$, et V est un ouvert contenant f_1 . On note :

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid l_0 \cdot x \in [-1, 1] \text{ et, pour } i = 2, \dots, d, l_{i,\pm} \cdot x \geq -1\},$$

\mathcal{D} est borné : pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|x| \leq \sum_{1 \leq i \leq d} |x \cdot f_i|$, $x \cdot f_1 \in [-1, 1]$ et, pour $i = 2, \dots, d$, si on note $l_{i,\pm} = \lambda_{\pm} f_1 + \mu_{\pm} f_i$, on a $\lambda_{\pm} > 0$ et $\mu_+ > 0$, $\mu_- < 0$, d'où :

$$\frac{1}{\mu_+}(-1 - \lambda_+) \leq \frac{1}{\mu_+}(x \cdot l_{i,+} - \lambda_+ x \cdot f_1) = x \cdot f_i = \frac{1}{\mu_-}(x \cdot l_{i,-} - \lambda_- x \cdot f_1) \leq \frac{1}{\mu_-}(-1 - \lambda_-).$$

Par suite, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $L > 0$, $\Delta_L = L\mathcal{D} \cap \mathbb{Z}^d \subset \{l_0 \cdot x \geq -L\} \cap \mathbb{B}^d(0, rL)$, et on a aussi :

$$P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) \leq P_0(\widetilde{T}_{-L}^{l_0} < \infty \text{ ou il existe } i \in \{2, \dots, d\} \text{ tel que } \widetilde{T}_{-L}^{l_{i,+}} < \infty \text{ ou } \widetilde{T}_{-L}^{l_{i,-}} < \infty).$$

Et pour $i = 2, \dots, d$, comme $l_{i,\pm} \in V$, on a :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0(\widetilde{T}_{-L}^{l_{i,\pm}} < \infty) \leq \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0(X_{\tau_1}^* \geq L) < 0,$$

de même pour l_0 , ce qui démontre (i).

• Supposons démontrée l'implication (i) \Rightarrow (ii) (pour tout l_0) et déduisons-en (ii) \Rightarrow (iii). On suppose donc (T)| l_0, a . Ceci permet de définir \widehat{v} . Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $l \cdot \widehat{v} > 0$. Pour $\varepsilon = r$ suffisamment petit, et $a > 0$ suffisamment grand, $\Delta_L = \text{Cyl}_{\varepsilon, r, a}^L$ (cf. page 22) vérifie :

$$0 \in \Delta_L \subset \{x \cdot l \geq -L\} \cap \mathbb{B}^d(0, 2aL)$$

et :

$$\left\{ X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0^l \Delta_L \right\} \subset \left\{ T_{\text{Cyl}_{\varepsilon, r, a}^L} < T_{aL}^{\widehat{v}} \right\},$$

où $\partial_0^l \Delta_L = \partial \Delta_L \cap \{x \cdot l \geq L\}$, et donc, à l'aide de la proposition 16 :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0^l \Delta_L \right) < 0,$$

ce qui achève de montrer que (i) est vérifié avec l à la place de l_0 , et donc (ii) aussi : (T)| l, a est satisfaite. Ceci montre (iii), et même la deuxième partie de l'énoncé.

• Il reste à démontrer (i) \Rightarrow (ii). Supposons (i). Quitte à remplacer Δ_L par $\Delta_L \cap \{x \cdot l_0 < L\}$ (qui satisfait aussi les hypothèses de (i)), on peut supposer que $\Delta_L \subset \{x \cdot l_0 < L\}$. Alors, par (i) :

$$P_0(T_L^{l_0} = \infty) \leq P_0(T_L^{l_0} > T_{\Delta_L}) = P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0,$$

d'où l'on déduit, par le lemme de Borel-Cantelli, que :

$$P_0\text{-p.s.}, \limsup_n X_n \cdot l_0 = \infty,$$

et donc que, P_0 -p.s., $T_L^{l_0} < \infty$ pour tout $L > 0$. Montrons maintenant que, P_0 -p.s., $\lim_n X_n \cdot l_0 = \infty$. Pour cela, on s'intéresse au comportement de la marche une fois qu'elle a eu atteint $\{x \cdot l_0 > L\}$. On a, pour L grand, (b est le paramètre apparaissant dans (i))

$$P_0 \left(\widetilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}} < T_{(1+\frac{1}{3b})L}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) + P_0 \left(\tilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}} < T_{(1+\frac{1}{3b})L}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}}, X_{T_{\Delta_L}} = X_{T_L^{l_0}} \in \partial_0 \Delta_L \right) \\
&\leq P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) + \mathbb{E} \left[P_{X_{T_L^{l_0}}, \omega} \left(\tilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} < T_{\frac{L}{3b}}^{l_0} \right), X_{T_L^{l_0}} \in \partial_0 \Delta_L \right] \\
&\leq P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) + |\partial_0 \Delta_L| P_0 \left(\tilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} < T_{\frac{L}{3b}}^{l_0} \right)
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov forte, puis l'invariance de \mathbb{P} par translation. On remarque que :

$$\Delta_{\frac{L}{3b}} \subset \left\{ x \cdot l_0 \geq b \frac{L}{3b} \right\} \subset \left\{ x \cdot l_0 > \frac{L}{2} \right\},$$

de sorte que

$$P_0 \left(\tilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} < T_{\frac{L}{3b}}^{l_0} \right) \leq P_0 \left(X_{T_{\Delta_{\frac{L}{3b}}}} \notin \partial_0 \Delta_{\frac{L}{3b}} \right),$$

et comme $|\partial_0 \Delta_L|$ est polynomial en L , on déduit de l'inégalité précédente et de (i) :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0 \left(\tilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}} < T_{(1+\frac{1}{3b})L}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}} \right) < 0.$$

Comme la série de terme général $\exp(-\mu n)$, $n \geq 0$, converge, le lemme de Borel-Cantelli montre qu'il existe P_0 -p.s. un entier Λ tel que :

$$\text{pour tout entier } L \geq \Lambda, \tilde{T}_{\frac{L}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}} \geq T_{(1+\frac{1}{3b})L}^{l_0} \circ \Theta_{T_L^{l_0}}.$$

Mais alors, P_0 -p.s., on peut définir une suite $(L_k)_{k \geq 0}$ par $L_0 = \Lambda$ et, pour tout $k \geq 0$, $L_{k+1} = \lfloor (1 + \frac{1}{3b}) L_k \rfloor$, ce qui donne $L_k \rightarrow \infty$ et, pour tout $k \geq 0$:

$$T_{L_{k+1}}^{l_0} - T_{L_k}^{l_0} = T_{L_{k+1}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_k}^{l_0}} \leq \tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_k}^{l_0}},$$

et donc :

$$X_n \cdot l_0 \xrightarrow{n} \infty.$$

(pour tout k , on a par Markov fort en $T_{L_{k+1}}$: $\tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_k}^{l_0}} = T_{L_{k+1}}^{l_0} - T_{L_k}^{l_0} + \tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_{k+1}}^{l_0}}$, et $L_k < L_{k+1}$ donc $\tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_{k+1}}^{l_0}} > \tilde{T}_{\frac{L_{k+1}}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_{k+1}}^{l_0}} > T_{L_{k+2}}^{l_0} - T_{L_{k+1}}^{l_0}$, et ainsi : $\tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_k}^{l_0}} > T_{L_{k+1}}^{l_0} - T_{L_k}^{l_0} + T_{L_{k+2}}^{l_0} - T_{L_{k+1}}^{l_0} = T_{L_{k+2}}^{l_0} - T_{L_k}^{l_0}$. Puis par récurrence $\tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_k}^{l_0}} > T_{L_{k+m}}^{l_0} - T_{L_k}^{l_0}$ pour tout $m \geq 0$, et enfin $T_L \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \infty$ ($T_L \geq L$) et $L_k \xrightarrow{k} \infty$, et donc $\tilde{T}_{\frac{L_k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{L_k}^{l_0}} = \infty$. Autrement dit, pour tout k , pour tout $n \geq T_{L_k}$, $X_n \cdot l_0 > \frac{L_k}{2}$. Et $L_k \xrightarrow{k} \infty$, donc la suite $(X_n \cdot l_0)_n$ diverge vers $+\infty$. Avec des mots : Fixons k . La suite $(X_n \cdot l_0)_n$ atteint L_k , puis atteint L_{k+1} avant $\frac{L_k}{2}$, mais une fois en L_{k+1} , elle atteint L_{k+2} avant $\frac{L_{k+1}}{2}$ et donc *a fortiori* avant $\frac{L_k}{2}$ puisque $L_k < L_{k+1}$; de la sorte, n'importe quel niveau L_{k+m} , $m \geq 0$, est atteint avant que la suite ne revienne en $\frac{L_k}{2}$. Autrement dit, il n'y aura pas de retour en $\frac{L_k}{2}$. D'où $\liminf_n X_n \cdot l_0 \geq \frac{L_k}{2}$. Ceci pour tout k , et $L_k \xrightarrow{k} \infty$, donc $X_n \cdot l_0 \xrightarrow{n} \infty$.)

Il reste à montrer $E_0[\exp(cX_{\tau_1}^*)] < \infty$ pour $c > 0$ suffisamment petit. On commence par s'intéresser à $E_0[\exp(c|X_{\tau_1}|)]$, et pour cela on rappelle la proposition 10 :

PROPOSITION. – On suppose $X_n \cdot l_0 \xrightarrow{n} \infty$. Si τ_1 est relatif à l_0 et $a' > 0$ alors, sous P_0 , la variable aléatoire $X_{\tau_1} \cdot l_0$ est stochastiquement dominée par $a' + 1 + G_j$ où, pour tout $j \geq 0$:

$$G_j = \bar{M}_1 + \dots + \bar{M}_j,$$

($\bar{M}_j)_{j \geq 0}$ étant une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que $a' + 1 + M$ sous $P_0(\cdot | D^{l_0} < \infty)$, avec :

$$M = \sup \{ (X_k - X_0) \cdot l_0 \mid 0 \leq k \leq D^{l_0} \},$$

et J est une variable aléatoire indépendante des \bar{M}_j , $j \geq 0$, suivant la loi géométrique de paramètre $P_0(D^{l_0} < \infty)$ ($P_0(J \geq j) = P_0(D^{l_0} < \infty)^j$ pour tout $j \geq 0$).

On a donc, pour tout $c > 0$:

$$\begin{aligned} E_0 \left[e^{c|X_{\tau_1} \cdot l_0|} \right] &\leq E \left[e^{c|a'+1+G_{Jl}|} \right] = \sum_{k \geq 0} P_0(D = \infty) P_0(D < \infty)^k E^{\otimes k} \left[e^{c|a'+1+G_k|} \right] \\ &\leq P_0(D = \infty) \sum_{k \geq 0} P_0(D < \infty)^k e^{c(a'+1)} E \left[e^{c\bar{M}} \right]^k \end{aligned}$$

Or, pour tout $\rho > 1$:

$$\begin{aligned} E \left[e^{c\bar{M}} \right] &\leq e^{c(a'+1)} E[e^{cM} | D < \infty] \\ &\leq e^{c(a'+1)} \left(e^c + \sum_{k \geq 0} e^{c\rho^{k+1}} P_0(\rho^k \leq M < \rho^{k+1} | D < \infty) \right) \end{aligned}$$

et, pour k grand :

$$\begin{aligned} P_0(\rho^k \leq M < \rho^{k+1}, D < \infty) &\leq P_0 \left(\tilde{T}_0^{l_0} \circ \Theta_{T_{\rho^k}^{l_0}} < T_{\rho^{k+1}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{\rho^k}^{l_0}} \right) \\ &\leq P_0 \left(\tilde{T}_{\frac{\rho^k}{2}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{\rho^k}^{l_0}} < T_{\rho^{k+1}}^{l_0} \circ \Theta_{T_{\rho^k}^{l_0}} \right) \\ &\leq e^{-\mu\rho^k}, \end{aligned}$$

avec $\mu > 0$, en choisissant $\rho = 1 + \frac{1}{3b}$ et en faisant appel à l'inégalité montrée plus haut. En somme, on obtient, pour c petit ($c < \mu\rho^{-1}$), $E[e^{c\bar{M}}] < \infty$, et donc cette espérance converge vers 1 lorsque c tend vers 0 (par convergence monotone). En choisissant $c > 0$ assez petit pour que $P_0(D < \infty)E[e^{c\bar{M}}] < 1$, on a finalement, au vu d'une majoration précédente :

$$E_0 \left[e^{c|X_{\tau_1} \cdot l_0|} \right] < \infty.$$

On termine alors la preuve de (ii) : pour tout $c > 0$, et u grand, comme $\Delta_{\frac{u}{2r}} \subset \mathbb{B}^d(0, \frac{u}{2})$, on a :

$$\begin{aligned} P_0(X_{\tau_1}^* > u) &\leq P_0(T_{\Delta_{\frac{u}{2r}}} < \tau_1) \\ &\leq P_0(X_{\tau_1} \cdot l_0 \geq \frac{u}{2r}) + P_0(X_{\tau_1} \cdot l_0 < \frac{u}{2r}, T_{\Delta_{\frac{u}{2r}}} < \tau_1) \\ &\leq e^{-c(\frac{u}{2r})} E_0[e^{c|X_{\tau_1} \cdot l_0|}] + P_0(X_{T_{\Delta_{\frac{u}{2r}}}} \notin \partial_0 \Delta_{\frac{u}{2r}}), \end{aligned}$$

en utilisant le raisonnement suivant pour la dernière inégalité : pour tout $m < \tau_1$, $X_m \cdot l_0 < X_{\tau_1} \cdot l_0$ donc, si $T_{\Delta_{\frac{u}{2r}}} < \tau_1$, alors $X_{T_{\Delta_{\frac{u}{2r}}}} \cdot l_0 < X_{\tau_1} \cdot l_0$. Mais alors (i) et le résultat que l'on vient de montrer fournissent $\mu > 0$ et $u_0 > 0$ tels que $P_0(X_{\tau_1}^* > u) \leq \exp(-\mu u)$ pour $u \geq u_0$, d'où :

$$E_0[e^{\lambda X_{\tau_1}^*}] = 1 + \int_0^\infty \lambda e^{\lambda u} P_0(X_{\tau_1}^* \geq u) du \leq \lambda e^{\lambda u_0} + \int_{u_0}^\infty \lambda e^{\lambda u} e^{-\mu u} du < \infty$$

dès que $0 < \lambda < \mu$. On a donc montré que (T) est satisfaite relativement à l_0 et à tout $a' > 0$. \square

REMARQUE. En particulier, la dernière partie du théorème montre que le paramètre $a > 0$ n'intervient pas dans le fait que (T)| l , a est satisfait ou non. Dans la suite, on pourra donc parler de la condition (T)| l , le paramètre a étant choisi quelconque.

COROLLAIRE 18. — Soit $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la condition (T) relative à l_0 est vérifiée ;

(ii) pour tout l dans un voisinage de l_0 , pour tout $b > 0$, on a : $\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0 \left(\tilde{T}_{-bL}^l < T_L^l \right) < 0$.

DÉMONSTRATION. On suppose (i). Par le théorème précédent, (T)| l est vérifiée pour tout l dans un voisinage de l_0 . Or on a, pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $b > 0$:

$$P_0 \left(\tilde{T}_{-bL}^l < T_L^l \right) \leq P_0 \left(\tilde{T}_{-bL}^l < \infty \right) \leq P_0(X_{\tau_1}^* \geq bL)$$

d'où, dès que (T)| l est vérifiée :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0 \left(\tilde{T}_{-bL}^l < T_L^l \right) < 0.$$

On a donc obtenu (ii).

Supposons (ii). On peut alors reproduire le début de la preuve de l'implication (iii) \Rightarrow (i) du théorème précédent en notant V un voisinage de l'énoncé, et en définissant les $l_{i,\pm}$, $i = 2, \dots, d$ et \mathcal{D} de même; comme \mathcal{D} est borné, il existe $a > 0$ tel que, pour $i = 2, \dots, d$:

$$\mathcal{D} \subset \{x \cdot l_{i,\pm} \leq a\}.$$

Ainsi, avec $\Delta_L = (L\mathcal{D}) \cap \mathbb{Z}^d$, on a :

$$P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) \leq P_0 \left(\tilde{T}_{-L}^{l_0} < T_L^{l_0} \text{ ou il existe } i \in \{2, \dots, d\} \text{ tel que } \tilde{T}_{-L}^{l_{i,\pm}} < T_{aL}^{l_{i,\pm}} \right),$$

d'où découle le fait que Δ_L satisfait l'hypothèse (i) du théorème précédent. Par suite, en particulier, (T)| l_0 est vérifiée. \square

3.4 En dimension 1

En dimension 1, au contraire de la situation en dimension supérieure (voir section 4), la condition (T) s'avère non pertinente, et il sera donc important de noter les différences essentielles entre ces deux situations :

THÉORÈME 19. – On suppose $d = 1$. Pour $l = \pm 1$, la condition (T)| l équivaut à :

$$P_0\text{-p.s.}, X_n \cdot l \xrightarrow[n]{} +\infty.$$

DÉMONSTRATION. Au vu du théorème de Solomon (théorème 1), et avec les mêmes notations, il suffit de montrer que, si $\mathbb{E}[\ln \rho] < 0$, alors, pour $l = +1$, pour $c > 0$ suffisamment petit, $E_0[e^{cX_{\tau_1}^*}] < \infty$.

On montre d'abord $E_0[e^{cX_{\tau_1}^*}] < \infty$ pour $c > 0$ suffisamment petit. En reprenant la preuve du théorème 17 (implication (i) \Rightarrow (ii)), il suffit de montrer (avec les mêmes notations) qu'il existe $c' > 0$ tel que, pour m grand :

$$P_0(2^m \leq M < 2^{m+1}, D < \infty) \leq e^{-c'2^m}.$$

La géométrie de la situation en dimension 1 est telle que, en notant T_u au lieu de T_u^1 et de même pour \tilde{T} :

$$P_0(2^m \leq M < 2^{m+1}, D < \infty) \leq P_0(\tilde{T}_{-2^m} < T_{2^m}).$$

Or, en utilisant la fonction harmonique f_ω mentionnée au paragraphe 1.2, on obtient, pour tous $x < 0 < y$,

$$f_\omega(0) = P_{0,\omega}(\tilde{T}_x < T_y)f_\omega(x) + P_{0,\omega}(T_y < \tilde{T}_x)f_\omega(y),$$

d'où, avec l'expression de f_ω :

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(\tilde{T}_x < T_y) &= \frac{\Pi_{x,0} + \dots + \Pi_{x,y-1}}{1 + \Pi_{x,x+1} + \dots + \Pi_{x,y-1}} \\ &\leq \Pi_{x,0} + \dots + \Pi_{x,y-1}, \end{aligned}$$

où $\Pi_{z,z'} = \prod_{z < m \leq z'} \rho(m, \omega)$ pour $z \leq z'$. Ceci donne, en choisissant $\gamma \in (0, -\mathbb{E}[\ln \rho])$:

$$\begin{aligned} P_0(\tilde{T}_{-2^m} < T_{2^m}) &\leq e^{-\gamma 2^m} + 2^m \sup_{0 \leq k < 2^m} \mathbb{P} \left(\Pi_{-2^m, k} > \frac{1}{2^m} e^{-\gamma 2^m} \right) \\ &= e^{-\gamma 2^m} + 2^m \sup_{0 \leq k < 2^m} \mathbb{P} \left(\sum_{-2^m < z \leq k} \ln \rho(z, \omega) > -\gamma 2^m - m \ln 2 \right) \\ &\leq e^{-c 2^m} \end{aligned}$$

pour un certain $c > 0$, en utilisant l'égalité de Cramer-Tchernoff pour conclure (la suite des $\rho(z, \omega)$, $z \in \mathbb{Z}$, est i.i.d. sous \mathbb{P}).

Il reste à en déduire $E_0[e^{cX_{\tau_1}^*}] < \infty$ pour $c > 0$ petit. Pour $c > 0$ et m grand, on a :

$$\begin{aligned} E_0[e^{cX_{\tau_1}^*}] &= E_0[e^{cX_{\tau_1}}] + E_0[e^{cX_{\tau_1}^*}, X_{\tau_1} < X_{\tau_1}^*] \\ &\leq E_0[e^{cX_{\tau_1}}] + \sum_{m \geq 0} e^{c 2^{m+1}} P_0(2^m < X_{\tau_1}^* \leq 2^{m+1}, X_{\tau_1} < X_{\tau_1}^*), \end{aligned}$$

donc, compte-tenu de ce que l'on vient de montrer, il reste à prouver que pour c assez petit,

$$P_0(2^m < X_{\tau_1}^* \leq 2^{m+1}, X_{\tau_1} < X_{\tau_1}^*) \leq e^{-c 2^m}.$$

Mais en dimension 1, le membre de gauche est inférieur à $P_0(\tilde{T}_{-2^m} < T_{2^{m+1}})$, et on obtient cette inégalité de la même manière que ci-dessus. \square

3.5 Critère de Kalikow

Dans l'article [3], Steven A. Kalikow démontre l'un des tout premiers résultats sur la transience des marches aléatoires en milieu aléatoire en dimension $d \geq 2$. Son critère est basé sur l'introduction d'une chaîne de Markov auxiliaire, à valeurs dans certaines parties connexes $U \subset \mathbb{Z}^d$, qui a l'intérêt d'avoir même distribution de sortie que la marche initiale sous P_0 , bien que celle-ci, comme on l'a dit, *ne soit pas* une chaîne de Markov.

Pour $U \subsetneq \mathbb{Z}^d$ connexe contenant 0, on définit la matrice de transition \hat{P}_U d'espace d'états $U \cup \partial U$ par :

$$\begin{aligned} \hat{P}_U(x, x+e) &= \frac{\mathbb{E}[E_{0,\omega}[\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{(X_n=x)}] \omega(x, x+e)]}{E_0[\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{(X_n=x)}]} \text{ si } x \in U, \\ \hat{P}_U(x, x) &= 1 \text{ si } x \in \partial U, \end{aligned}$$

pour tous $x \in U \cup \partial U$ et $e \in \mathbb{Z}^d$, $|e| = 1$ (la quantité apparaissant au numérateur de la première ligne est le nombre moyen, sous P_0 , de passages de la marche par l'arête orientée $(x, x+e)$ avant qu'elle ne quitte U , en incluant le premier instant hors de U ; le dénominateur comptabilise les passages par le sommet x et fournit donc la normalisation qui rend la matrice stochastique). On note alors $\hat{P}_{x,U}$ la loi de la chaîne de Markov canonique, dite marche de Kalikow, issue de $x \in U \cup \partial U$ et donnée par cette matrice de transition, et $\hat{E}_{x,U}$ l'espérance sous $\hat{P}_{x,U}$.

La propriété essentielle de cette définition tient dans le lemme suivant, qui permet de se ramener à un problème markovien, donc *a priori* plus simple :

LEMME 20. – On suppose $\hat{P}_{0,U}(T_U < \infty) = 1$. Alors $P_0(T_U < \infty) = 1$, et X_{T_U} a même loi sous $\hat{P}_{0,U}$ et sous P_0 .

DÉMONSTRATION. On note, pour $x, y \in U \cup \partial U$, $\omega \in \Omega$:

$$\tilde{g}_U(x, y; \omega) = E_{x,\omega} \left[\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{(X_n=y)} \right],$$

de sorte que si $x \in U$ et $y \in U \cup \partial U$, en notant $\omega(x, z) = 0$ lorsque $|z| \neq 1$,

$$\widehat{P}_U(x, y) = \frac{\mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)\omega(x, y-x)]}{\mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)]}.$$

Pour $x \in U \cup \partial U$ et $\omega \in \Omega$, la propriété de Markov donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_U(0, x; \omega) &= \delta_{0,x} + \sum_{y \in U} \widetilde{g}_U(0, y; \omega)\omega(y, x-y) \\ &= \delta_{0,x} + \sum_{y \in U} \widehat{P}_U(y, x)\mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, y; \omega)], \end{aligned}$$

d'où :

$$E_0[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)] = \delta_{0,x} + \sum_{y \in U} E_0[\widetilde{g}_U(0, y; \omega)]\widehat{P}_U(y, x).$$

Or la solution positive minimale de l'équation suivante, d'inconnue $f : U \cup \partial U \rightarrow [0, +\infty)$:

$$\text{pour tout } x \in U \cup \partial U, f(x) = \delta_{0,x} + \sum_{y \in U} f(y)\widehat{P}_U(y, x),$$

est la fonction :

$$\widehat{g}_U : x \mapsto \widehat{E}_{0,U} \left[\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{(X_n=x)} \right].$$

En effet, si f est solution, alors en notant, pour tout N , $\widehat{g}_{U,N}(x) = \widehat{E}_{0,U}[\sum_{n=0}^{N \wedge T_U} \mathbf{1}_{(X_n=x)}]$, la propriété de Markov (pour la nouvelle chaîne de Markov) donne, pour $N \geq 1$ et tout $x \in U \cup \partial U$:

$$\widehat{g}_{U,N}(x) = \delta_{0,x} + \sum_{y \in U} \widehat{g}_{U,N-1}(y)\widehat{P}(y, x),$$

et $\widehat{g}_{U,0}(x) = \delta_{0,x} \geq f(x)$ d'où, par récurrence, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\widehat{g}_{U,N}(x) \geq f(x)$ et finalement $\widehat{g}_U(x) = \lim_N \widehat{g}_{U,N}(x) \geq f(x)$. De cette propriété de \widehat{g}_U (qui est générale pour une chaîne de Markov), on déduit que :

$$\text{pour tout } x \in U \cup \partial U, \widehat{g}_U(x) \leq \mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)].$$

Or, pour $x \in \partial U$, cette inégalité s'écrit :

$$\widehat{P}_{0,U}(T_U < \infty, X_{T_U} = x) \leq P_0(T_U < \infty, X_{T_U} = x),$$

et comme par hypothèse $\widehat{P}_{0,U}(T_U < \infty) = 1$, on a $\sum_{x \in \partial U} \widehat{P}_{0,U}(T_U < \infty, X_{T_U} = x) = 1$. D'où $P_0(T_U < \infty) = 1$ et :

$$\text{pour tout } x \in \partial U, \widehat{P}_{0,U}(X_{T_U} = x) = P_0(X_{T_U} = x),$$

ce qui est la propriété annoncée. \square

REMARQUE. On a montré $\widehat{g}_U(x) \leq \mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)]$ pour tout $x \in U \cup \partial U$, avec égalité lorsque $x \in \partial U$. L'équation simultanément vérifiée par ces deux fonctions permet en fait d'obtenir l'égalité pour tout $x \in U \cup \partial U$ (la différence entre ces fonctions est \widehat{P} -harmonique donc on dispose d'un principe du maximum). En sommant sur $x \in U$, on en déduit : $\widehat{E}_{0,U}[T_U] = E_0[T_U]$.

On définit la dérive de la marche de Kalikow : pour $x \in U \cup \partial U$,

$$\widehat{d}_U(x) = \widehat{E}_{x,U}[X_1 - X_0] = \sum_{|e|=1} \widehat{P}(x, x+e)e = \frac{\mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)d(x, \omega)]}{\mathbb{E}[\widetilde{g}_U(0, x; \omega)]}.$$

DÉFINITION. – La marche aléatoire $(X_n)_n$ (ou la loi μ) satisfait la condition de Kalikow relative à $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, que l'on abrège en (K)| l , si $\inf_{U, x \in U} \widehat{d}_U(x) \cdot l > 0$, où l'infimum est pris sur U parcourant les parties strictes de \mathbb{Z}^d connexes contenant 0.

Notons tout d'abord que si la marche est *non-nestling*, c'est à dire (voir partie 1.3) s'il existe $\varepsilon > 0$ et $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ tels que \mathbb{P} -p.s., $d(0, \omega) \cdot l > \varepsilon$, alors la condition de Kalikow est vérifiée par rapport à l . En effet on a, pour tout $U \subsetneq \mathbb{Z}^d$ connexe contenant 0 et tout $x \in U$:

$$\widehat{d}_U(x) \cdot l = \frac{\mathbb{E}[E_{0,\omega}[\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{(X_n=x)}]d(x, \omega) \cdot l]}{E_0[\sum_{n=0}^{T_U} \mathbf{1}_{(X_n=x)}]} \geq \varepsilon.$$

L'intérêt du critère de Kalikow vient de ce qu'il permet aussi de traiter le cas de certaines marches *nestling* et donc des situations dans lesquelles on ne peut rien conclure facilement. Pour le voir, commençons par écrire ce critère sous deux formes plus faibles, mais nettement plus simples à vérifier :

PROPOSITION 21. – Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Les conditions suivantes :

- (i) $\inf_{g \in G} \mathbb{E} \left[\frac{d(0, \omega) \cdot l}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e)g(e)} \right] > 0$, où G est l'ensemble des $g = (g(e))_{|e|=1}$ avec $\begin{cases} \text{pour tout } e, g(e) \in [0, 1] \\ \max_{|e|=1} g(e) = 1 \end{cases}$;
- (ii) $\mathbb{E}[(d(0, \omega) \cdot l)_+] > \frac{1}{\kappa} \mathbb{E}[(d(0, \omega) \cdot l)_-]$ (κ étant le paramètre apparaissant dans la condition d'ellipticité) ;

satisfont : (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (K)| l .

DÉMONSTRATION. Supposons (i). On note ε la borne inférieure de l'hypothèse. On a, par un calcul habituel sur les chaînes de Markov :

$$\tilde{g}_U(0, x; \omega) = \frac{P_{0,\omega}(H_x < T_U)}{P_{0,\omega}(\tilde{H}_x > T_U)} = \frac{P_{0,\omega}(H_x < T_U)}{\sum_{|e|=1} \omega(x, e)P_{x+e,\omega}(H_x > T_U)} = \frac{1}{\sum_{|e|=1} \omega(x, e)f_U(x, e; \omega)},$$

avec $f_U(x, e; \omega) = \frac{P_{x+e,\omega}(H_x > T_U)}{P_{0,\omega}(H_x < T_U)} > 0$, et on remarque que cette variable aléatoire $f_U(x, e; \omega)$ ne dépend que de l'environnement *en dehors* de x , au contraire de $d(x, \omega)$ et $\omega(x, e)$, $|e| = 1$, qui ne dépendent que de $\omega(x, \cdot)$. Ainsi, en «désintégrant» et en utilisant (i) (pour une fonction f renormalisée par $\max_{|e|=1} f(e)$ de façon à appartenir à G) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{g}_U(0, x; \omega)d(x, \omega) \cdot l] &= \int_{\mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d \setminus \{x\}}} \left(\int_{\mathcal{P}} \frac{d(x, \omega) \cdot l}{\sum_{|e|=1} \omega(x, e)f_U(x, e; \omega)} d\mu(\omega(x, \cdot)) \right) \prod_{y \neq x} d\mu(\omega(y, \cdot)) \\ &= \int_{\mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d \setminus \{x\}}} \mathbb{E} \left[\frac{d(x, \omega) \cdot l}{\sum_{|e|=1} \omega(x, e)f(e)} \right] \Bigg|_{f=f_U(x, \cdot; \omega)} \prod_{y \neq x} d\mu(\omega(y, \cdot)) \\ &\geq \int_{\mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d \setminus \{x\}}} \frac{\varepsilon}{\max_{|e|=1} f_U(x, e; \omega)} \prod_{y \neq x} d\mu(\omega(y, \cdot)) \\ &\geq \mathbb{E} \left[\frac{\varepsilon}{\max_{|e|=1} f_U(x, e; \omega)} \right] \end{aligned}$$

et par ailleurs, par l'ellipticité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{g}_U(0, x; \omega)] &\leq \frac{1}{\kappa} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sum_{|e|=1} f_U(x, e; \omega)} \right] \\ &\leq \frac{1}{\kappa} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\max_{|e|=1} f_U(x, e; \omega)} \right], \end{aligned}$$

d'où :

$$\widehat{d}_U(x) = \frac{\mathbb{E}[\tilde{g}_U(0, x; \omega)d(x, \omega)]}{\mathbb{E}[\tilde{g}_U(0, x; \omega)]} \geq \frac{\varepsilon}{\kappa},$$

ce qui montre (K)| l .

Supposons (ii). Pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{d(0, \omega) \cdot l}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e) g(e)} \right] &= \mathbb{E} \left[\frac{(d(0, \omega) \cdot l)_+}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e) g(e)} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{(d(0, \omega) \cdot l)_-}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e) g(e)} \right] \\ &\geq \mathbb{E}[(d(0, \omega) \cdot l)_+] - \frac{1}{\kappa} \mathbb{E}[(d(0, \omega) \cdot l)_-], \end{aligned}$$

et cette quantité, indépendante de g , est strictement positive par hypothèse, d'où (ii). \square

Donnons un exemple très simple d'application de ce critère. On se place dans \mathbb{Z}^2 . Soit $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $\varepsilon < \frac{1}{8}$. On définit $\mu = \lambda \delta_{p_D} + (1 - \lambda) \delta_{p_G}$ où $p_D, p_G \in \mathcal{P}$ sont données par :

$$p_G(-e_1) = \varepsilon = \frac{1}{2} - p_G(e_1), \quad p_G(e_2) = p_G(-e_2) = \frac{1}{4}$$

et :

$$p_D(-e_1) = \frac{1}{4} + \varepsilon = \frac{1}{2} - p_D(e_1), \quad p_D(e_2) = p_D(-e_2) = \frac{1}{4}.$$

(p_G présente un fort biais vers la droite, et p_D un léger biais vers la gauche : la situation est *plain nestling*) Vu la contrainte sur ε , on a $\mu \in \mathcal{P}_\kappa$ avec $\kappa = \varepsilon$. La condition (ii) ci-dessus pour le vecteur e_1 s'écrit donc :

$$\lambda \left(\frac{1}{2} - 2\varepsilon \right) > \frac{1}{\varepsilon} (1 - \lambda) 2\varepsilon,$$

et pour tout $\lambda > \frac{1}{2}$ on peut trouver $\varepsilon > 0$ qui convienne (par exemple, $\lambda = 0.8$ et $\varepsilon = 0.1$).

Bien sûr, l'intérêt de ce critère de Kalikow tient avant tout à ses conséquences. Dans l'article [3] de S. Kalikow, celui-ci démontre que, sous l'hypothèse (K)| l , P_0 -p.s., $X_n \cdot l \xrightarrow[n]{n} +\infty$. Puis, A.-S. Sznitman et M. Zerner ont démontré (cf. [10]) que, sous la même hypothèse, on a convergence balistique : il existe $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que, P_0 -p.s., $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{n} v$. L'article [6] d'A.-S. Sznitman, plus récent, et sur lequel se base en partie ce mémoire, introduit la condition (T) et démontre que la marche admet un comportement balistique sous cette condition. La stratégie pour démontrer les résultats mentionnés sur l'hypothèse de Kalikow (bien que ce ne soit pas la plus simple) va donc consister à renvoyer à la section suivante, qui démontre la convergence balistique sous l'hypothèse (T), moyennant la proposition qui suit :

PROPOSITION 22. – Pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a : (K)| $l \Rightarrow$ (T)| l .

DÉMONSTRATION. Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $u \in [-1, 1]$:

$$|e^{-u} - 1 + u| \leq \gamma u^2.$$

Soit U une partie stricte et connexe de \mathbb{Z}^d . En notant $(\mathcal{F}_n)_n$ la filtration usuelle associée au processus canonique $(X_n)_n$ on a, pour tout $x \in U \cup \partial U$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 < \theta < 1$, $\hat{P}_{x,U}$ -p.s. :

$$\hat{E}_{x,U}[e^{-\theta X_{n+1} \cdot l} | \mathcal{F}_n] = e^{-\theta X_n \cdot l} \left(\mathbf{1}_{(X_n \in \partial U)} + \mathbf{1}_{(X_n \in U)} \hat{E}_{X_n, U}[e^{-\theta(X_1 - X_0) \cdot l}] \right)$$

or, pour tout $y \in U$, vu que $\theta(X_1 - X_0) \cdot l \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{y,U}[e^{-\theta(X_1 - X_0) \cdot l}] &\leq 1 - \theta \hat{E}_{y,U}[(X_1 - X_0) \cdot l] + \gamma \theta^2 \hat{E}_{y,U}[(X_1 - X_0) \cdot l]^2 \\ &\leq 1 - \theta \hat{d}_U(y) \cdot l + \gamma \theta^2 \leq 1 - \theta \varepsilon + \gamma \theta^2 \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

en choisissant θ suffisamment petit (fonction uniquement de ε). Pour ce choix de θ , $(M_n)_n = (e^{-\theta X_n \cdot l})_n$ est donc une surmartingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_n$ sous $\hat{P}_{x,U}$. Soit $b, L > 0$. On prend dans ce qui suit $U = U_{l,b,L}$ (on rappelle que $U_{l,b,L} = \{x \cdot l \in [-bL, L]\} \cap \mathbb{Z}^d$). T_U est fini $\hat{P}_{0,U}$ -p.s. (par exemple en remarquant que

$\widehat{P}_U(x, x + e) \geq \kappa$ pour tous $x \in U$, $|e| = 1$, et en utilisant le second lemme de Borel-Cantelli), donc le théorème d'arrêt donne :

$$1 = \widehat{E}_{0,U}[M_0] \geq e^{\theta b L} \widehat{P}_{0,U}(X_{T_U} \cdot l < 0) + e^{-\theta L} \widehat{P}_{0,U}(X_{T_U} \cdot l > 0),$$

d'où :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \widehat{P}_{0,U_{l,b,L}}(X_{T_{U_{l,b,L}}} \cdot l < 0) \leq -\theta b < 0.$$

Comme le lemme de Kalikow donne $\widehat{P}_{0,U_{l,b,L}}(X_{T_{U_{l,b,L}}} \cdot l < 0) = P_0(X_{T_{U_{l,b,L}}} \cdot l < 0)$, on en déduit :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln P_0(X_{T_{U_{l,b,L}}} \cdot l < 0) < 0.$$

Vu le corollaire 18, (T)| l est donc vérifiée. \square

4 Balisticité sous la condition (T)

Rappelons que l'on a montré dans la proposition 14 l'existence presque-sûre d'une direction asymptotique sous l'hypothèse (T). On s'apprête à montrer maintenant le résultat qui «justifie» l'introduction de la condition (T) :

THÉORÈME 23. – On suppose $d \geq 2$. Sous la condition (T), on a :

$$P_0\text{-p.s.}, \frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v = \frac{E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}.$$

La marche est alors dite *balistique*.

Au vu de la preuve de la proposition 14, et avec les mêmes notations, il suffit pour montrer ce théorème d'avoir :

$$P_0\text{-p.s.}, \frac{\tau_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n]{} E_0[\tau_1 | D = \infty].$$

En effet, on écrit alors $\frac{X_n}{n} = \frac{X_n}{k_n} \times \frac{k_n}{n}$; le premier facteur converge vers $E_0[X_{\tau_1} | D = \infty]$ (voir la preuve de la proposition 14), et pour le second on a : $\frac{\tau_{k_n}}{k_n} \leq \frac{n}{k_n} < \frac{\tau_{k_n+1}}{k_n} \sim_n \frac{\tau_{k_n+1}}{k_n+1}$.

Comme $k_n \xrightarrow[n]{} \infty$, il suffit donc via la loi forte des grands nombres et la structure de renouvellement de montrer que :

$$E_0[\tau_1 | D = \infty] < \infty.$$

Bien sûr, montrer que τ_1 est intégrable sous P_0 suffit aussi *a fortiori*, et la balisticité repose donc sur la décroissance de la queue de la distribution de τ_1 sous P_0 . Notons que si la double condition $P_0(X_n \cdot l = \infty) = 1$ et $E_0[\tau_1 | D = \infty] < \infty$ assure certes la balisticité de façon très simple, elle est toutefois moins naturelle que l'hypothèse (T) telle qu'exprimée de façon équivalente dans le corollaire 18.

Avant de traiter le cas général sous l'hypothèse (T), on s'intéresse à deux cas plus simples.

4.1 Cas *non-nestling* et *marginal nestling*

On commence par rappeler une inégalité très utile :

LEMME 24. – INÉGALITÉ D'AZUMA

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n, P)$ un espace de probabilités muni d'une filtration, et $(M_n)_n$ une martingale sur cet espace vérifiant, pour tout n , $|M_{n+1} - M_n| \leq a$ pour une constante $a > 0$. Pour tous $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(M_n > \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2a^2 n}\right).$$

Cas non-nestling. ($d \geq 1$) Il existe alors $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\eta > 0$ tels que, \mathbb{P} -p.s., $d(0, \omega) \cdot l = E_{0, \omega}[X_1 - X_0] \cdot l > \eta$. Cette hypothèse implique l'hypothèse de Kalikow (K)| l , et donc (T)| l .

THÉORÈME 25. – Dans ce cas, la queue de la distribution de τ_1 est exponentielle :

$$-\infty < \liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0(\tau_1 > u) \leq \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

DÉMONSTRATION. La minoration résulte immédiatement de l'ellipticité : pour u entier pair,

$$P_0(\tau_1 > u) \geq P_0(X_u = 0) \geq \kappa^u.$$

Pour la majoration, on écrit, pour tout $c > 0$:

$$\begin{aligned} P_0(\tau_1 > u) &\leq P_0(\tau_1 > u, T_{B_{cu}} \leq u) + P_0(T_{B_{cu}} > u) \\ &\leq P_0(X_{\tau_1}^* \geq cu) + P_0(T_{B_{cu}} > u). \end{aligned}$$

Le premier terme décroît exponentiellement par l'hypothèse (T). Pour le second, on a, \mathbb{P} -p.s. :

$$P_{0, \omega}(T_{B_{cu}} > u) \leq P_{0, \omega}(X_{[u]} \cdot l < cu) \leq P_{0, \omega}(M_{[u]} \cdot l < cu - \eta[u]),$$

avec $M_n = X_n - \sum_{0 \leq k \leq n-1} d(X_k, \omega)$, grâce à l'hypothèse *non-nestling*. $(M_n)_n$ est une martingale sous $P_{0, \omega}$ dont les accroissements sont majorés par 2, donc l'inégalité d'Azuma fournit, en prenant $c = \frac{\eta}{2}$:

$$P_{0, \omega}(T_{B_{\frac{\eta}{2}u}} > u) \leq P_{0, \omega}(M_{[u]} \cdot l < -\frac{\eta}{3}u) \leq \exp\left(-\frac{(\eta/3)^2}{8}u\right).$$

□

En particulier, dans ce cas, la variable τ_1 est exponentiellement intégrable : il existe $c > 0$ tel que $E_0[e^{c\tau_1}] < \infty$.

Cas marginal nestling. Ici, il existe $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que, \mathbb{P} -p.s., $d(0, \omega) \cdot l = E_{0, \omega}[X_1 - X_0] \cdot l \geq 0$.

THÉORÈME 26. – Dans ce cas,

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{1/3}} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

DÉMONSTRATION. On a, pour tout $L(u) > 0$ avec $L(u) \rightarrow_{u \rightarrow \infty} \infty$:

$$\begin{aligned} P_0(\tau_1 > u) &\leq P_0(\tau_1 > u, T_{C_{L(u)}} \leq u) + P_0(T_{C_{L(u)}} > u) \\ &\leq P_0(X_{\tau_1}^* \geq L(u)) + P_0(T_{C_{L(u)}} > u). \end{aligned}$$

Le premier terme décroît au moins comme $\exp(-cL(u))$ par l'hypothèse (T). Il reste donc à majorer $P_0(T_{C_{L(u)}} > u)$ et à fixer la valeur de $L(u)$. En notant $U_L = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid |y \cdot l| \leq L\}$, on a $T_{C_{L(u)}} \geq T_{U_{L(u)}}$, donc il suffit de s'intéresser à la queue de la distribution de $T_{U_{L(u)}}$. Or, au cours de la preuve du théorème 3 (cas *marginal nestling*), on a montré que, pour $c' > 0$ suffisamment petit, pour tout $L \geq 1$,

$$\mathbb{P}\text{-p.s.}, E_{0, \omega}[e^{\frac{c'}{L^2}} T_{U_L}] \leq 2.$$

En somme, on obtient la majoration :

$$P_0(T_{U_{L(u)}} \geq u) \leq e^{-\frac{c'}{L(u)^2}u} E_0[e^{\frac{c'}{L(u)^2} T_{U_{L(u)}}}] \leq 2e^{-\frac{c'}{L(u)^2}u}.$$

Compte-tenu de la majoration initiale, le choix optimal pour $L(u) = u^\alpha$ est $\alpha = 1/3$ (on cherche à maximiser $L(u) \wedge \frac{u}{L(u)^2}$), et ce choix donne le théorème. □

4.2 Cas général

Après les paragraphes précédents, on s'intéresse maintenant essentiellement au cas *plain nestling* (toujours sous la condition (T)), qui est bien sûr le plus délicat : dans les cas précédents, il existait une direction l vers laquelle la marche présentait un biais \mathbb{P} -p.s. ($\mathbb{P}(d(0, \omega) \cdot l > 0) = 1$), et la balisticité était donc assez naturelle, tandis que dans la situation *plain nestling*, pour tout vecteur $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, la marche présente avec probabilité > 0 un biais dans la direction l , mais également dans la direction $-l$. C'est cette situation qui fait la nouveauté et la complexité des marches aléatoires en milieu aléatoire. Comme expliqué plus haut, il va s'agir à nouveau d'estimer la vitesse de décroissance de la queue de la distribution de τ_1 . Plus précisément, on va montrer :

THÉORÈME 27. – On suppose $d \geq 2$. Sous la condition (T), on a, pour tout $\alpha < 1 + \frac{d-1}{d+1}$,

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\alpha} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

Voyons que ceci suffit : on choisit $1 < \alpha < \frac{d-1}{d+1}$ ($d \geq 2$), de sorte qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que, pour u assez grand, $P_0(\tau_1 > u) < \exp(-\mu(\ln u)^\alpha)$. Comme

$$E_0[\tau_1] = \int_0^\infty P_0(\tau_1 > u) du,$$

et que $u \mapsto \exp(-\mu(\ln u)^\alpha)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (pour $u \geq u_0$, $e^{-\mu(\ln u)^\alpha} \leq e^{-\mu(\ln u)(\ln u_0)^{\alpha-1}} = u^{-\mu(\ln u_0)^{\alpha-1}}$ et $\mu(\ln u_0)^{\alpha-1} > 1$ en prenant u_0 assez grand, car $\alpha > 1$), on a bien $E_0[\tau_1] < \infty$.

L'idée importante pour démontrer ce dernier théorème est de se ramener à étudier des probabilités relatives au côté par lequel la marche sort de certaines bandes. Plus généralement, on va s'intéresser à des probabilités pour la marche de sortir de certains ensembles par certaines parties de leur frontière. La proposition 16 est déjà un premier exemple dans ce sens.

Entamons donc la preuve du théorème annoncé. On se ramène d'abord à des probabilités relatives à la distribution de sortie de certaines bandes. On définit, pour $\beta \in (0, 1]$ et $L > 0$, la bande :

$$U_{\beta, L} = \{x \in \mathbb{Z}^d \mid x \cdot l \in (-L^\beta, L)\}.$$

PROPOSITION 28. – On suppose (T). Si $\beta \in (0, 1]$ est tel que, pour tout $c > 0$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \mathbb{P} \left(P_{0, \omega} \left(X_{T_{U_{\beta, L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-cL^\beta} \right) < 0,$$

alors :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^{1/\beta}} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

REMARQUE. Il suffit de vérifier l'hypothèse pour c au voisinage de 0.

DÉMONSTRATION. Soit $\beta \in (0, 1]$ vérifiant l'hypothèse. Pour $L > 0$, on définit $C_L = (-L/2, L/2)^d$. Pour toute fonction $u \mapsto L(u) > 0$ qui diverge vers $+\infty$ lorsque u tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} P_0(\tau_1 > u) &\leq P_0(\tau_1 > u, \tau_1 > T_{C_{L(u)}}) + P_0(\tau_1 > u, \tau_1 \leq T_{C_{L(u)}}) \\ &\leq P_0(\tau_1 > T_{C_{L(u)}}) + P_0(T_{C_{L(u)}} > u). \end{aligned}$$

Sur $\{\tau_1 > T_{C_{L(u)}}\}$, on a : $X_{\tau_1}^* = \sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n| > L(u)/2$, donc :

$$P_0(\tau_1 > T_{C_{L(u)}}) \leq P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_n| > \frac{L(u)}{2} \right) \leq e^{-c \frac{L(u)}{2}} E_0[e^{cX_{\tau_1}^*}],$$

d'où par l'hypothèse (T) :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{L(u)} \ln P_0(\tau_1 > T_{C_{L(u)}}) \leq -\frac{c}{2} < 0.$$

Passons au second terme, pour lequel va intervenir l'hypothèse sur β . On note $\alpha = 1/\beta$. On prend désormais $L(u) = \Delta(u)^\alpha$ avec $\Delta(u) = \delta \ln u$, δ étant un réel > 0 petit à préciser. On a donc $L(u)^\beta = \Delta(u)$. On a :

$$\begin{aligned} P_0(T_{C_{L(u)}} > u) &\leq \mathbb{E} \left[P_{0,\omega}(T_{C_{L(u)}} > u), \text{ pour tout } x \in C_{L(u)}, P_{x,\omega} \left(T_{C_{L(u)}} > \frac{u}{(\ln u)^\alpha} \right) < \frac{1}{2} \right] \\ &+ \mathbb{P} \left(\text{il existe } x \in C_{L(u)} \text{ tel que } P_{x,\omega} \left(T_{C_{L(u)}} > \frac{u}{(\ln u)^\alpha} \right) \geq \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Par applications successives de la propriété de Markov (sous $P_{0,\omega}$) aux temps $\left\lfloor k \frac{u}{(\ln u)^\alpha} \right\rfloor$, $k = 0, \dots, \lfloor (\ln u)^\alpha \rfloor - 1$, le premier terme est majoré par $\left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor (\ln u)^\alpha \rfloor}$. On va montrer que, sous l'événement du second terme, il existe un point $x_1 \in C_{L(u)}$ pour lequel l'événement apparaissant dans l'hypothèse sur β est réalisé, avec $L(u)$ au lieu de L .

Si $x \in C_{L(u)}$ est tel que $P_{x,\omega}(T_{C_{L(u)}} > \frac{u}{(\ln u)^\alpha}) \geq \frac{1}{2}$, alors $E_{x,\omega}[T_{C_{L(u)}}] \geq \frac{u}{2(\ln u)^\alpha}$. Or :

$$\begin{aligned} E_{x,\omega}[T_{C_{L(u)}}] &= \sum_{x_0 \in C_{L(u)}} E_{x,\omega}[\text{temps passé par } (X_n)_n \text{ en } x_0 \text{ avant de quitter } C_{L(u)}] \\ &= \sum_{x_0 \in C_{L(u)}} \frac{P_{x,\omega}(H_{x_0} < T_{C_{L(u)}})}{P_{x_0,\omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}})} \\ &\leq \frac{|C_{L(u)}|}{\min_{x_0 \in C_{L(u)}} P_{x_0,\omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}})}. \end{aligned}$$

Ainsi on a la majoration suivante du second terme :

$$\mathbb{P} \left(\exists x \in C_{L(u)}, P_{x,\omega} \left(T_{C_{L(u)}} \leq \frac{u}{(\ln u)^\alpha} \right) < \frac{1}{2} \right) \leq \mathbb{P} \left(\exists x_0 \in C_{L(u)}, P_{x_0,\omega}(\tilde{H}_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq \frac{2|C_{L(u)}|(\ln u)^\alpha}{u} \right).$$

Sur ce dernier événement, on a, pour tout $x \neq x_0$ avec $\|x - x_0\| \leq \frac{1}{3} \frac{\ln u}{\ln(1/\kappa)}$ (norme l^1 , qui correspond à la distance sur le graphe), par Markov fort en H_x et par l'ellipticité :

$$\begin{aligned} P_{x_0,\omega}(T_{C_{L(u)}} < \tilde{H}_{x_0}) &\geq E_{x_0,\omega} [H_x < T_{C_{L(u)}}, P_{X_{H_x},\omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0})] \\ &\geq \kappa^{\|x-x_0\|} P_{x,\omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0}) \geq \frac{1}{u^{1/3}} P_{x,\omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0}), \end{aligned}$$

d'où :

$$P_{x,\omega}(T_{C_{L(u)}} < H_{x_0}) \leq \frac{2u^{1/3}(\ln u)^\alpha}{u} |C_{L(u)}| \leq \frac{2(\ln u)^\alpha}{u^{2/3}} (2L(u) + 1)^d \leq \frac{1}{\sqrt{u}} = e^{-\frac{1}{2\delta} L(u)^\beta}$$

pour u assez grand, puisque $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ et $L(u) = \delta^\alpha (\ln u)^\alpha$. Alors, toujours sur cet événement, en notant x un point de \mathbb{Z}^d au plus proche de $x_0 + 2\Delta(u)l$ (pour $|\cdot|$), ce point vérifie :

$$0 < \|x - x_0\| \leq \sqrt{d}(2\Delta(u) + \sqrt{d}) \leq \frac{1}{3} \frac{\ln u}{\ln(1/\kappa)}$$

dès que $\Delta(u) \leq \frac{1}{6\sqrt{d}} \frac{\ln u}{\ln(1/\kappa)} - \sqrt{d}$, c'est à dire pour u grand en choisissant $\delta < (7\sqrt{d} \ln(1/\kappa))^{-1}$, d'où pour u grand :

$$P_{x,\omega}(H_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq e^{-\frac{1}{2\delta} L(u)^\beta}.$$

Or ce point x a été choisi de sorte que : $x \in C_{L(u)}$ (sinon, la probabilité ci-dessus serait égale à 1) et $(x_0 - x) \cdot l < -\Delta(u) = -L(u)^\beta$ donc (voir figure 5) si la marche issue de x sort de la bande $x + U_{\beta, L(u)}$

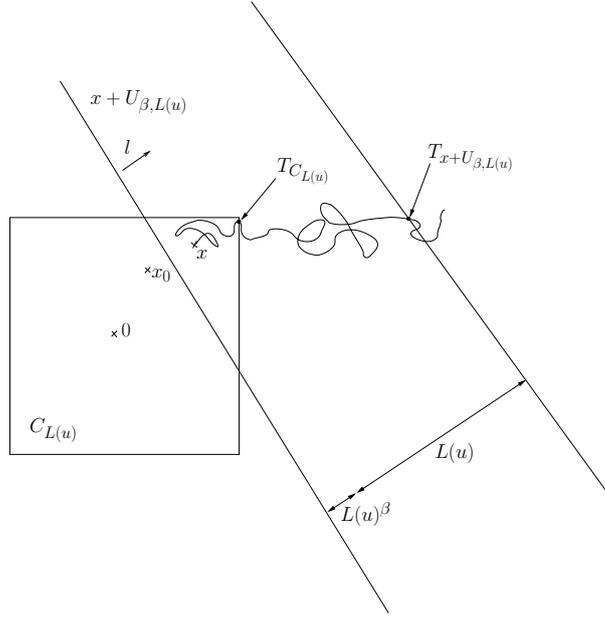


FIG. 5 – Illustration de la preuve de la proposition 28

par le côté dans la direction l , alors elle quitte $C_{L(u)}$ avant de rencontrer x_0 . Ainsi, toujours sur l'événement précédent :

$$P_{x,\omega} \left(X_{T_{x+U_{\beta,L(u)}}} \cdot l > 0 \right) \leq P_x(H_{x_0} > T_{C_{L(u)}}) \leq e^{-\frac{1}{2\delta}L(u)^\beta}.$$

En définitive, on a donc :

$$\begin{aligned} P_0(T_{C_{L(u)}} > u) &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \ln u \rfloor} + \mathbb{P} \left(\exists x \in C_{L(u)}, P_{x,\omega}(X_{T_{x+U_{\beta,L(u)}}} \cdot l > 0) \leq e^{-\frac{1}{2\delta}L(u)^\beta} \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \ln u \rfloor} + \sum_{x \in C_{L(u)}} \mathbb{P} \left(P_{x,\omega}(X_{T_{x+U_{\beta,L(u)}}} \cdot l > 0) \leq e^{-\frac{1}{2\delta}L(u)^\beta} \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor \ln u \rfloor} + |C_{L(u)}| \mathbb{P} \left(P_{0,\omega}(X_{T_{U_{\beta,L(u)}}} \cdot l > 0) \leq e^{-\frac{1}{2\delta}L(u)^\beta} \right) \end{aligned}$$

en utilisant l'invariance de \mathbb{P} par translation à la dernière ligne. A l'aide de l'hypothèse sur β , on a donc :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\alpha} \ln P_0(T_{C_{L(u)}} > u) < 0,$$

ce qui conclut cette démonstration (en utilisant le «lemme sympa»). \square

Pour $w \in \mathbb{R}^d, \beta > 0, L > 0$, on définit les boîtes :

$$B_{1,\beta,L}(w) = \mathbb{Z}^d \cap \widehat{R}(w + [0, L] \times [0, L^\beta]^{d-1})$$

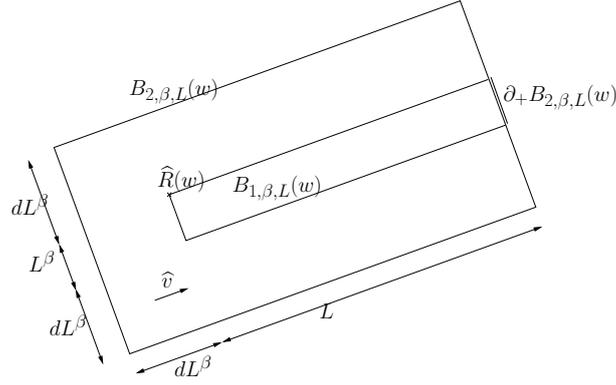
et

$$B_{2,\beta,L}(w) = \mathbb{Z}^d \cap \widehat{R}(w + (-dL^\beta, L] \times (-dL^\beta, (d+1)L^\beta)^{d-1}),$$

(on a donc $B_{1,\beta,L}(w) \subset B_{2,\beta,L}(w)$) ainsi qu'une partie du «dessus» de $B_{2,\beta,L}$:

$$\partial_+ B_{2,\beta,L}(w) = \partial B_{2,\beta,L}(w) \cap B_{1,\beta,L}(w + Le_1)$$

(où \widehat{R} est une rotation telle que $\widehat{R}(e_1) = \widehat{v}$).



Expliquons d'abord sommairement à quoi toutes ces boîtes sont destinées.

Ces boîtes sont orientées dans le sens de \hat{v} , la direction asymptotique. Au vu de la propriété de convergence balistique que l'on cherche à démontrer, on s'attend donc à ce que la probabilité pour la marche issue d'un point de $B_{1,\beta,L}(w)$ de sortir de $B_{2,\beta,L}(w)$ par $\partial_+ B_{2,\beta,L}(w)$ converge rapidement vers 1 lorsque $L \rightarrow \infty$. Comme on va «empiler» des boîtes de type $B_{2,\beta,L}$ (plus exactement les boîtes $B_{1,\beta,L}$ correspondantes, voir la figure 6) et s'intéresser à la probabilité d'en traverser un certain nombre d'affilée (jusqu'à s'échapper d'une certaine bande), on aura besoin d'un contrôle *uniforme* de la probabilité de sortir de $B_{2,\beta,L}$ par $\partial_+ B_{2,\beta,L}$ à partir de n'importe lequel des points d'arrivée dans la boîte possibles. C'est là que l'intérêt de $\partial_+ B_{2,\beta,L}$ (au lieu de toute la face supérieure) apparaît : si la marche sort d'une boîte par $\partial_+ B_{2,\beta,L}$, elle entre dans la suivante par un point de la boîte $B_{1,\beta,L}$ suivante, de sorte que la probabilité de sortir par le dessus de la nouvelle boîte peut se minorer uniformément (on s'est réservé une marge entre B_1 et le bord de B_2).

Il apparaît donc judicieux d'introduire la variable aléatoire :

$$X_{\beta,L}(w) = -\ln \inf_{x \in B_{1,\beta,L}(w)} P_{x,\omega} \left(X_{T_{B_{2,\beta,L}(w)}} \in \partial_+ B_{2,\beta,L}(w) \right),$$

de laquelle dépend ce contrôle uniforme.

On pourrait imaginer restreindre la borne inférieure à la face inférieure de B_1 , puisque c'est de là que débute la marche dès la deuxième boîte. Cependant, ceci ne changerait rien puisque c'est précisément sur la face inférieure que les probabilités de sortie par $\partial_+ B_{2,\beta,L}$ sont les plus faibles.

Contrôler la queue de la distribution de ces variables permet, en «empilant» des boîtes, d'en déduire des estimées sur la distribution de sortie des bandes $U_{\beta,L}$ (on remarque que les boîtes sont proportionnées comme les bandes : L^β d'un côté, L de l'autre) :

PROPOSITION 29. – Soit $\beta \in (0, 1]$ et $\zeta > 0$ tels que, pour tout $\rho > 0$:

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P} \left(X_{\beta,L}(w) \geq \rho L^\beta \right) < 0.$$

Alors, pour tout $\rho > 0$:

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \ln \mathbb{P} \left(P_{0,\omega} \left(X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-\rho L^\beta} \right) < 0.$$

REMARQUE. Au sujet de l'utilisation de $\sup_{w \in \mathbb{R}^d}$: à cause de la disposition de \mathbb{Z}^d par rapport aux boîtes, on ne peut pas exactement utiliser l'invariance de \mathbb{P} par translation pour dire que $\mathbb{P} \left(X_{\beta,L}(w) \geq \rho L^\beta \right)$ ne dépend pas de w . Cependant, pour L grand, la dépendance en w est tout de même mineure, et on ne perd pas beaucoup en demandant une majoration de la borne supérieure lorsque w parcourt \mathbb{R}^d .

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda > 0$. On considère les boîtes $B_{1,\beta,\lambda L}(j\lambda L e_1) \subset B_{2,\beta,\lambda L}(j\lambda L e_1)$ pour $j = 0, \dots, N$, où N est le plus petit entier tel que $N\lambda L \hat{v} \cdot l > L$ (c'est à dire tel que $\frac{1}{N} < \lambda \hat{v} \cdot l$), de sorte (voir figure 6

page 53) qu'en choisissant λ assez petit, si la marche issue de 0 traverse successivement chacune des boîtes $B_{2,\beta,\lambda L}(j\lambda L e_1)$, $j = 0, \dots, N-1$, elle finit par traverser l'hyperplan $\{x \cdot l = L\}$, et ce avant d'avoir traversé l'hyperplan $\{x \cdot l = -L^\beta\}$ puisque les boîtes sont incluses dans $\{x \cdot l > -L^\beta\}$: pour tout $x \in B_{1,\beta,\lambda L}(0)$,

$$x \cdot l \geq -d(\lambda L)^\beta - (d+1)(\lambda L)^\beta > -L^\beta$$

pour tout L et pour λ choisi petit (ne dépendant que de d). Par suite, en utilisant la propriété de Markov forte aux instants de sortie successifs des boîtes :

$$P_{0,\omega} \left(X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0 \right) \geq \exp \left(- \sum_{j=0}^N X_{\beta,\lambda L}(j\lambda L e_1) \right),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(P_{0,\omega} \left(X_{T_{U_{\beta,L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-\rho L^\beta} \right) &\leq \mathbb{P} \left(\sum_{j=0}^N X_{\beta,\lambda L}(j\lambda L e_1) > \rho L^\beta \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\text{il existe } 0 \leq j \leq N \text{ tel que } X_{\beta,\lambda L}(j\lambda L e_1) > \frac{\rho L^\beta}{N+1} \right) \\ &\leq (N+1) \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P} \left(X_{\beta,\lambda L}(w) > \frac{\rho L^\beta}{N+1} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion. \square

Après avoir réduit plusieurs fois le problème, montrons maintenant une première majoration du type de celle de la proposition précédente.

PROPOSITION 30. – On suppose (T). Soit $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$ Pour tous $\rho > 0, \beta \in [\beta_0, 1]$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{\beta+\beta_0-1}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P} (X_{\beta_0,L}(w) \geq \rho L^\beta) < 0.$$

DÉMONSTRATION. A la différence du cas des cylindres considérés précédemment, on ne s'intéresse ici à la sortie de $B_{2,\beta,L}$ que par une partie de la face supérieure (pour les raisons expliquées plus haut), ce qui complique l'estimation de la probabilité de cet événement. La stratégie adoptée dans cette preuve consiste à se ramener à des boîtes plus petites pour lesquelles on autorise la sortie par toute la face supérieure, quitte à admettre un terme correctif permettant de ramener la marche au bon endroit à sa sortie. Ces nouvelles boîtes sont empilées à l'intérieur de la boîte $B_{2,\beta,L}$.

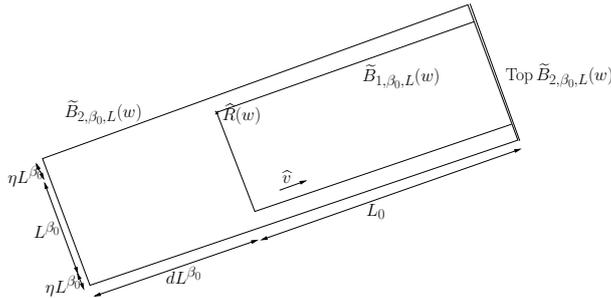
Définissons ces nouvelles boîtes :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w) &= \mathbb{Z}^d \cap \hat{R}(w + [0, L_0] \times [0, L^{\beta_0}]^{d-1}) \\ \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) &= \mathbb{Z}^d \cap \hat{R}(w + (-dL^{\beta_0}, L_0] \times (-\eta L^{\beta_0}, (1+\eta)L^{\beta_0})^{d-1}) \end{aligned}$$

et :

$$\text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) = \partial \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \cap \{x \mid x \cdot \hat{v} > \hat{R}(w) \cdot \hat{v} + L_0\},$$

où $\eta > 0$ (petit) et où $L_0 \sim_{L \rightarrow \infty} L^\chi$, $\chi > 0$ à définir.



Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\text{il existe } x \in \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w) \text{ tel que } P_{x,\omega} \left(X_{T_{\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w)}} \notin \text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \right) \geq \delta \right) \\ \leq \sum_{x \in \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w)} \mathbb{P} \left(P_{x,\omega} \left(X_{T_{\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w)}} \notin \text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \right) \geq \delta \right) \\ \leq \sum_{x \in \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w)} \frac{1}{\delta} P_x \left(X_{T_{\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w)}} \notin \text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \right) \end{aligned}$$

et, pour tout $x \in \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w)$,

$$\begin{aligned} P_x \left(X_{T_{\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w)}} \notin \text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \right) &\leq P_x(\text{sortie par une face latérale}) + P_x(\text{sortie par le fond}) \\ &\leq P_0 \left(\sup_{n \leq T_{L_0}^{\tilde{v}}} |\pi(X_n)| \geq \eta L^{\beta_0} \right) + P_0(\tilde{T}_{-dL^{\beta_0}}^{\tilde{v}} < \infty) \end{aligned}$$

en utilisant l'invariance de \mathbb{P} par translation. Or, d'une part,

$$P_0(\tilde{T}_{-dL^{\beta_0}}^{\tilde{v}} < \infty) \leq P_0(X_{\tau_1}^* > dL^{\beta_0}) \leq \exp(-cdL^{\beta_0}) E_0[\exp(cX_{\tau_1}^*)],$$

et d'autre part, comme $L^{\beta_0} \sim_{L \rightarrow \infty} L_0^{\beta_0/\chi}$, $T_{L_0}^{\tilde{v}} \leq L_{L_0}^{\tilde{v}}$, et $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$, le lemme 15 montre qu'il existe $\mu > 0$ tel que, pour L grand :

$$P_0 \left(\sup_{n \leq T_{L_0}^{\tilde{v}}} |\pi(X_n)| \geq \eta L^{\beta_0} \right) \leq \exp(-2\mu L_0^{2(\beta_0/\chi)-1}) < \exp(-\mu L^{2\beta_0-\chi}).$$

Ainsi, comme $|\tilde{B}_{1,\beta_0,L}|$, est polynomial en L , on a :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{(2\beta_0-\chi) \wedge \beta_0}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P} \left(\text{il existe } x \in \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w) \text{ tel que } P_{x,\omega} \left(X_{T_{\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w)}} \notin \text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \right) \geq \delta \right) < 0.$$

Disons qu'une boîte $\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w)$ est «mauvaise» si l'événement ci-dessus est satisfait avec $\delta = 1/2$ (choix arbitraire), et «bonne» sinon. Sur une «bonne» boîte, on dispose donc d'une minoration uniforme de la probabilité de sortir par $\text{Top } \tilde{B}_2$.

Revenons à la boîte $B_{2,\beta_0,L}$. Soit $\rho > 0$. On cherche à majorer, uniformément en $w \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}(\text{il existe } x \in B_{1,\beta_0,L}(w) \text{ tel que } P_{x,\omega}(X_{T_{B_{2,\beta_0,L}(w)}}) \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)) \leq e^{-\rho L^\beta}$$

(c'est une réécriture de la probabilité de l'énoncé). Considérons les boîtes $\tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w + jL_0e_1)$, $j = 0, \dots, N-1$ où $N = \lfloor L^{1-\chi} \rfloor$. On prend $L_0 = \frac{L-\eta L^{\beta_0}}{N} \sim_{L \rightarrow \infty} L^\chi$. Ainsi, pour tout $x \in B_{1,\beta_0,L}(w)$, il existe $0 \leq j_0 \leq N$ tel que $x \in \tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w + j_0L_0e_1)$, et une manière en partant de x de sortir de $B_{2,\beta_0,L}(w)$ par $\partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)$ consiste à successivement sortir des boîtes $\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w + jL_0e_1)$, $j = j_0, \dots, N-1$ à travers $\text{Top } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w + jL_0e_1)$ et au besoin se ramener à $\tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w + (j+1)L_0e_1)$ selon un chemin fixé (de longueur $\leq \sqrt{d}\eta L^{\beta_0}$), jusqu'à finalement atteindre $\tilde{B}_{1,\beta_0,L}(w + NL_0e_1) \cap B_{1,\beta_0,L}(w)$ et suivre alors un chemin fixé (de longueur $\leq \sqrt{d}\eta L^{\beta_0}$ car $L - NL_0 = \eta L^{\beta_0}$) pour sortir de $B_{2,\beta_0,L}(w)$ par $\partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)$ (voir figure 7 page 53). Ainsi, par la propriété de Markov forte appliquée successivement aux instants de sortie des boîtes, *si chacune des boîtes $\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w + jL_0e_1)$, $j = 0, \dots, N-1$, est «bonne»* (définition ci-dessus), alors, pour tout $x \in B_{1,\beta_0,L}$:

$$P_{x,\omega} \left(X_{T_{B_{2,\beta_0,L}(w)}} \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w) \right) \geq \left(\frac{1}{2} \kappa \sqrt{d} \eta L^{\beta_0} \right)^N \kappa \sqrt{d} \eta L^{\beta_0} > e^{-\rho L^{\beta_0+(1-\chi)}}$$

pour L suffisamment grand, et en choisissant η suffisamment petit. En prenant χ tel que $\beta_0 + (1 - \chi) = \beta$, c'est à dire $\chi = \beta_0 + 1 - \beta$, il apparaît donc que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{il existe } x \in B_{1,\beta_0,L}(w) \text{ tel que } P_{x,\omega}(X_{T_{B_{2,\beta_0,L}(w)}}) \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)) \leq e^{-\rho L^\beta}) \\ & \leq \mathbb{P}(\text{l'une des boîtes } \tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w + jL_0 e_1), j = 0, \dots, N-1 \text{ est «mauvaise»}) \\ & \leq N \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\tilde{B}_{2,\beta_0,L}(w) \text{ est «mauvaise»}) \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le résultat montré au début de la démonstration : par le choix de χ , on a ici $2\beta_0 - \chi = \beta_0 + \beta - 1 \leq \beta_0$, et $N = \lfloor L^{1-\chi} \rfloor$ est polynomial en L , donc finalement :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{\beta_0 + \beta - 1}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(\text{il existe } x \in B_{1,\beta_0,L}(w) \text{ tel que } P_{x,\omega}(X_{T_{B_{2,\beta_0,L}(w)}}) \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L}(w)) \leq e^{-\rho L^\beta} < 0,$$

comme annoncé. \square

Voyons ce que fournit ce résultat relativement à la queue de la distribution de τ_1 en utilisant les propositions précédentes. En prenant $\beta = \beta_0 = 1$ dans la proposition 30 (ce qui donne le meilleur résultat quand on veut utiliser directement la proposition précédente), et en appliquant les propositions 29 et 28, on obtient :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln u} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

(remarque : dans ce cas, $\chi = 1$, $N = 1$: il y a une seule boîte dans la preuve de la proposition 30).

Cependant, cette estimée *ne suffit pas* à conclure à l'intégrabilité de τ_1 . Ceci était prévisible. En effet, on a vu au paragraphe 3.4 qu'en dimension 1 la propriété (T) équivaut à la transience dans la direction l , ce qui ne garantit pas la balisticité (on peut avoir $X_n \rightarrow \infty$ et $X_n/n \rightarrow 0$, voir le théorème 1). Or les propositions précédentes n'exploitent aucunement le fait que la dimension est ≥ 2 : essentiellement, les boîtes ne sont empilées que dans une seule direction, et les estimées relatives à une seule boîte valent aussi en dimension 1. On ne pouvait donc pas espérer montrer la balisticité de la marche de cette manière. Le lemme suivant va pallier à ces insuffisances en tirant parti de la «multidimensionnalité» pour améliorer les majorations précédentes, essentiellement en choisissant un chemin entre deux points parmi plusieurs, choix qui n'existe pas en dimension 1 :

LEMME 31. – DE RENORMALISATION

On suppose (T), et $d \geq 2$. Soit $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$. On suppose que, pour tous $\beta \in [\beta_0, 1)$ et $\zeta < \beta + \beta_0 - 1$, pour tout $\rho > 0$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P}(X_{\beta_0,L}(w) \geq \rho L^\beta) < 0.$$

Alors, en notant f_{β_0} l'interpolée linéaire entre les valeurs $2\beta_0 - 1$ en β_0 et d en 1, pour tous $\beta \in [\beta_0, 1)$ et $\zeta < f_{\beta_0}(\beta)$, on a, pour tout $\rho > 0$:

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P}(X_{\beta,L}(w) \geq \rho L^\beta) < 0.$$

DÉMONSTRATION. Pour $\beta = \beta_0$, il n'y a rien à montrer (la majoration est contenue dans l'hypothèse). On peut donc supposer $\beta \in (\beta_0, 1)$.

Cette fois-ci, on fait *plusieurs* «colonnes» de boîtes. Pour utiliser l'hypothèse, les petites boîtes seront de type $B_{1,\beta_0}(\cdot)$, dans une grande boîte $B_{1,\beta,L}(w)$.

Notons $\chi \in (0, 1)$ tel que $\beta = \chi\beta_0 + (1 - \chi)$. Soit $w \in \mathbb{R}^d$. On considère les boîtes (voir figure 8 page 54) :

$$B_{1,\beta_0,L^\chi}(w + z + jL^\chi e_1) \subset B_{2,\beta_0,L^\chi}(w + z + jL^\chi e_1),$$

où $j \in \{0, \dots, J\}$, $J = \lfloor L^{1-\chi} \rfloor$, et $z \in \text{Col}$, avec :

$$\text{Col} = \{0\} \times \left((2d+1)L^{\chi\beta_0}\mathbb{Z} \cap \left[\frac{1}{4}L^\beta, \frac{1}{4}L^\beta \right] \right)^{d-1}.$$

Ainsi, pour L grand, pour tout $x \in B_{1,\beta,L}(w)$, une manière pour la marche issue de x de sortir de $B_{2,\beta,L}(w)$ en passant par $\partial_+ B_{2,\beta,L}(w)$ consiste à d'abord atteindre une boîte $B_{1,\beta_0,L^x}(w + z_0 + j_0 L^x e_1)$, $z_0 \in \text{Col}$, $j_0 \in \{0, \dots, J\}$, puis à quitter successivement chacune des boîtes $B_{2,\beta_0,L^x}(w + z_0 + j L^x e_1)$ pour $j = j_0, \dots, J$, en passant à chaque fois par $\partial_+ B_{2,\beta_0,L^x}(w + z_0 + j L^x e_1)$.

Or, pour L grand, pour tous $x \in B_{1,\beta,L}(w)$ et $z \in \text{Col}$, il existe un chemin de longueur $\leq dL^\beta$ reliant x à un point d'une des boîtes $B_{1,\beta_0,L^x}(w + z + j L^x e_1)$, $j \in \{0, \dots, J\}$, de la colonne z , donc à l'aide de l'ellipticité et de la propriété de Markov (appliquée au temps (déterministe) d'arrivée dans la colonne z , puis aux instants (aléatoires) de sortie des boîtes successives), on a :

$$\begin{aligned} & P_{x,\omega} \left(X_{T_{B_{2,\beta,L}(w)}} \in \partial_+ B_{2,\beta,L}(w) \right) \\ & \geq \kappa^{dL^\beta} \prod_{j=0}^J \inf \left\{ P_{y,\omega} \left(X_{T_{B_{2,\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1)}} \in \partial_+ B_{2,\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1) \right) \mid y \in B_{1,\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1) \right\} \\ & \geq e^{-cL^\beta} \exp \left(- \sum_{j=0}^J X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1) \right), \end{aligned}$$

où on a choisi $c \geq d \ln(1/\kappa)$. Et ceci vaut pour tout $x \in B_{1,\beta,L}(w)$, d'où, pour tout $z \in \text{Col}$:

$$X_{\beta,L}(w) \leq cL^\beta + \sum_{j=0}^J X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1).$$

On peut maintenant faire jouer la concurrence entre les colonnes : pour L grand,

$$\mathbb{P} \left(X_{\beta,L}(w) \geq 3cL^\beta \right) \leq \mathbb{P} \left(\text{pour tout } z \in \text{Col}, \sum_{j=0}^J X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1) \geq 2cL^\beta \right).$$

Il s'agit de majorer cette dernière probabilité en faisant appel à l'hypothèse du lemme. Tout d'abord les variables $\sum_{j=0}^J X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1) \geq 2cL^\beta$, pour $z \in \text{Col}$, sont indépendantes (elles dépendent des probabilités de transition sur des ensembles de sites disjoints), d'où :

$$\mathbb{P} \left(X_{\beta,L}(w) \geq 3cL^\beta \right) \leq \prod_{z \in \text{Col}} \mathbb{P} \left(\sum_{j=0}^J X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1) \geq 2cL^\beta \right).$$

Ensuite, si $z \in \text{Col}$, bien que les variables $X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1)$, pour $j = 0, \dots, J$, ne soient pas indépendantes (les boîtes B_2 successives ne sont pas disjointes), on remarque que, pour L grand, les variables associées aux j pairs (resp. aux j impairs) sont indépendantes dans leur ensemble puisque pour tout j les boîtes $B_{2,\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1)$ et $B_{2,\beta_0,L^x}(w+z+(j+2)L^xe_1)$ sont disjointes (dès que $L^x > dL^{\beta x}$). Notons temporairement Y et Y' respectivement les sommes des termes pairs et impairs. En utilisant l'inégalité de Cramer-Chernoff, et l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour séparer termes pairs et impairs, on obtient, pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(X_{\beta,L}(w) \geq 3cL^\beta \right) & \leq \prod_{z \in \text{Col}} \mathbb{P}(Y + Y' \geq 2cL^\beta) \leq \prod_{z \in \text{Col}} e^{-\lambda cL^\beta} \mathbb{E}[e^{\frac{\lambda}{2}(Y+Y')}] \\ & \leq \prod_{z \in \text{Col}} e^{-\lambda cL^\beta} \mathbb{E}[e^{\lambda Y}]^{1/2} \mathbb{E}[e^{\lambda Y'}]^{1/2} \leq \prod_{z \in \text{Col}} e^{-\lambda cL^\beta} \mathbb{E}[e^{\lambda Y}] \mathbb{E}[e^{\lambda Y'}] \\ & \leq \prod_{z \in \text{Col}} \left(e^{-\lambda cL^\beta} \prod_{j=0}^J \mathbb{E}[e^{\lambda X_{\beta_0,L^x}(w+z+jL^xe_1)}] \right) \\ & \leq \left(e^{-\lambda cL^\beta} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[e^{\lambda X_{\beta_0,L^x}(w)}]^{J+1} \right)^{|\text{Col}|}. \end{aligned}$$

On est ainsi ramené à majorer $\mathbb{E}[e^{\lambda X_{\beta_0, L^\chi}(w)}]$ et à choisir λ convenablement. On a bien sûr $X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq 0$, mais aussi, par l'hypothèse d'ellipticité, puisqu'il existe pour tout $x \in B_{1, \beta_0, L^\chi}(w)$ un chemin sortant de $B_{2, \beta_0, L^\chi}(w)$ par $\partial_+ B_{2, \beta_0, L^\chi}(w)$ de longueur $\leq AL^\chi$ (où $A > 0$ ne dépend que de d), on a $X_{\beta_0, L^\chi}(w) \leq 2A \ln(1/\kappa)L^\chi \leq A'L^\chi$ avec $A' > 1$, et donc :

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[e^{\lambda X_{\beta_0, L^\chi}(w)}] \leq 1 + \int_0^{A'L^\chi} \lambda e^{\lambda u} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq u) du.$$

L'hypothèse du lemme permet de majorer $\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq L^{\chi\alpha})$ lorsque $\beta_0 \leq \alpha \leq 1$. Pour tout $N \geq 1$, en notant $(\beta_0, \dots, \beta_N = 1)$ une subdivision équirépartie du segment $[\beta_0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[e^{\lambda X_{\beta_0, L^\chi}(w)}] &\leq e^{\lambda A' L^{\chi\beta_0}} + \int_{A' L^{\chi\beta_0}}^{A' L^\chi} \lambda e^{\lambda u} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq u) du \\ &\leq e^{\lambda A' L^{\chi\beta_0}} + A' L^\chi \sup_{0 \leq i \leq N} \left(\sup_{A' L^{\chi\beta_i} \leq u \leq A' L^{\chi\beta_{i+1}}} \lambda e^{\lambda u} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq u) \right) \\ &\leq e^{\lambda A' L^{\chi\beta_0}} + A' L^\chi \sup_{0 \leq i \leq N} \lambda e^{\lambda A' L^{\chi\beta_{i+1}}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq A' L^{\chi\beta_i}) \end{aligned}$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, pour $0 \leq i \leq N-1$, si $\zeta = \beta_0 + \beta_i - 1 - \varepsilon$, il existe $\mu_i > 0$ tel que, pour L grand :

$$\lambda e^{\lambda A' L^{\chi\beta_{i+1}}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq A' L^{\chi\beta_i}) \leq \lambda e^{\lambda A' L^{\chi\beta_{i+1} - \mu_i L^{\chi\zeta}}}.$$

On choisit donc $\lambda = L^\alpha$ où α vérifie, pour tout i , $\alpha + \chi\beta_{i+1} < \chi\zeta$, c'est à dire :

$$\alpha < \chi(\beta_0 + \beta_i - 1 - \varepsilon) - \chi\beta_{i+1} = \chi(\beta_0 - 1) - \chi((\beta_{i+1} - \beta_i) + \varepsilon) = \chi(\beta_0 - 1) - \chi\left(\frac{1 - \beta_0}{N} + \varepsilon\right),$$

de sorte que $\alpha = \chi(\beta_0 - 1) - \varepsilon$ convient dès que $\frac{1}{N} < (\frac{1}{\chi} - 1)\varepsilon$; on prend dorénavant cette valeur (avec $\varepsilon > 0$ quelconque, et une valeur de N associée). Par ce choix, on s'est donc assuré que :

$$A' L^\chi \sup_{0 \leq i \leq N} \lambda e^{\lambda A' L^{\chi\beta_{i+1}}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta_0, L^\chi}(w) \geq A' L^{\chi\beta_i}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

et, de plus, $\lambda L^{\chi\beta_0} = L^{\chi(\beta_0 - 1) - \varepsilon + \chi\beta_0} = L^{\chi(2\beta_0 - 1) - \varepsilon} \rightarrow_{L \rightarrow \infty} \infty$ si on choisit $0 < \varepsilon < \chi(2\beta_0 - 1)$ (rappelons que $\beta_0 > 1/2$), d'où, pour L grand :

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}[e^{\lambda X_{\beta_0, L^\chi}(w)}] \leq e^{2\lambda A' L^{\chi\beta_0}},$$

ce qui donne, pour L grand :

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta, L}(w) \geq 3cL^\beta) &\leq \exp(|\text{Col}|(-\lambda cL^\beta + (J+1)2A'\lambda L^{\chi\beta_0})) \\ &\leq \exp\left(-\frac{1}{2}|\text{Col}|\lambda(c - 2A')L^\beta\right) \end{aligned}$$

puisque $JL^{\chi\beta_0} \sim L^{1-\chi}L^{\chi\beta_0} = L^\beta$ par choix initial de χ (on pourrait d'ailleurs retrouver la justification de ce choix en travaillant pour χ *a priori* quelconque). Quitte à choisir c plus grand (ce qui est possible, voir la définition de c plus haut), on peut supposer $c - 2A' > 0$. Comme $|\text{Col}| \sim \left(\frac{L^\beta/2}{(2d+1)L^{\chi\beta_0}}\right)^{d-1} \sim \text{const.} L^{(\beta-\chi\beta_0)(d-1)}$, on a alors démontré : pour tout ε suffisamment petit, donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{\chi(2\beta_0 - 1) + (1-\chi)d - \varepsilon}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P}(X_{\beta, L}(w) \geq 3cL^\beta) < 0$$

(après de petits calculs sur l'exposant déduits de la définition de χ). L'exposant qui apparaît peut aussi s'écrire $f_{\beta_0}(\beta) - \varepsilon$. Déduisons-en la conclusion du lemme. Soit $\zeta < f_{\beta_0}(\beta)$. Soit $\rho > 0$. Par continuité de f_{β_0} ,

on peut choisir $\frac{1}{2} < \beta' < \beta$ suffisamment proche de β pour avoir $\zeta < f_{\beta_0}(\beta')$. On applique alors le résultat obtenu ci-dessus à β' :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P} \left(X_{\beta', L}(w) \geq 3cL^{\beta'} \right) < 0.$$

Or, pour tout L assez grand, $\rho L^\beta > 3cL^{\beta'}$, de sorte que, pour tout $w \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{P}(X_{\beta, L}(w) \geq \rho L^\beta) \leq \mathbb{P}(X_{\beta, L}(w) \geq 3cL^{\beta'}) \leq L^{d-1} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{\beta', L}(w) \geq 3cL^{\beta'}),$$

où il reste à justifier la seconde inégalité. Pour tout $w \in \mathbb{R}^d$, pour tout $w' \in \mathbb{R}^d$ tel que $B_{1, \beta', L}(w') \subset B_{1, \beta, L}(w)$, on a facilement, pour tout $x \in B_{1, \beta', L}(w')$,

$$P_{x, \omega}(X_{T_{B_{2, \beta', L}}}(w') \in \partial_+ B_{2, \beta', L}(w')) \leq P_{x, \omega}(X_{T_{B_{2, \beta, L}}}(w) \in \partial_+ B_{2, \beta, L}(w)).$$

De plus, la boîte $B_{1, \beta, L}(w)$ peut s'écrire comme réunion de (moins de) L^{d-1} boîtes $B_{1, \beta', L}(w_1), \dots, B_{1, \beta', L}(w_{L^{d-1}})$, donc \mathbb{P} -p.s. il existe $w' \in \{w_1, \dots, w_{L^{d-1}}\}$ tel que :

$$\begin{aligned} \inf_{x \in B_{1, \beta, L}(w)} P_{x, \omega}(X_{T_{B_{2, \beta, L}}}(w) \in \partial_+ B_{2, \beta, L}(w)) &= \inf_{x \in B_{1, \beta', L}(w')} P_{x, \omega}(X_{T_{B_{2, \beta, L}}}(w) \in \partial_+ B_{2, \beta, L}(w)) \\ &\leq \inf_{x \in B_{1, \beta', L}(w')} P_{x, \omega}(X_{T_{B_{2, \beta', L}}}(w') \in \partial_+ B_{2, \beta', L}(w')), \end{aligned}$$

ce qui donne : \mathbb{P} -p.s., il existe $w' \in \{w_1, \dots, w_{L^{d-1}}\}$ tel que $X_{\beta, L}(w) \geq X_{\beta', L}(w')$, d'où l'inégalité écrite plus haut. La conclusion du lemme s'en déduit immédiatement. \square

A l'aide de tout ce qui précède, on en déduit :

COROLLAIRE 32. – On suppose (T). Soit $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pour tout $\zeta < d(2\beta - 1)$, on a :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \ln \mathbb{P} \left(P_{0, \omega} \left(X_{T_{U_{\beta, L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-L^\beta} \right) < 0$$

et, pour tout $\alpha < 1 + \frac{d-1}{d+1}$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\alpha} \ln P_0(\tau_1 > u).$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 30, l'hypothèse du lemme précédent est vérifiée pour tout $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$. La conclusion du lemme donne donc : pour tout $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$, pour tout ζ vérifiant $\zeta < f_{\beta_0}(\beta)$ pour un certain $\frac{1}{2} < \beta_0 < \beta$, c'est à dire de façon équivalente pour tout $\zeta < d(2\beta - 1)$ (puisque $\sup_{\frac{1}{2} < \beta_0 < \beta} f_{\beta_0}(\beta) = f_{\frac{1}{2}}(\beta) = d(2\beta - 1)$), on a, pour tout $\rho > 0$:

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\zeta} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P} \left(X_{\beta, L}(w) \geq \rho L^\beta \right) < 0.$$

Le premier point du corollaire se déduit donc de la proposition 29.

Passons au second point. Il suffit de raisonner pour $1 < \alpha < \frac{2d}{d+1}$. Notons $\beta = 1/\alpha$. La contrainte sur α équivaut à $d(2\beta - 1) > 1$ et $\beta < 1$, et implique $\frac{1}{2} < \beta$, donc on peut appliquer le premier point avec $\zeta = 1$. C'est en fait à $\beta' \in (\frac{1}{2}, \beta)$ suffisamment proche de β pour que $d(2\beta' - 1) > 1$ que l'on va appliquer ce premier point, en remarquant que, pour tout $c > 0$, pour L grand :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(P_{0, \omega} \left(X_{T_{U_{\beta, L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-cL^\beta} \right) &\leq \mathbb{P} \left(P_{0, \omega} \left(X_{T_{U_{\beta, L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-L^{\beta'}} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(P_{0, \omega} \left(X_{T_{U_{\beta', L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-L^{\beta'}} \right), \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \mathbb{P} \left(P_{0, \omega} \left(X_{T_{U_{\beta, L}}} \cdot l > 0 \right) \leq e^{-cL^\beta} \right) < 0.$$

Il ne reste plus alors qu'à appliquer la proposition 28 pour conclure. \square

4.3 Grandes déviations

Sous l'hypothèse (T), on a donc, P_0 -p.s., $\frac{X_n}{n} \rightarrow_n v$. On s'intéresse ici à des inégalités de grandes déviations relatives à $\frac{X_n}{n}$. Le théorème suivant met en évidence une distinction entre le comportement asymptotique dans les cas *nestling* et *non-nestling* et, dans ce dernier cas, l'importance jouée par le segment $[0, v] \in \mathbb{R}^d$ qui traduit un phénomène de *ralentissement* de la marche :

THÉORÈME 33. – Pour tout voisinage ouvert \mathcal{O} du segment $[0, v]$, on a :

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln P_0 \left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O} \right) < 0. \quad (*)$$

De plus :

- dans le cas *non-nestling*, cette inégalité (*) reste vraie pour tout voisinage ouvert \mathcal{O} de v ;
- dans le cas *nestling*, pour tout ouvert \mathcal{U} rencontrant $[0, v]$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln P_0 \left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U} \right) = 0,$$

donc (*) n'est plus vérifiée si l'on remplace $[0, v]$ par l'une de ses parties fermées strictes.

DÉMONSTRATION. On suppose (T) vérifiée, donc par le théorème 17 (T) est vérifiée par rapport à $l = \hat{v}$. On définit jusqu'à avis contraire τ_1 relativement à \hat{v} .

- Soit \mathcal{O} un voisinage ouvert du segment $[0, v]$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\text{Cyl}_{\varepsilon, |v|+\varepsilon, \varepsilon} \subset \mathcal{O}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} P_0 \left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O} \right) &\leq P_0 (X_n \notin \text{Cyl}_{\varepsilon, |v|+\varepsilon, \varepsilon}^n) \\ &\leq P_0 (T_{(|v|+\varepsilon)n}^{\hat{v}} \leq n) + P_0 (T_{\text{Cyl}_{\varepsilon, |v|+\varepsilon, \varepsilon}^n} < T_{(|v|+\varepsilon)n}^{\hat{v}}). \end{aligned}$$

Comme la proposition 16 montre que $\limsup_n \frac{1}{n} \ln P_0 (T_{\text{Cyl}_{\varepsilon, |v|+\varepsilon, \varepsilon}^n} < T_{(|v|+\varepsilon)n}^{\hat{v}}) < 0$, il suffit de s'occuper du premier terme. On se ramène à la suite $(\tau_k)_k$ des temps de renouvellement de la façon suivante : en notant, pour $u > 0$,

$$N_u = \inf \{k \geq 0 \mid X_{\tau_k} \cdot \hat{v} \geq u\},$$

on a :

$$P_0 (T_{(|v|+\varepsilon)n}^{\hat{v}} \leq n) \leq P_0 (\tau_{N_{(|v|+\varepsilon)n}-1}} \leq n).$$

La propriété de renouvellement permet de majorer $P_0 (\tau_{c(|v|+\varepsilon)n} \leq n)$ pour $c > 0$, or on a :

LEMME 34. – Sous l'hypothèse (T) on a, pour tout $\rho > 0$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0 \left(\left| \frac{N_u}{u} - \frac{1}{E_0[X_{\tau_1} \cdot l \mid D = \infty]} \right| \geq \rho \right) < 0.$$

PREUVE DU LEMME. Soit $\rho > 0$. On note $\tilde{m} = E_0[X_{\tau_1} \cdot l \mid D = \infty]$. Par le renouvellement et les inégalités de grandes déviations habituelles ($X_{\tau_1} \cdot l$ est exponentiellement intégrable sous P_0 par (T)), on a, pour tout $\delta > 0$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0 (X_{\tau_k} \cdot l \geq k(\tilde{m} + \delta)) < 0$$

et :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0 (X_{\tau_k} \cdot l \leq k(\tilde{m} - \delta)) < 0.$$

Or, par définition de N_u (et parce que la suite $(X_{\tau_k})_k$ est croissante) on a :

$$\begin{aligned} P_0 \left(\left| \frac{N_u}{u} - \frac{1}{\tilde{m}} \right| > \rho \right) &= P_0 \left(N_u > u \left(\frac{1}{\tilde{m}} + \rho \right) \right) + P_0 \left(N_u < u \left(\frac{1}{\tilde{m}} - \rho \right) \right) \\ &= P_0 \left(X_{\tau_{\lfloor u(\frac{1}{\tilde{m}} + \rho) \rfloor}} \cdot l < u \right) + P_0 \left(X_{\tau_{\lceil u(\frac{1}{\tilde{m}} - \rho) \rceil - 1}} \cdot l \geq u \right), \end{aligned}$$

d'où le lemme par ce qui précède. \square

Concluons donc : pour n grand,

$$P_0(\tau_{N_{(|v|+\varepsilon)n-1}} \leq n) \leq P_0(\tau_{M_n} \leq n) + e^{-\mu n}$$

où $M_n = \left\lfloor \frac{(|v|+\varepsilon/2)n}{E_0[X_{\tau_1} \cdot \widehat{v} | D=\infty]} \right\rfloor$, et $\mu > 0$: le second terme correspond à la probabilité de l'événement $\{N_{(|v|+\varepsilon)n} < M_n\}$, qui se majore grâce au lemme. À l'aide de la propriété de renouvellement, on a, pour $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} P_0(\tau_{M_n} \leq n) &\leq P_0((\tau_2 - \tau_1) + \dots + (\tau_{M_n} - \tau_{M_n-1}) \leq n) \\ &\leq e^{\lambda n} E_0[e^{-\lambda \tau_1} | D = \infty]^{M_n-1} \\ &\leq \exp(\lambda n - \lambda(M_n - 1)E_0[\tau_1 | D = \infty]) + (M_n - 1)H(\lambda), \end{aligned}$$

où $H(\lambda) = \ln E_0[e^{-\lambda(\tau_1 - E_0[\tau_1 | D=\infty])} | D = \infty]$. Cette fonction H , définie sur $[0, \infty)$, est de classe \mathcal{C}^∞ (puisque τ_1 a des moments de tous ordres sous l'hypothèse (T)), $H(0) = 0$ et $H'_d(0) = 0$, donc $H(\lambda) = o_{\lambda \rightarrow 0^+}(\lambda)$, si bien que, comme $(M_n - 1)E_0[\tau_1 | D = \infty] \sim_n (1 + \frac{\varepsilon}{2|v|})n$, on a, si $0 < c' < \frac{\varepsilon}{2|v|}$, en choisissant λ assez petit, et pour n suffisamment grand :

$$P_0(\tau_{M_n} \leq n) \leq \exp(-c'n),$$

ce qui achève la preuve du premier point.

• On se place maintenant dans le cas *non-nestling* : il existe $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\varepsilon > 0$ tels que \mathbb{P} -p.s., $E_{0,\omega}[X_1 - X_0] \cdot l > \varepsilon$. (T) est vérifiée pour ce vecteur l (voir le paragraphe précédant la proposition 21 et la proposition 22) et on définit τ_1 en conséquence. Soit \mathcal{O} un voisinage de v . Il existe $0 < v_0 < |v|$ tel que $[v_0 \widehat{v}, v] \subset \mathcal{O}$; on note alors \mathcal{C} un voisinage de $[0, v_0]$ contenu dans $\{x \cdot l < v_1\}$ où $v_1 < v \cdot l$, de sorte que $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \mathcal{C}$ est un voisinage de $[0, v]$ ce qui montre que, dans l'inégalité suivante :

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O}\right) \leq P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \widetilde{\mathcal{O}}\right) + P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{C}\right),$$

le premier terme du second membre décroît exponentiellement (par le cas général). Par choix de \mathcal{C} , si $v_1 < v_2 < v \cdot l$, on a :

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{C}\right) \leq P_0(X_n \cdot l < v_1 n) \leq P_0(T_{v_2 n}^l > n) + P_0(T_{v_2 n}^l \leq n, \widetilde{T}_{v_1 n}^l \circ \Theta_{T_{v_2 n}^l} < \infty).$$

Or la marche reste dans la boule de centre 0 et de rayon n (pour la norme $\|\cdot\|$) jusqu'au temps n , si bien que par inégalité de Markov forte en $T_{v_2 n}^l$ et invariance de \mathbb{P} par translation :

$$\begin{aligned} P_0(T_{v_2 n}^l \leq n, \widetilde{T}_{v_1 n}^l \circ \Theta_{T_{v_2 n}^l} < \infty) &\leq |\mathbb{B}_{\|\cdot\|}^d(0, n)| P_0(\widetilde{T}_{-(v_2-v_1)n}^{\widehat{v}} < \infty) \\ &\leq |\mathbb{B}_{\|\cdot\|}^d(0, n)| P_0(X_{\tau_1}^* \geq (v_2 - v_1)n) \end{aligned}$$

et l'hypothèse (T) implique que cette probabilité décroît exponentiellement avec n . Le lemme suivant permet de conclure quant au terme $P_0(T_{v_2 n}^l > n)$ et de terminer la preuve de ce point :

LEMME 35. – Sous (T)| l , dans le cas *non-nestling*, on a, pour tout $c > (v \cdot l)^{-1}$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \ln P_0(T_u^l > cu) < 0.$$

PREUVE DU LEMME. L'idée est toujours de se ramener à des variables indépendantes par le renouvellement, et de faire alors appel à des inégalités de grandes déviations sur des sommes de variables iid. En l'occurrence, se placer dans le cas *non-nestling* assure (voir théorème 25) que la variable τ_1 est exponentiellement intégrable sous $P_0(\cdot | D = \infty)$ de sorte que, vu que $\tau_k = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) + \dots + (\tau_k - \tau_{k-1})$, on a pour tout $a > E_0[\tau_1 | D = \infty]$, par l'inégalité de Cramer-Tchernoff habituelle :

$$\limsup_k \frac{1}{k} \ln P_0(\tau_k > ka) < 0.$$

On se ramène aux temps $(\tau_k)_k$ de renouvellement à l'aide de N_u (relatif à la direction l) : $N_u \in \mathbb{N}$ est tel que $\tau_{N_u-1} < T_u^l \leq \tau_{N_u}$. Pour tout $\tilde{c} > 0$, on a, en utilisant cette inégalité pour passer à la seconde ligne :

$$\begin{aligned} P_0(T_u^l > cu) &\leq P_0(E_0[\tau_1|D = \infty] \cdot N_u \geq \tilde{c}u) + P_0(E_0[\tau_1|D = \infty] \cdot N_u < \tilde{c}u, T_u^l > cu) \\ &\leq P_0(E_0[\tau_1|D = \infty] \cdot N_u \geq \tilde{c}u) + P_0(\tau_{\lfloor \frac{\tilde{c}u}{E_0[\tau_1|D = \infty]} \rfloor} > cu) \end{aligned}$$

et le premier terme décroît exponentiellement avec n dès que $\tilde{c}/E_0[\tau_1|D = \infty] > (v \cdot l)^{-1}$ grâce au lemme précédent (lemme *reflem* :nu), tandis que le second décroît exponentiellement avec n dès que $\tilde{c} < c$ grâce à l'inégalité de grandes déviations appelée ci-dessus (qui exploite l'hypothèse *non-nestling*).

En choisissant donc $(v \cdot l)^{-1} < \tilde{c} < c$, on obtient le lemme. \square

• Il reste à voir la partie de l'énoncé relative au cas *nestling*. Il s'agit de mettre en évidence la possibilité dans ce cas de ralentir la marche avec une grande probabilité, à l'aide de «pièges».

Soit \mathcal{U} un ouvert rencontrant $[0, v]$. On choisit γ_0 tel que $(1 - \gamma_0)v \in \mathcal{U}$, et $\gamma_1 < \gamma_0 < \gamma_2$, proches de γ_0 . Soit $\eta > 0$. Une manière de réaliser l'événement $\{\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\}$ consiste à forcer la trajectoire à rester un temps $\gamma_1 n + c < \gamma_2 n$ dans une région bornée de l'espace, fixée indépendamment de n , puis à lui laisser suivre son comportement typique, proche de la convergence balistique, pendant un temps au moins $(1 - \gamma_1)n$, de façon à avoir X_n approximativement égal à $(1 - \gamma_1)nv$ (voir figure 9).

Concernant la première partie de la trajectoire, montrons plus précisément qu'il existe $L > 0$ et un point x_0 tels que $x_0 \cdot \hat{v} > L$ et :

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln P_0(T_{B_L} > \gamma_1 n, T_{\hat{v} \cdot x_0}^{\hat{v}} = H_{x_0} \in (\gamma_1 n, \gamma_2 n)) > -\eta.$$

On utilise les propriétés montrées dans la preuve du théorème 3. Ainsi, on sait via l'hypothèse *nestling* que, si $M > 0$, on peut définir un événement \mathcal{E}_M (sur l'environnement) sur lequel, pour tout n assez grand, la $P_{0,\omega}$ -probabilité pour que la marche passe un temps n dans $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]^d$ est supérieure à $\exp(-\frac{3\pi^2}{M^2}n)$. On choisit donc M tel que $\frac{3\pi^2}{M^2} < \eta$, puis $L = \sqrt{d}\frac{M}{2}$, de sorte que $[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}]^d \subset B_L$. On choisit x_0 vérifiant $x_0 \cdot \hat{v} > L$. Chaque point de B_L peut être relié à x_0 par un chemin qui reste dans le demi-espace $\{x \cdot \hat{v} < x_0 \cdot \hat{v}\}$ (à l'exception du dernier point, x_0), et de longueur minimale; on note c un majorant des longueurs de tous ces chemins. Alors on a, pour n assez grand, avec la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} P_0(T_{B_L} > \gamma_1 n, T_{\hat{v} \cdot x_0}^{\hat{v}} = H_{x_0} \in (\gamma_1 n, \gamma_2 n)) \\ &\geq \mathbb{E}[\mathcal{E}_M, P_{0,\omega}(T_{B_L} > \gamma_1 n, \text{ la marche après } X_{\lfloor \gamma_1 n \rfloor + 1} \text{ rejoint } x_0 \text{ par un des chemins cités})] \\ &\geq \mathbb{P}(\mathcal{E}_M) e^{-\frac{3\pi^2}{M^2}(\lfloor \gamma_1 n \rfloor + 1)} \kappa^c, \end{aligned}$$

ce qui donne la minoration annoncée puisque $\frac{3\pi^2}{M^2}\gamma_1 < \eta$.

Ensuite, si la marche vérifie $H_{x_0} \in (\gamma_1, \gamma_2)$ et $\sup_{0 \leq k \leq n} |X_{H_{x_0}+k} - x_0 - kv| \leq \rho n$ avec $\rho > 0$, alors en particulier, comme $X_n = X_{H_{x_0}+k}$ où $k \in ((1 - \gamma_2)n, (1 - \gamma_1)n)$:

$$\left| \frac{X_n}{n} - (1 - \gamma_0)v \right| \leq \rho + \frac{|x_0|}{n} + \frac{(|\gamma_1 - \gamma_0| \vee |\gamma_2 - \gamma_0|)|v|}{n} \leq 2\rho$$

pour n assez grand, et donc $\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}$ si ρ est choisi tel que $\mathbb{B}^d((1 - \gamma_0)v, 2\rho) \subset \mathcal{U}$. En somme, on a donc, pour ce choix de ρ , pour n assez grand :

$$\begin{aligned} P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\right) &\geq P_0(H_{x_0} \in (\gamma_1 n, \gamma_2 n), \max_{0 \leq k \leq n} |X_{H_{x_0}+k} - x_0 - kv| \leq \rho n) \\ &\geq P_0(T_{\hat{v} \cdot x_0}^{\hat{v}} = H_{x_0} \in (\gamma_1 n, \gamma_2 n), D \circ \Theta_{H_{x_0}} = \infty, \max_{0 \leq k \leq n} |X_{H_{x_0}+k} - x_0 - kv| \leq \rho n) \\ &\geq P_0(T_{\hat{v} \cdot x_0}^{\hat{v}} = H_{x_0} \in (\gamma_1 n, \gamma_2 n)) P_0(D \circ \Theta_{H_{x_0}} = \infty, \max_{0 \leq k \leq n} |X_{H_{x_0}+k} - x_0 - kv| \leq \rho n), \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov sous $P_{0,\omega}$, et l'indépendance sous \mathbb{P} des probabilités de transitions des sites situés dans les demi-espaces $\{x \cdot \hat{v} < x_0 \cdot \hat{v}\}$ et $\{x \cdot \hat{v} \geq x_0 \cdot \hat{v}\}$ (D est relative à la direction \hat{v}). Au vu

de ce que l'on vient de démontrer sur le premier facteur ci-dessus, et de la conséquence simple suivante de la balisticité et du fait que $|X_{n+1} - X_n| = 1$ pour tout n :

$$P_0(\cdot | D = \infty)\text{-p.s.}, \max_{0 \leq k \leq n} \left| \frac{X_k}{n} - \frac{kv}{n} \right| \xrightarrow{n} 0,$$

on obtient :

$$\liminf_n \frac{1}{n} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\right) > -\eta.$$

Ceci vaut pour tout $\eta > 0$, d'où la fin de la preuve du théorème. \square

Dans le cas *nestling*, ce théorème montre le rôle du segment $[0, v]$: pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité pour $\frac{X_n}{n}$ d'être à une distance $\geq \varepsilon$ de $[0, v]$ décroît exponentiellement avec n , tandis que, quels que soient $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité pour $\frac{X_n}{n}$ d'être à distance $< \varepsilon$ du segment $[\alpha_1 v, \alpha_2 v]$ décroît moins vite qu'exponentiellement. On s'intéresse maintenant à des majorations plus fines faisant apparaître le rôle de v dans le segment $[0, v]$, en travaillant donc à une vitesse plus lente qu'exponentielle.

THÉORÈME 36. – On suppose $d \geq 2$, et (T) satisfaite. Pour tout voisinage \mathcal{O} de v , on a, pour $\alpha < \frac{2d}{d+1}$:

$$\limsup_n \frac{1}{(\ln n)^\alpha} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O}\right) < 0.$$

De plus : dans le cas *plain nestling*, pour tout ouvert \mathcal{U} rencontrant $[0, v]$,

$$\liminf_n \frac{1}{(\ln n)^d} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\right) > -\infty.$$

DÉMONSTRATION. • Soit \mathcal{O} un voisinage de v . Le raisonnement est très proche de celui du cas *non-nestling* dans le théorème précédent, à la différence près que l'on n'a plus la même estimée sur la queue de la distribution de τ_1 (ce qui va compliquer les calculs de grandes déviations). On choisit $v_0 < v_1 < |v|$ tels que $[v_0 \hat{v}, v] \subset \mathcal{O}$, et un voisinage \mathcal{C} de $[0, v_0 \hat{v}]$ inclus dans $\{x \cdot \hat{v} < v_1\}$, de sorte que $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \cup \mathcal{C}$ est un voisinage de $[0, v]$, ce qui montre que, dans l'inégalité suivante :

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O}\right) \leq P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \tilde{\mathcal{O}}\right) + P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{C}\right),$$

le premier terme du second membre décroît exponentiellement grâce au cas général. Par choix de \mathcal{C} , on a, en choisissant $v_1 < v_2 < |v|$:

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{C}\right) \leq P_0(X_n \cdot \hat{v} < v_1 n) \leq P_0(T_{v_2 n}^{\hat{v}} > n) + P_0(T_{v_2 n}^{\hat{v}} \leq n, \tilde{T}_{v_1 n}^{\hat{v}} \circ \Theta_{T_{v_2 n}^{\hat{v}}} < \infty).$$

Or la marche reste dans la boule de centre 0 et de rayon n (pour la norme $\|\cdot\|$) jusqu'au temps n , si bien que par inégalité de Markov forte en $T_{v_2 n}^{\hat{v}}$ et invariance de \mathbb{P} par translation :

$$\begin{aligned} P_0(T_{v_2 n}^{\hat{v}} \leq n, \tilde{T}_{v_1 n}^{\hat{v}} \circ \Theta_{T_{v_2 n}^{\hat{v}}} < \infty) &\leq |\mathbb{B}_{\|\cdot\|}^d(0, n)| P_0(\tilde{T}_{-(v_2 - v_1)n}^{\hat{v}} < \infty) \\ &\leq |\mathbb{B}_{\|\cdot\|}^d(0, n)| P_0(X_{\tau_1}^* \geq (v_2 - v_1)n) \end{aligned}$$

et l'hypothèse (T) implique que cette probabilité décroît exponentiellement avec n . Au vu du théorème 27, le lemme suivant permet de conclure quant au terme $P_0(T_{v_2 n}^{\hat{v}} > n)$ et de terminer la preuve de ce point :

LEMME 37. – On suppose (T)| l . Si $\alpha > 0$ est tel que :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\alpha} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0,$$

alors, pour tout $c > (v \cdot l)^{-1}$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\alpha} \ln P_0(T_u^l > cu) < 0.$$

PREUVE DU LEMME. On procède comme pour le lemme 35 : on se ramène d'abord aux temps $(\tau_k)_k$ de renouvellement à l'aide de N_u (relatif à la direction l) et on utilise des inégalités de grandes déviations pour sommes de variables i.i.d.. Pour tout $\tilde{c} > 0$, on a, en posant $\tilde{m} = E_0[\tau_1 | D = \infty]$:

$$\begin{aligned} P_0(T_u^l > cu) &\leq P_0(\tilde{m}N_u \geq \tilde{c}u) + P_0(\tilde{m}N_u < \tilde{c}u, T_u^l > cu) \\ &\leq P_0(\tilde{m}N_u \geq \tilde{c}u) + P_0(\tau_{\lfloor \frac{\tilde{c}u}{\tilde{m}} \rfloor} > cu) \end{aligned}$$

et le premier terme décroît exponentiellement avec n dès que $\tilde{c}/\tilde{m} > (v \cdot l)^{-1}$ grâce au lemme 34. On va montrer que pour $\delta > 0$:

$$\limsup_n \frac{1}{(\ln n)^\alpha} \ln P_0(\tau_n \geq n(\tilde{m} + \delta)) < 0,$$

ce qui traitera le second terme pour $\tilde{c} < c$ (en définissant $n = \lfloor \frac{\tilde{c}u}{\tilde{m}} \rfloor$ et $\frac{c}{\tilde{c}} = 1 + \frac{\delta}{\tilde{m}}$), et le lemme s'obtiendra en choisissant \tilde{c} tel que $(v \cdot l)^{-1} < \tilde{c} < c$. Par la propriété de renouvellement, si $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \dots, \tilde{\tau}_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi sous P que τ_1 sous $P_0(\cdot | D = \infty)$, on a :

$$P_0(\tau_n > n(\tilde{m} + \delta)) \leq P\left(\tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_n > \frac{n}{2}(\tilde{m} + \delta)\right) + P_0\left(\tau_1 > \frac{n}{2}(\tilde{m} + \delta)\right),$$

et il suffit donc d'après l'inégalité de l'hypothèse de démontrer :

$$\limsup_n \frac{1}{(\ln n)^\alpha} \ln P_0(\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \dots + \tilde{\tau}_n \geq n(\tilde{m} + \delta)) < 0.$$

L'hypothèse fournit $\mu > 0$ tel que, pour u grand, $P(\tilde{\tau}_1 > u) \leq \exp(-\mu(\ln u)^\alpha)$. Pour obtenir l'inégalité annoncée, on tronque «correctement» les variables $\tilde{\tau}_k$ avant d'utiliser l'inégalité de Cramer-Tchernoff : pour n grand,

$$\begin{aligned} P(\tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_n \geq n(\tilde{m} + \delta)) &\leq nP\left(\tilde{\tau}_1 > \frac{n}{(\ln n)^{\alpha+1}}\right) + P\left(\tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_n \geq n(\tilde{m} + \delta), \sup_i \tilde{\tau}_i \leq \frac{n}{(\ln n)^{\alpha+1}}\right) \\ &\leq ne^{-\mu(\ln n)^\alpha} + e^{-(\ln n)^\alpha(\tilde{m} + \delta)} E\left[e^{\frac{(\ln n)^\alpha}{n}\tilde{\tau}_1}, \tilde{\tau}_1 \leq \frac{n}{(\ln n)^{\alpha+1}}\right]^n, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E\left[e^{\frac{(\ln n)^\alpha}{n}\tilde{\tau}_1}, \tilde{\tau}_1 \leq \frac{n}{(\ln n)^{\alpha+1}}\right] &= P\left(\tilde{\tau}_1 \leq \frac{n}{(\ln n)^{\alpha+1}}\right) + \int_0^{\frac{n}{(\ln n)^{\alpha+1}}} \frac{(\ln n)^\alpha}{n} e^{\frac{(\ln n)^\alpha}{n}u} P(\tilde{\tau}_1 > u) du \\ &\leq 1 + \frac{(\ln n)^\alpha}{n} e^{(\ln n)^{-1}} \int_0^\infty P(\tilde{\tau}_1 > u) du \\ &\leq 1 + \frac{(\ln n)^\alpha}{n} \left(\tilde{m} + \frac{\delta}{2}\right) \leq \exp\left(\frac{(\ln n)^\alpha}{n} \left(\tilde{m} + \frac{\delta}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où, pour n suffisamment grand :

$$P(\tilde{\tau}_1 + \dots + \tilde{\tau}_n \geq n(\tilde{m} + \delta)) \leq e^{-\frac{\mu}{2}(\ln n)^\alpha} + e^{-(\ln n)^\alpha(\tilde{m} + \delta)} e^{(\ln n)^\alpha(\tilde{m} + \frac{\delta}{2})},$$

ce qui donne la majoration annoncée. \square

• On suppose que la marche est *plain-nestling*. Soit \mathcal{U} un ouvert rencontrant $[0, v]$. Il existe $0 < v_1 < v_2 < |v|$ et un voisinage \mathcal{O} de $[0, v]$ tels que $\{x \cdot \hat{v} \in (v_1, v_2)\} \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{U}$, d'où :

$$P_0\left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U}\right) \geq P_0\left(\frac{X_n \cdot \hat{v}}{n} \in (v_1, v_2)\right) - P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O}\right).$$

Le dernier terme décroît exponentiellement via le théorème précédent, donc il suffit pour conclure de montrer que :

$$\liminf_n \frac{1}{(\ln n)^d} \ln P_0\left(\frac{X_n \cdot \hat{v}}{n} \in (v_1, v_2)\right) > -\infty.$$

On raisonne ici encore comme dans la preuve du théorème précédent, à la différence près que l'hypothèse *plain-nestling* rend la réalisation d'un «piège» plus efficace. Au lieu d'un piège de taille fixée, on crée ici un «piège naïf» qui a une taille de l'ordre de $\ln n$. En utilisant les propriétés vues dans la preuve du théorème 3, on peut en effet construire, pour $r = r_0 \ln n$, un événement ayant une \mathbb{P} -probabilité $\geq e^{-\mu(\ln n)^d}$ et sur lequel, avec une $P_{0,\omega}$ -probabilité $> c_0$ (où $c_0 > 0$), la marche passe un temps $> (1 - v_1)n$ dans la boule $\mathbb{B}^d(0, r)$. Pour tout r , on choisit un point $x_0 \in \mathbb{B}^d(0, 2r)$ vérifiant $x_0 \cdot \hat{v} > r$ et on définit $c(= O_n(\ln n) = o_n(n))$ de la même manière que dans la preuve du théorème précédent, de sorte que, de façon très similaire :

$$\liminf_n \frac{1}{(\ln n)^d} \ln P_0(T_{x_0 \cdot \hat{v}}^{\hat{v}} = H_{x_0} \in ((1 - v_1)n, (1 - v_2)n) > -\infty,$$

et, pour $\rho > 0$ assez petit :

$$P_0(X_n \cdot \hat{v} \in (v_1, v_2)n) \geq P_0(T_{x_0 \cdot \hat{v}}^{\hat{v}} = H_{x_0} \in ((1 - v_1)n, (1 - v_2)n), D \circ \Theta_{H_{x_0}} < \infty, \sup_{0 \leq k \leq n} |X_{H_{x_0} + k} - x_0 - kv| \leq \rho n).$$

On conclut en utilisant la propriété de Markov et l'indépendance de la même manière que dans la preuve du théorème précédent. \square

4.4 Théorème central limite

La majoration de la queue de la distribution de τ_1 obtenue dans la partie 4.2 (cf. théorème 27) permettait de montrer, si $d \geq 2$ et sous l'hypothèse (T), l'intégrabilité de τ_1 sous P_0 et ainsi la convergence balistique P_0 -p.s.. En fait, ce résultat montre aussi que l'on a, sous ces mêmes conditions :

$$E_0[\tau_1^2 | D = \infty] < \infty.$$

(en écrivant $E_0[\tau_1^k] = \int_0^\infty kt^{k-1} P_0(\tau_1 > t) dt$, on voit même que τ_1 admet des moments de tous ordres sous P_0) De là on peut déduire, à la suite d'A.-S. Sznitman dans [5], un théorème central limite relatif à la suite des processus $(B_t^n)_{t \geq 0}$, $n \geq 1$, définis par :

$$\text{pour tout } t \geq 0, B_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{[tn]} - [tn]v).$$

Pour tout n , B^n est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ des fonctions $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ continues à droite avec limites à gauche («càd-làg») muni de la tribu engendrée par les fonctions $x \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^d$ pour tout $t \geq 0$. Cette tribu est aussi (voir [2]) la tribu borélienne pour la topologie dite de Skorohod, déduite de la distance de Skorohod :

$$d : (x, y) \mapsto d(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \left(\gamma(\lambda) \vee \int_0^\infty e^{-u} \sup_{t \geq 0} |x(t \wedge u) - y(\lambda(t) \wedge u)| \wedge 1 \, du \right)$$

où Λ est l'ensemble des fonctions $\lambda : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ strictement croissantes, lipschitziennes, de fonction réciproque lipschitzienne, et vérifiant $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(t) \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \infty$, et où, pour $\lambda \in \Lambda$:

$$\gamma(\lambda) = \sup_{0 \leq s < t} \left| \ln \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{s - t} \right|$$

(par la définition de Λ , on a $\gamma(\lambda) < \infty$). On peut alors énoncer :

THÉORÈME 38. – On suppose $d \geq 2$, et la condition (T) vérifiée. Sous P_0 , la suite $(B^n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers un mouvement brownien dans \mathbb{R}^d de matrice de covariance non dégénérée :

$$A = \frac{E_0[(X_{\tau_1} - \tau_1 v)^t (X_{\tau_1} - \tau_1 v) | D = \infty]}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}.$$

(c'est à dire par exemple que si Z est une matrice racine carrée (symétrique) de A , Z est inversible, et la loi limite est la loi de ZB , où B est un mouvement brownien standard de \mathbb{R}^d)

DÉMONSTRATION. • De même que pour la balisticité, on prouve un premier résultat pour la suite $(X_{\tau_n})_n$ à l'aide de la propriété de renouvellement, que l'on étend ensuite au processus initial. Pour tout $j \geq 0$, on note :

$$Z_j = X_{\tau_{j+1}} - X_{\tau_j} - (\tau_{j+1} - \tau_j)v$$

et, pour $m \geq 0$,

$$\Sigma_m = \sum_{j=1}^m Z_j = X_{\tau_{m+1}} - X_{\tau_1} - (\tau_{m+1} - \tau_1)v.$$

Pour s réel positif, Σ_s désigne l'interpolation linéaire de $(\Sigma_m)_{m \geq 0}$. Compte-tenu de la propriété de renouvellement (théorème 9), le théorème d'invariance de Donsker montre que la suite des processus (continus) $(\frac{1}{\sqrt{m}}\Sigma_{tm})_{t \geq 0}$, $m \geq 1$, converge en loi vers un mouvement brownien de \mathbb{R}^d de matrice de covariance :

$$E_0[(X_{\tau_1} - \tau_1v)^t (X_{\tau_1} - \tau_1v) | D = \infty] = E_0[\tau_1 | D = \infty]A.$$

Pour se ramener à l'échelle de temps initiale, on définit, pour tout n :

$$k_n = \sup \{k \geq 0 \mid \tau_k \leq n\},$$

de sorte que $\tau_{k_n} \leq n < \tau_{k_n+1}$. De la loi des grand nombres pour la suite $(\tau_k)_k$ et de l'encadrement qui précède, on déduit :

$$P_0\text{-p.s.}, \quad \frac{k_n}{n} \xrightarrow[n]{n} \frac{1}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}.$$

Voyons ce que donne le théorème central limite. Soit $\alpha > 0$. Pour n assez grand, on a, en posant $u = \frac{n}{E_1} - \alpha\sqrt{n}$ (pour abrégé, $E_1 := E_0[\tau_1 | D = \infty]$),

$$\begin{aligned} P_0 \left(k_n \leq \frac{n}{E_1} - \alpha\sqrt{n} \right) &= P_0 \left(k_{uE_1 + \frac{E_1^2 \alpha^2}{2}} \left(\sqrt{1 + \frac{4u}{\alpha^2 E_1^2}} - 1 \right) \leq u \right) \\ &= P_0 \left(\tau_{\lfloor u \rfloor} \geq uE_1 + \frac{E_1^2 \alpha^2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4u}{\alpha^2 E_1^2}} - 1 \right) \right) \\ &\leq P_0 \left(\frac{\tau_{\lfloor u \rfloor} - uE_1}{\sqrt{u}} \geq \frac{\alpha E_1^{3/2}}{2} \right) \end{aligned}$$

(à l'aide d'une étude de fonction), donc en notant $E_2 = E_0[\tau^2 | D = \infty]$, le théorème central limite pour la suite $(\tau_n)_n$ donne, N étant une variable gaussienne standard sous P :

$$\limsup_n P_0 \left(k_n \leq \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} - \alpha\sqrt{n} \right) \leq P(N \geq \frac{\alpha E_1^{3/2}}{2\sqrt{E_2}}) \leq \frac{1}{2} e^{-C\alpha^2}$$

où $C = \frac{E_1^3}{8E_2}$. On peut procéder de même pour une majoration de k_n d'où finalement l'inégalité :

$$\text{pour tout } \alpha > 0, \quad \limsup_n P_0 \left(\left| k_n - \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \right| > \alpha\sqrt{n} \right) \leq e^{-C\alpha^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a, pour tout n :

$$\begin{aligned} P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \Sigma_{k_n} - \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right| > \varepsilon \right) &\leq P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \Sigma_{k_n} - \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right| > \varepsilon, \left| k_n - \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \right| \leq \alpha\sqrt{n} \right) \\ &\quad + P_0 \left(\left| k_n - \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \right| > \alpha\sqrt{n} \right) \end{aligned}$$

et, en utilisant la propriété de renouvellement :

$$\begin{aligned}
P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \Sigma_{k_n} - \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right| > \varepsilon, \left| k_n - \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \right| \leq \alpha \sqrt{n} \right) \\
\leq P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{|k| \leq \alpha \sqrt{n} + 1} \left| \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} + k \rfloor} - \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right| > \varepsilon \right) \\
\leq P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq k \leq 2\alpha \sqrt{n} + 2} |\Sigma_k| > \varepsilon \right),
\end{aligned}$$

d'où, pour tout $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
\limsup_n P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \Sigma_{k_n} - \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right| > \varepsilon \right) &\leq \limsup_n P_0 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0 \leq k \leq 3\alpha \sqrt{n}} |\Sigma_k| > \varepsilon \right) + e^{-C\alpha^2} \\
&\leq \limsup_n P_0 \left(\frac{1}{n} \sup_{0 \leq k \leq n} |\Sigma_k| > \frac{\varepsilon}{3\alpha} \right) + e^{-C\alpha^2} \\
&\leq e^{-C\alpha^2}
\end{aligned}$$

(par la loi forte des grands nombres, P_0 -p.s., $\frac{\Sigma_n}{n} \rightarrow_n 0$ et donc $\frac{1}{n} \sup_{0 \leq k \leq n} \Sigma_k \rightarrow_n 0$). Ce qui précède vaut pour tout $\alpha > 0$, donc on a montré :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\Sigma_{k_n} - \Sigma_{\lfloor \frac{n}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right) \text{ converge vers 0 en } P_0\text{-probabilité.}$$

De même, pour tout réel $t \geq 0$, on montrerait :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\Sigma_{k_{\lfloor nt \rfloor}} - \Sigma_{\lfloor \frac{nt}{E_0[\tau_1 | D = \infty]} \rfloor} \right) \text{ converge vers 0 en } P_0\text{-probabilité.}$$

Au vu de la convergence en loi montrée plus haut, on en déduit que la suite des processus $(\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k_{\lfloor nt \rfloor}})_{t \geq 0}$, $n \geq 1$, converge au sens des lois fini-dimensionnelles vers un mouvement brownien de \mathbb{R}^d de matrice de covariance A .

Pour obtenir une convergence en loi, il s'agit de montrer que cette suite de processus est tendue. On utilise pour cela le critère du corollaire 7.4 de [2]. Le premier point de ce critère est assuré par la convergence en loi à t fixé montrée ci-dessus. Quant au second point, à l'aide de la tension de la suite $(\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{\cdot n})_n$ (elle converge en loi), il se déduit du fait que, P_0 -p.s., pour tout $T > 0$, la suite des fonctions $f_n : t \mapsto \frac{1}{n} k_{\lfloor tn \rfloor}$, $n \geq 1$, converge *uniformément* sur le compact $[0, T]$ vers la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{E_0[\tau_1 | D = \infty]}$, ce qui résulte d'un théorème de Dini puisque chacune des fonctions f_n est croissante, f est continue, et il y a convergence ponctuelle presque-sûre comme montré précédemment. On obtient ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k_{\lfloor \cdot n \rfloor}} \text{ converge en loi vers un mouvement brownien de } \mathbb{R}^d \text{ de matrice de covariance } A.$$

Enfin il faut se ramener à $X_{\lfloor tn \rfloor}$ (au lieu de $X_{\tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}}}$). On remarque que, P_0 -p.s., pour tout $T > 0$, pour tout $t \leq T$,

$$\begin{aligned}
\left| B_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k_{\lfloor tn \rfloor}} \right| &\leq |X_{\tau_1}| + |\tau_1 v| + |X_{\lfloor tn \rfloor} - X_{k_{\lfloor tn \rfloor}}| + |(\lfloor tn \rfloor - \tau_{k_{\lfloor tn \rfloor}})v| \\
&\leq 2(1 + |v|) \sup_{0 \leq k \leq k_{\lfloor Tn \rfloor}} \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

or, par la propriété de renouvellement et la majoration $ak_n \leq \tau_{k_n} \leq n$:

$$\begin{aligned}
P_0 \left(\sup_{0 \leq k \leq k_{\lfloor Tn \rfloor}} \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{\sqrt{n}} > u \right) &\leq P_0(\tau_1 > u\sqrt{n}) + \frac{nT+1}{a} P_0(\tau_1 > u\sqrt{n} | D = \infty) \\
&\leq P_0(\tau_1 > u\sqrt{n}) + \frac{nT+1}{a} \frac{1}{u^2 n} E_0[\tau_1^2, \tau_1 > u\sqrt{n} | D = \infty] \\
&\xrightarrow[n]{} 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $T > 0$, la suite $\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| B_t^n - \frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k_{\lfloor tn \rfloor}} \right| \right)_{n \geq 0}$ converge vers 0 en P_0 -probabilité. La distance de Skorohod entre B^n et $\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k_{\lfloor \cdot n \rfloor}}$ converge donc aussi vers 0 en P_0 -probabilité. Par le résultat de convergence obtenu plus haut pour $\frac{1}{\sqrt{n}} \Sigma_{k_{\lfloor \cdot n \rfloor}}$, on a la convergence en loi de B^n annoncée.

• Il reste à voir que la matrice A (symétrique positive) est non-dégénérée. Soit $w \in \mathbb{R}^d$ tel que ${}^t w A w = 0$. Vu la définition de A , on en déduit :

$$P_0(\cdot | D = \infty)\text{-p.s.}, (X_{\tau_1} - \tau_1 v) \cdot w = 0.$$

D'après le théorème 17, on peut supposer que a est suffisamment grand pour que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq x \cdot l < a\}$ soit connexe ($a > 2\sqrt{d}$ convient). On choisit $x \in H = \partial \{z \in \mathbb{Z}^d \mid z \cdot l < a\}$. Ce point satisfait :

$$P_0(X_{S_1} = x, S_1 < D) > 0$$

(on rappelle (cf. page 12) que $S_1 = T_a^l$) et même, pour tout $n \geq 0$, (en introduisant par exemple une boucle dans un chemin de 0 à x restant dans $\{z \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leq l \cdot z < a\}$) :

$$P_0(X_{S_1} = x, n \leq S_1 < D) > 0.$$

On a donc, pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} P_0(X_{\tau_1} = x, n < \tau_1 = S_1, D = \infty) &= P_0(X_{S_1} = x, n < S_1 < D, D \circ \Theta_{S_1} = \infty) \\ &= \mathbb{E}[P_{0,\omega}(X_{S_1} = x, n < S_1 < D) P_{x,\omega}(D = \infty)] \\ &= P_0(X_{S_1} = x, n < S_1 < D) P_0(D = \infty) \\ &> 0, \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov forte en S_1 et l'indépendance sous \mathbb{P} . Revenant à w , on doit donc avoir, pour tout $n \geq 0$:

$$|x \cdot w| \geq n |v \cdot w|,$$

ce qui impose $v \cdot w = 0$. Mais alors la condition sur w devient : $P_0(\cdot | D = \infty)\text{-p.s.}, X_{\tau_1} \cdot w = 0$, et comme pour tout $x \in H$, $P_0(X_{\tau_1} = x | D = \infty) > 0$, on a finalement :

$$\text{pour tout } x \in H, w \cdot x = 0.$$

Or on peut facilement trouver d points vectoriellement indépendants dans H , d'où $w = 0$. Ceci conclut. \square

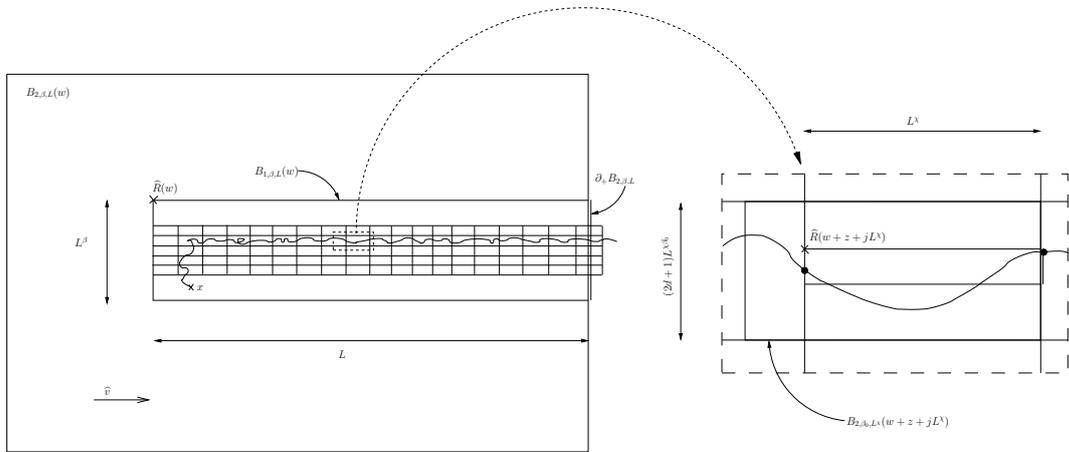


FIG. 8 – Illustration de l'étape de renormalisation (lemme 31)

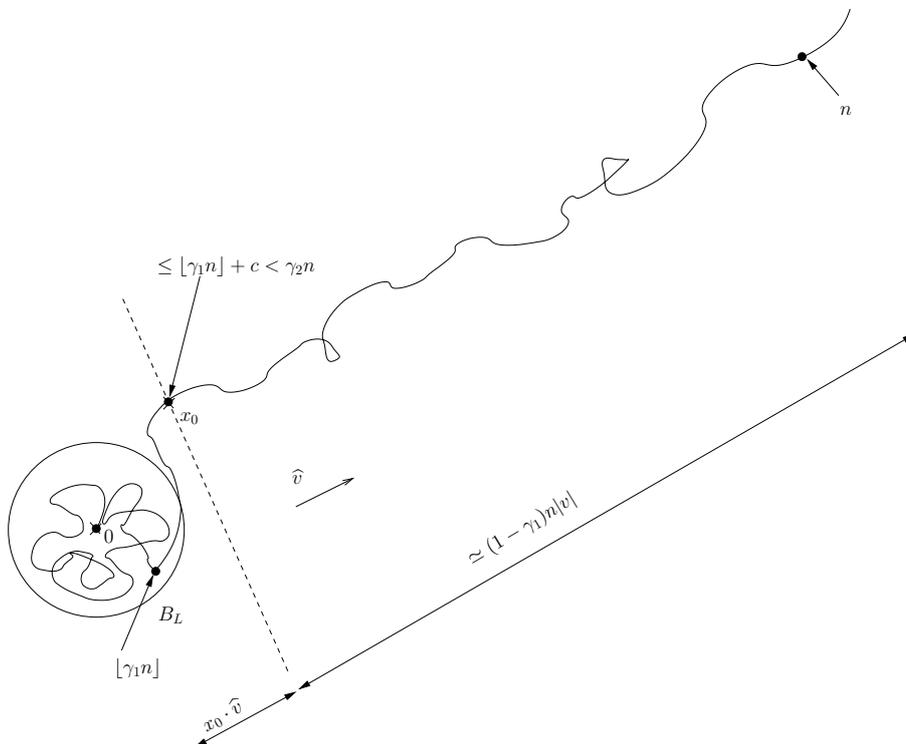


FIG. 9 – Type de comportement utilisé pour la minoration dans le cas *nestling* (théorème 33)

5 Critère effectif

La proposition 21 fournit un critère pour la condition de Kalikow (donc en particulier pour (T) et la convergence balistique) qui est aisément vérifiable par simple inspection de la loi μ . Idéalement, on aimerait avoir un tel critère qui soit équivalent à (T). En effet, le critère (T) tel qu'introduit initialement fait intervenir la variable $X_{T_1}^*$, ce qui rend le rend difficile à vérifier, et la formulation équivalente donnée dans le corollaire 18, bien que plus commode, exploite tout de même la distribution de sortie d'une bande *infinie*. Le but de cette section, basée sur l'article [7] d'A.-S. Sznitman est l'obtention d'un critère «effectif», au sens où il ne fait appel qu'à des probabilités d'événements se vérifiant par inspection d'une boîte finie. Si une procédure de vérification de l'hypothèse reste toute théorique (on traitera tout de même un exemple d'application au paragraphe 6.6), ce critère fournit par ailleurs des informations sur les conditions de balisticité, comme on le verra dans la section suivante.

5.1 Notations et énoncé

Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. On note R une rotation de \mathbb{R}^d telle que $R(e_1) = l$. Pour $L, L', \tilde{L} > 0$, on définit alors :

$$B = B(R, L, L', \tilde{L}) = R((-L, L') \times (-\tilde{L}, \tilde{L})^{d-1}) \cap \mathbb{Z}^d,$$

$$\partial_+ B = \partial B \cap \{x \in \mathbb{Z}^d \mid l \cdot x \geq L', |R(e_i) \cdot x| < \tilde{L} \text{ pour } i = 2, \dots, d\},$$

puis, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\rho_B(\omega) = \frac{P_{0,\omega}(X_{T_B} \notin \partial_+ B)}{P_{0,\omega}(X_{T_B} \in \partial_+ B)} = \frac{q_B(\omega)}{p_B(\omega)} \in [0, \infty],$$

où $p_B(\omega) = 1 - q_B(\omega) = P_{0,\omega}(X_{T_B} \in \partial_+ B)$. En dimension 1, la définition correspondant à $p_B(\omega)$ (resp. à $q_B(\omega)$) est la probabilité de sortir du segment $[-L, L']$ par son extrémité droite (resp. gauche); dans la suite, la preuve consistera à plusieurs reprises à se ramener à la dimension 1 (par «projection»)

L'hypothèse (T) est liée à la décroissance de la probabilité de sortir d'une bande infinie par un côté plutôt que par l'autre lorsque l'épaisseur de la bande tend vers l'infini, et c'est donc cette probabilité que l'on cherche à majorer; pour une boîte $B(R, L, L', \tilde{L})$ qui ressemble à une bande infinie, c'est à dire avec $\tilde{L} \gg L$, cela revient approximativement à étudier la décroissance de q_B , ou encore de ρ_B (en ayant en tête l'importance de cette quantité en dimension 1), avec L . De là l'idée suivante pour obtenir un critère effectif : partant d'une majoration de $\mathbb{E}[\rho_B]$ pour une boîte B donnée, on peut chercher à en déduire une estimation similaire pour une boîte plus grande et surtout plus «large», de façon à pouvoir ensuite construire par récurrence une suite de boîtes $(B_k)_k$ ressemblant de plus en plus à des bandes infinies et pour lesquelles on dispose de majorations de $\mathbb{E}[\rho_{B_k}]$. C'est ce que traduit le critère suivant, d'apparence assez technique :

THÉORÈME 39. – Soit $d \geq 2$. Il existe des constantes $c, c' > 1$ telles que, pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, s'il existe $a \in [0, 1]$, une rotation R telle que $R(e_1) = l$, et des réels $L \geq c', 3\sqrt{d} \leq \tilde{L} < L^3$ tels que, avec $B = B(R, L-2, L+2, \tilde{L})$:

$$c \left(\ln \frac{1}{\kappa} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}^{d-1} L^{3(d-1)+1} \mathbb{E}[\rho_B^a] < 1,$$

alors, pour tout l' dans un voisinage de l , pour $\rho > 0$ assez petit,

$$\text{pour tous } b, \tilde{b} > 0, \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L \exp(-\rho(\ln L)^{1/2})} \ln P_0(\tilde{T}'_{-\tilde{b}L} < T'_{bL}) < 0.$$

On remarque que la conclusion du théorème implique que, pour tout $\gamma \in (0, 1)$ (mais *a priori* pas pour $\gamma = 1$), pour tout l' dans un voisinage de l , pour tous $b, \tilde{b} > 0$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\gamma} \ln P_0(\tilde{T}'_{-\tilde{b}L} < T'_{bL}) < 0.$$

Si on se rappelle du corollaire 18, cette propriété apparaît très proche de la condition (T), bien qu'*a priori* plus faible. C'est en fait ce que l'on appellera la condition (T') dans la partie prochaine, et on verra alors que la réciproque du théorème précédent (et même une assertion plus forte) est vraie.

5.2 Etape de renormalisation

Comme expliqué plus haut, on cherche à majorer $\mathbb{E}[\rho_B]$ en fonction de la même quantité pour une boîte plus petite, et surtout moins large. Ainsi, on pourra faire fonctionner une récurrence qu'il suffira d'initier correctement.

On s'intéresse aux boîtes $B_0 = B(R, L_0 - 1, L_0 + 1, \tilde{L}_0)$ et $B_1 = B(R, L_1 - 1, L_1 + 1, \tilde{L}_1)$, où R est une rotation quelconque et où $3\sqrt{d} < L_0 < L_1$ et $3\sqrt{d} < \tilde{L}_0 < \tilde{L}_1$ (les minoration assurent que les boîtes contiennent suffisamment de points de \mathbb{Z}^d). On note $\rho_0 = \rho_{B_0}$ et $\rho_1 = \rho_{B_1}$, de même pour q et p , ainsi que :

$$N_0 = \frac{L_1}{L_0}, \quad n_0 = \lfloor N_0 \rfloor, \quad \tilde{N}_0 = \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_0}.$$

On aura besoin de contrôler la longueur de chemins dans \mathbb{Z}^d qui restent proches de segments. Pour $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{V}(w_1, w_2)$ l'ensemble des sommets des cubes $z + [0, 1]^d$, $z \in \mathbb{Z}^d$, rencontrant le segment $[w_1, w_2]$. C'est une partie connexe de \mathbb{Z}^d (schématiquement : chaque point de $[w_1, w_2]$ appartient à l'un des cubes $z + [0, 1]^d$ ci-dessus ; si un point appartient à deux cubes, la réunion des sommets de ces deux cubes est connexe ; le segment $[w_1, w_2]$ est connexe), et on peut trouver une constante $c_1(d) \geq 1$ telle que, pour tous $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^d$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathcal{V}(w_1, w_2)$, il existe un chemin de longueur inférieure à $c_1(|x - x'| \vee 1)$ dans $\mathcal{V}(w_1, w_2)$ reliant x_1 à x_2 (on peut supposer que w_1, w_2 appartiennent à des cubes contenant x_1 et x_2 ; la longueur d'un chemin peut alors se majorer par le nombre d'arêtes des cubes précédents, le nombre de cubes se majorant par exemple par le volume d'un cylindre autour du segment $[w_1, w_2]$ les contenant tous).

PROPOSITION 40. – Il existe $c_2 > 3\sqrt{d}, c_3, c_4 > 1$ tels que, si $N_0 \geq 2, L_0 \geq c_2$ et $\tilde{N}_0 \geq 48N_0$, pour tout $a \in (0, 1]$:

$$\mathbb{E}[\rho_1^{a/2}] \leq c_3 \left(\kappa^{-10c_1 L_1} \left(c_4 \tilde{L}_1^{d-2} \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_0 \mathbb{E}[q_0] \right)^{\frac{\tilde{N}_0}{12N_0}} + \sum_{m=0}^{N_0+1} \left(c_4 \tilde{L}_1^{d-1} \mathbb{E}[\rho_0^a] \right)^{\frac{n_0+m-1}{2}} \right).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\omega \in \Omega$. Comme $q_1(\omega) = P_{0,\omega}$ (sortie par le fond de B_1) + $P_{0,\omega}$ (sortie par le bord de B_1), on va commencer par établir des majorations de chacun de ces termes, c'est à dire, en notant :

$$\tilde{T} = \inf \{ n \geq 0 \mid \text{il existe } j \geq 2 \text{ tel que } |X_n \cdot R(e_j)| \geq \tilde{L}_1 \},$$

de $P_{0,\omega}(\tilde{T}_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge T_{L_1+1}^l)$ et de $P_{0,\omega}(\tilde{T} \leq \tilde{T}_{-(L_1-1)}^l \wedge T_{L_1+1}^l)$.

• On commence par le premier terme : probabilité de sortir par le fond plutôt que par le dessus. On se ramène à un problème unidimensionnel en considérant les instants de traversée d'hyperplans parallèles au fond et au dessus, et espacés de L_0 (de façon à faire apparaître ρ_0) : pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note \mathcal{H}_i l'ensemble des points de \mathbb{Z}^d les plus proches de l'hyperplan $\{x \cdot l = iL_0\}$, et on définit la fonction $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{Z}$ par $I(x) = i$ lorsque $x \in [iL_0 - \frac{L_0}{2}, iL_0 + \frac{L_0}{2})$, ainsi que la suite de temps d'arrêts $(V_k)_k$ par :

$$V_0 = 0, \\ V_1 = \inf \{ n \geq 0 \mid X_n \in \mathcal{H}_{I(X_0)-1} \cup \mathcal{H}_{I(X_0)+1} \}$$

et, pour tout $k \geq 1$:

$$V_{k+1} = V_k + V_1 \circ \Theta_{V_k}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on définit encore $\hat{q}(x, \omega) = P_{x,\omega}(X_{V_1} \in \mathcal{H}_{I(x)-1}) = 1 - \hat{p}(x, \omega)$ et, pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$\hat{\rho}(i, \omega) = \sup \left\{ \frac{\hat{q}(x, \omega)}{\hat{p}(x, \omega)} \mid x \in \mathcal{H}_i \text{ et } |R(e_j) \cdot x| < \tilde{L}_1 \text{ pour tout } j \geq 2 \right\}.$$

Enfin, par analogie avec les fonctions harmoniques en dimension 1, on définit la fonction $f : \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq n_0 + 2\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par : pour tout $i \leq n_0 + 2$,

$$f(i, \omega) = \sum_{i \leq m \leq n_0+1} \prod_{m < j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j, \omega)}.$$

En particulier, $f(n_0 + 2, \omega) = 0$ et $f(n_0 + 1, \omega) = 1$. Dans la suite, on notera $f(i)$ au lieu de $f(i, \omega)$. La fonction f est telle qu'en dimension 1 (et si les \mathcal{H}_i sont réduits à un point), \mathbb{P} -p.s., la suite $(f(X_{V_m}))_m$ est une martingale sous $P_{0,\omega}$ par rapport à $(\mathcal{F}_{V_m})_m$; ici, vu la définition de $\hat{\rho}$, en notant :

$$\tau = \inf \{m \geq 0 \mid X_{V_m} \in \mathcal{H}_{n_0+2} \cup \mathcal{H}_{1-n_0} \text{ ou } V_m \geq \tilde{T}\},$$

qui est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_{V_m})_m$, f vérifie :

\mathbb{P} -p.s., $(f \circ I(X_{V_{m \wedge \tau}}))_{m \geq 0}$ est une surmartingale sous $P_{0,\omega}$ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{V_m})_{m \geq 0}$.

En effet, pour tout $m \geq 0$, $f \circ I(X_{V_{m \wedge \tau}})$ est mesurable par rapport à \mathcal{F}_{V_m} (et intégrable), et on a, $P_{0,\omega}$ -p.s. :

$$\begin{aligned} E_{0,\omega}[f \circ I(X_{V_{(m+1) \wedge \tau}}) | \mathcal{F}_{V_m}] &= f \circ I(X_{V_{m \wedge \tau}}) \mathbf{1}_{\{\tau \leq m\}} + E_{0,\omega}[f \circ I(X_{V_{m+1}}), \tau > m | \mathcal{F}_{V_m}] \\ &= f \circ I(X_{V_{m \wedge \tau}}) \mathbf{1}_{\{\tau \leq m\}} + E_{X_{V_m}, \omega}[f \circ I(X_{V_1})] \mathbf{1}_{\{\tau > m\}} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété de Markov pour le second terme; or, $P_{0,\omega}$ -p.s., sur $\{\tau > m\}$, $X_{V_m} \in \mathcal{H}_{I(X_{V_m})}$ et $|R(e_j) \cdot X_{V_m}| < \tilde{L}_1$ pour $j \geq 2$, et donc $\hat{\rho}(I(X_{V_m})) \geq \frac{\hat{q}(X_{V_m})}{\hat{p}(X_{V_m})}$, si bien que, sur cet événement, $P_{0,\omega}$ -p.s. :

$$\begin{aligned} E_{X_{V_m}, \omega}[f \circ I(X_{V_1})] &= f \circ I(X_{V_m}) + \hat{p}(X_{V_m})(f(I(X_{V_m}) + 1) - f(I(X_{V_m}))) + \hat{q}(X_{V_m})(f(I(X_{V_m}) - 1) - f(I(X_{V_m}))) \\ &= f \circ I(X_{V_m}) + \left(-\hat{p}(X_{V_m}) + \hat{q}(X_{V_m}) \frac{1}{\hat{\rho}(I(X_{V_m}))} \right) \prod_{I(X_{V_m}) < j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)} \\ &\leq f \circ I(X_{V_m}), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement $E_{0,\omega}[f \circ I(X_{V_{(m+1) \wedge \tau}}) | \mathcal{F}_{V_m}] = f \circ I(X_{V_{m \wedge \tau}})$, comme voulu.

Cette surmartingale est de plus bornée $P_{0,\omega}$ -p.s. (d'après le choix de τ), et τ est fini $P_{0,\omega}$ -p.s., d'où l'on déduit, par un théorème de convergence des surmartingales et en remarquant que, lorsque $\tilde{T}_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge T_{L_1+1}^l$, $I(X_{V_\tau}) = 1 - n_0$:

$$f(0) \geq E_{0,\omega}[f \circ I(X_{V_\tau})] \geq f(1 - n_0) P_{0,\omega}(\tilde{T}_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge T_{L_1+1}^l),$$

d'où :

$$P_{0,\omega}(\tilde{T}_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge T_{L_1+1}^l) \leq \frac{f(0)}{f(1 - n_0)}.$$

Il restera à estimer $\hat{\rho}$ en fonction de ρ_0 en remarquant que $\hat{p}(x) \geq p_0 \circ t_x$ (un moyen d'atteindre l'hyperplan \mathcal{H}_{i+1} avant \mathcal{H}_{i-1} en partant de $x \in \mathcal{H}_i$ consiste à sortir de la boîte $x + B_0$ par sa face supérieure).

• Majorons maintenant en fonction de ρ_0 la probabilité $P_{0,\omega}(\tilde{T} \leq \tilde{T}_{-(L_1-1)}^l \wedge T_{L_1+1}^l)$ de sortir de B_1 par ses faces latérales (par opposition aux faces supérieure et inférieure, orthogonales à l). Quitte à multiplier le résultat obtenu par $2(d-1)$, on peut se contenter de majorer la probabilité que la marche sorte par la face constituée de points x tels que $x \cdot R(e_2) > \tilde{L}_1$: $P_0(X_{T_{B_1}} \cdot R(e_2) > \tilde{L}_1)$.

L'idée est la suivante : on découpe la demi-boîte $B_1 \cap \{x \cdot R(e_2) \geq 0\}$ en tranches parallèles à la face de sortie : pour atteindre le bord, la marche doit donc traverser chaque tranche. Or l'épaisseur des tranches est choisie de telle sorte que si la marche entre dans une tranche en x_0 et sort successivement des boîtes $B_0^{(1)} = x_0 + B_0$, $B_0^{(2)} = X_{T_{B_0^{(1)}}} + B_0, \dots$ par leur face supérieure, elle quitte la boîte B_1 par sa face supérieure avant d'avoir atteint la tranche suivante. Pour atteindre la face choisie, la marche doit donc, à chacune de ses entrées dans les tranches successives, éviter de suivre les faces supérieures des petites boîtes $B_0^{(i)}$ (intuitivement, l'hypothèse faite sur ρ_B assure que la sortie par la face supérieure de B_0 est la plus probable).

Précisons cela. Comme le nombre de petites boîtes successives traversées par leur face supérieure avant de quitter B_1 est au plus $\frac{2\tilde{L}_1}{\tilde{L}_0}$ (elles se chevauchent à moitié, voir la figure 10), donc inférieur à $2(\lfloor \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_0} \rfloor + 1) = 2(n_0 + 1)$, il suffit, pour que les tranches satisfassent la propriété voulue quel que soit le point d'entrée x_0 , qu'elles aient une épaisseur supérieure à $\tilde{L}_0 = 2(n_0 + 1)\tilde{L}_0$, d'où le nombre suivant de tranches :

$$J = \left\lfloor \frac{\tilde{L}_1}{\tilde{L}_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\tilde{L}_1}{2(n_0 + 1)\tilde{L}_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\tilde{N}_0}{2(n_0 + 1)} \right\rfloor.$$

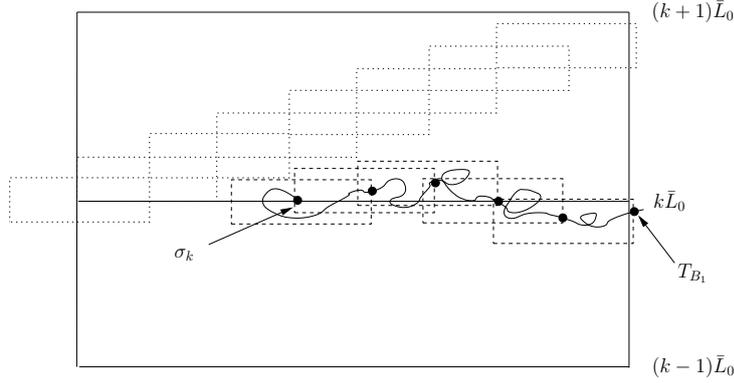


FIG. 10 – Deux des «tranches». Les petites boîtes sont des translattées de B_0 . Les boîtes en pointillés en haut rappellent le choix de l'épaisseur des tranches, et la trajectoire illustre le type d'événement «à éviter» pour quitter B_1 par le côté voulu

Les tranches sont alors, pour $k = 0, \dots, J$:

$$c_{\perp}(k) = \left\{ w \in \mathbb{R}^d \mid w \cdot R(e_2) \in [k, k+1)\bar{L}_0 \text{ et } |w \cdot R(e_j)| < \tilde{L}_1 \text{ pour } j \geq 3 \right\},$$

et l'ensemble des points visitables pendant le parcours qui suit les faces supérieures des boîtes $B_0^{(i)}$ avant de quitter B_1 est contenu dans la tranche «élargie» :

$$\bar{c}(k) = \left\{ x \in \mathbb{Z}^d \mid \min_{w \in c_{\perp}(k)} |x - w|_{\perp} \leq \bar{L}_0 - \tilde{L}_0 = (2n_0 + 1)\tilde{L}_0 \text{ et } x \cdot l \in (-L_1 + 1, L_1 - 1) \right\},$$

où $|z|_{\perp} = \max_{j \geq 2} |z \cdot R(e_j)|$. Notons, pour $k \geq 0$, le temps d'entrée dans la tranche $c_{\perp}(k)$:

$$\sigma_k = \inf \{ n \geq 0 \mid X_n \cdot R(e_2) \geq k\bar{L}_0 \}.$$

Alors, par les considérations précédentes, à l'aide de la propriété de Markov forte (aux instants successifs de sortie des petites boîtes) :

$$P_{X_{\sigma_k}, \omega}(T_{B_1} < \sigma_{k+2}) \geq \left(\inf_{x \in \bar{c}(k)} p_0 \circ t_x(\omega) \right)^{2(n_0+1)} = \psi(k, \omega).$$

On a donc, par propriété de Markov forte en σ_{J-2} :

$$\begin{aligned} P_0(X_{T_{B_1}} \cdot R(e_2) \geq \tilde{L}_1) &\leq P_0(\sigma_J \leq T_{B_1}) \\ &\leq \mathbb{E}[P_{0, \omega}(\sigma_{J-2} < T_{B_1})(1 - \psi(J-2, \omega))] \\ &\leq \mathbb{E}[P_{0, \omega}(\sigma_{J-3} < T_{B_1})(1 - \psi(J-2, \omega))] \end{aligned}$$

et les deux facteurs de l'espérance sont respectivement mesurables par rapport à $\sigma((\omega(y, \cdot))_{y \cdot R(e_2) < (J-3)\bar{L}_0})$ et à $\sigma((\omega(y, \cdot))_{y \cdot R(e_2) \geq (J-3)\bar{L}_0})$, donc indépendants sous \mathbb{P} :

$$P_0(\sigma_J \leq T_{B_1}) \leq P_0(\sigma_{J-3} < T_{B_1})\mathbb{E}[1 - \psi(J-2, \omega)].$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[1 - \psi(k, \omega)] &\leq 2(n_0 + 1)\mathbb{E}\left[1 - \inf_{x \in \bar{c}(J-2)} p_0 \circ t_x\right] \\ &\leq 2(n_0 + 1)|\bar{c}(J-2)|\mathbb{E}[q_0] \\ &\leq c_5(d)\tilde{L}_1^{d-2}\frac{L_1^3}{L_0^2}\tilde{L}_0\mathbb{E}[q_0], \end{aligned}$$

donc, à l'aide d'une récurrence :

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(\sigma_J \leq T_{B_1}) &\leq \left(c_5(d) \tilde{L}_1^{d-2} \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_0 \mathbb{E}[q_0] \right) P_0(\sigma_{J-3} < T_{B_1}) \\ &\leq \left(c_5(d) \tilde{L}_1^{d-2} \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_0 \mathbb{E}[q_0] \right)^{\lfloor \frac{J}{3} \rfloor}. \end{aligned}$$

Comme $\lfloor \frac{J}{3} \rfloor \geq \frac{\tilde{L}_1}{12N_0\tilde{L}_0} = \frac{\tilde{N}_0}{12N_0}$ (en utilisant $\tilde{N}_0 \geq 48N_0$), et puisqu'il y a $2(d-1)$ faces latérales, on obtient :

$$P_{0,\omega}(\tilde{T} \leq \tilde{T}_{-(L_1-1)}^l \wedge T_{L_1+1}^l) \leq 2(d-1) \left(c_5(d) \tilde{L}_1^{d-2} \frac{L_1^3}{L_0^2} \tilde{L}_0 \mathbb{E}[q_0] \right)^{\frac{\tilde{N}_0}{12N_0}}.$$

• Il reste à assembler ces deux majorations pour obtenir la formule annoncée. On a :

$$\rho_1 \leq \frac{A}{(1-A)_+},$$

où $A = P_{0,\omega}(\tilde{T}_{-(L_1-1)}^l < \tilde{T} \wedge T_{L_1+1}^l) + P_{0,\omega}(\tilde{T} \leq \tilde{T}_{-(L_1-1)}^l \wedge T_{L_1+1}^l)$. Sur l'événement :

$$\mathcal{G} = \{ \omega \in \Omega \mid P_{0,\omega}(\tilde{T} \leq \tilde{T}_{-(L_1-1)}^l \wedge T_{L_1+1}^l) \leq \kappa^{9c_1L_1} \}$$

(notons que l'on peut majorer $\mathbb{P}(\mathcal{G}^c)$ grâce à ce que l'on vient d'obtenir), la première majoration donne :

$$\rho_1 \leq \frac{f(0) + f(-n_0 + 1)\kappa^{9c_1L_1}}{(f(-n_0 + 1) - f(0) - f(-n_0 + 1)\kappa^{9c_1L_1})_+}.$$

On a :

$$f(-n_0 + 1) - f(0) = \sum_{m=-n_0+1}^{-1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)} \geq \prod_{-n_0+1 < j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)} + \prod_{0 \leq j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)}.$$

Or, si $x_0 \in \mathcal{H}_i$, il existe un point de $\mathbb{Z}^d \cap \{x \cdot l \geq x_0 \cdot l + L_0 + 1\}$ à distance inférieure à $1 + L_0 + \sqrt{d}$ de x_0 , et donc un chemin de longueur $\leq c_1(1 + L_0 + \sqrt{d})$ de l'un à l'autre restant dans $x_0 + B_0$ (voir au-dessus de l'énoncé de la proposition), d'où (voir aussi la fin de la preuve de la première majoration) :

$$\frac{1}{\hat{\rho}(i)} \geq \hat{p}(x_0) \geq p_0 \circ t_{x_0} \geq \kappa^{c_1(L_0+1+\sqrt{d})} \geq \kappa^{2c_1L_0}$$

($L_0 > 3\sqrt{d} > 1 + \sqrt{d}$). Ceci donne :

$$\prod_{0 \leq j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)} \geq \kappa^{2c_1L_0(n_0+2)} \geq \kappa^{4c_1L_1}$$

et :

$$f(-n_0 + 1) = \sum_{-n_0+1 \leq m \leq n_0+1} \prod_{j=m+1}^{n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)} \leq (2n_0 + 1)\kappa^{-2c_1L_02n_0} \leq 3\frac{L_1}{L_0}\kappa^{-4c_1L_1},$$

d'où :

$$\prod_{0 \leq j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)} - f(-n_0 + 1)\kappa^{9c_1L_1} \geq \kappa^{4c_1L_1} - 3\frac{L_1}{L_0}\kappa^{5c_1L_1} = \kappa^{4c_1L_1} \left(1 - \frac{1}{L_0} 3L_1\kappa^{c_1L_1} \right) \geq 0$$

dès que $L_0 \geq c_2$ où $c_2 = \sup_{L>0} 3L\kappa^{c_1L} < \infty$ (on comprend le choix de \mathcal{G}). Pour $L_0 \geq c_2$, on a donc :

$$f(-n_0 + 1) - f(0) - f(-n_0 + 1)\kappa^{9c_1L_1} \geq \prod_{-n_0+1 \leq j \leq n_0+1} \frac{1}{\hat{\rho}(j)}.$$

On a ainsi minoré le dénominateur par un produit. Comme ci-dessus, si $L_0 \geq c_2$, $f(-n_0 + 1)\kappa^{9c_1L_1} \leq \frac{3L_1\kappa^{5c_1L_1}}{L_0} \leq \frac{3L_1\kappa^{c_1L_1}}{L_0} \leq 1 = f(n_0 + 1) \leq f(0)$, ce qui permet d'écrire, toujours sur \mathcal{G} :

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \left(\prod_{-n_0+1 \leq j \leq n_0+1} \frac{1}{\widehat{\rho}(j)} \right)^{-1} (f(0) + f(-n_0 + 1)\kappa^{9c_1L_1}) \\ &\leq \left(\prod_{-n_0+1 \leq j \leq n_0+1} \widehat{\rho}(j) \right) 2f(0) \\ &\leq \sum_{0 \leq m \leq n_0+1} \left(\prod_{-n_0+1 \leq j \leq m} \widehat{\rho}(j) \right), \end{aligned}$$

d'où, pour tout $a \in (0, 1)$, en utilisant l'inégalité $(u + v)^{a/2} \leq u^{a/2} + v^{a/2}$ ($u, v > 0$), puis l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour séparer termes d'indices j pairs et impairs, et enfin l'indépendance entre les $\widehat{\rho}(j)$ dans les deux familles des termes d'indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\rho^{a/2}, \mathcal{G}] &\leq 2 \sum_{0 \leq m \leq n_0+1} \mathbb{E} \left[\left(\prod_{-n_0+1 \leq j \leq m} \widehat{\rho}(j) \right)^{a/2} \right] \\ &\leq 2 \sum_{0 \leq m \leq n_0+1} \prod_{-n_0+1 \leq j \leq m} \mathbb{E}[(\widehat{\rho}(j))^a]^{1/2}. \end{aligned}$$

Soit $-n_0 + 1 \leq i \leq n_0 + 1$. Quel que soit $x \in \mathcal{H}_i$ vérifiant $|R(e_j) \cdot x| \leq \widetilde{L}_1$ pour tout $j \geq 2$, on a $\frac{\widehat{q}(x)}{\widehat{p}(x)} \leq \rho_0 \circ t_x$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\widehat{\rho}(i))^a] &\leq \mathbb{E}[\max \{(\rho_0 \circ t_x)^a \mid x \in \mathcal{H}_i \text{ et } |R(e_j) \cdot x| \leq \widetilde{L}_1 \text{ pour tout } j \geq 2\}] \\ &\leq c_4 \widetilde{L}_1^{d-1} \mathbb{E}[(\rho_0)^a]. \end{aligned}$$

En associant les inégalités précédentes, on a finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\rho_1^{a/2}] &\leq \mathbb{E}[\rho_1^{a/2}, \mathcal{G}^c] + \mathbb{E}[\rho_1^{a/2}, \mathcal{G}] \\ &\leq \kappa^{-c_1L_1} \mathbb{P}(\mathcal{G}^c) + 2 \sum_{0 \leq m \leq n_0+1} \left(c_4 \widetilde{L}_1^{d-1} \mathbb{E}[\rho_0^a] \right)^{\frac{n_0-1+m}{2}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat de l'énoncé à l'aide de l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}(\mathcal{G}^c) \leq \kappa^{9c_1L_1} P_0(\widetilde{T} \leq \widetilde{T}_{-(L_1-1)}^l \wedge T_{L_1+1}^l)$, et de la majoration de cette dernière probabilité obtenue précédemment. \square

5.3 Récurrence

Commençons par réécrire la majoration précédente sous une forme qui se prête mieux à un raisonnement par récurrence.

On a, puisque $0 < a \leq 1$: $\mathbb{E}[q_0] \leq \mathbb{E}[q_0^a] \leq \mathbb{E}[\rho_0^a]$. Par ailleurs :

$$\widetilde{L}_1^{d-2} \frac{L_1^3}{L_0^2} \widetilde{L}_0 = \widetilde{L}_1^{d-1} L_0 \left(\frac{L_1}{L_0} \right)^3 \frac{\widetilde{L}_0}{\widetilde{L}_1} = \widetilde{L}_1^{d-1} L_0 \frac{N_0^3}{\widetilde{N}_0},$$

et $L_0 \geq 1$ donc, si $N_0^3 = \widetilde{N}_0$, l'inégalité de renormalisation donne :

$$\mathbb{E}[\rho_1^{a/2}] \leq c_3 \left(\kappa^{-10c_1L_1} \left(c_4 \widetilde{L}_1^{d-1} L_0 \mathbb{E}[\rho_0^a] \right)^{\frac{N_0^2}{12}} + \sum_{m=0}^{N_0+1} \left(c_4 \widetilde{L}_1^{d-1} L_0 \mathbb{E}[\rho_0^a] \right)^{\frac{n_0+m-1}{2}} \right).$$

La récurrence va donc porter sur la quantité $\varphi_0 = c_4 \tilde{L}_1^{d-1} L_0 \mathbb{E}[\rho_0^a]$.

Soit $u_0 \in (0, 1)$. Étant donnés $L_0 \geq c_2$ et $3\sqrt{d} \leq \tilde{L}_0 \leq L_0^3$, on définit les suites $(L_k)_{k \geq 0}$, $(\tilde{L}_k)_{k \geq 0}$, $(N_k)_{k \geq 0}$, $(\tilde{N}_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

$$N_0 = \frac{240c_1}{u_0} \text{ et, pour tout } k \geq 0, N_{k+1} = 8N_k \text{ et } \tilde{N}_k = N_k^3;$$

$$\text{pour tout } k \geq 0, L_{k+1} = N_k L_k \text{ et } \tilde{L}_{k+1} = \tilde{N}_k \tilde{L}_k,$$

soit, pour tout k :

$$N_k = N_0 8^k \text{ et } \tilde{N}_k = N_0^3 8^{3k};$$

$$L_k = N_0^k 8^{\frac{k(k-1)}{2}} L_0 \text{ et } \tilde{L}_k = N_0^{3k} 8^{\frac{3k(k-1)}{2}} \tilde{L}_0.$$

PROPOSITION 41. – Il existe une constante $c_6(d) \geq c_2$ telle que : s'il existe des réels $L_0 \geq c_6$, $3\sqrt{d} \leq \tilde{L}_0 \leq L_0^3$, $a_0 \in [0, 1]$, $u_0 \in [\kappa^{\frac{L_0}{d}}, 1]$ satisfaisant :

$$\varphi_0 := c_4 \tilde{L}_1^{d-1} L_0 \mathbb{E}[\rho_0^a] \leq \kappa^{u_0 L_0}.$$

Alors, pour tout $k \geq 0$:

$$\varphi_k := c_4 \tilde{L}_{k+1}^{d-1} L_k \mathbb{E}[\rho_k^{a_k}] \leq \kappa^{u_k L_k},$$

où on a posé $a_k = \frac{a_0}{2^k}$ et $u_k = \frac{u_0}{8^k}$.

DÉMONSTRATION. On raisonne évidemment par récurrence sur k . Soit $k \geq 0$. Supposons $\varphi_k \leq \kappa^{u_k L_k}$. En particulier, on note que $\varphi_k < 1$. Par ce qui précède, on a :

$$\varphi_{k+1} \leq c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{d-1} L_{k+1} \left(\kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \varphi_k^{\frac{N_k^2}{12}} + \sum_{m=0}^{N_k+1} \varphi_k^{\frac{\lfloor N_k \rfloor + m - 1}{2}} \right).$$

De plus, comme $0 \leq \varphi_k \leq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N_k+1} \varphi_k^{\frac{\lfloor N_k \rfloor + m - 1}{2}} &\leq ([N_k] + 2) \varphi_k^{\frac{\lfloor N_k \rfloor - 1}{2}} \\ &\leq L_{k+1} \varphi_k^{\frac{\lfloor N_k \rfloor}{4}}, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \varphi_k^{\frac{N_k^2}{12}} &\leq \kappa^{-10c_1 L_{k+1}} \kappa^{\frac{u_k}{24} L_k N_k^2} \varphi_k^{\frac{N_k^2}{24}} \\ &\leq \varphi_k^{\frac{N_k^2}{24}} \leq \varphi_k^{\frac{N_k}{4}} \end{aligned}$$

car $10c_1 L_{k+1} = 10c_1 L_k N_k = \frac{u_k}{24} L_k N_k^2$ ($u_k = \frac{240c_1}{N_k}$), et $N_k \geq 6$, d'où :

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &\leq c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{d-1} L_{k+1} (L_{k+1} + 1) \varphi_k^{\frac{N_k}{4}} \\ &\leq 2c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{d-1} L_{k+1}^2 \varphi_k^{\frac{N_k}{4}} \\ &\leq \left(2c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{d-1} L_{k+1}^2 \kappa^{\frac{u_k}{8} N_k L_k} \right) \kappa^{\frac{u_k}{8} N_k L_k}. \end{aligned}$$

Comme $N_k L_k = L_{k+1}$ et $\frac{u_k}{8} = u_{k+1}$, il suffit de montrer que le terme dans la parenthèse est inférieur à 1. On remarque que $u_k N_k = 240c_1$, d'où :

$$\begin{aligned} 2c_3 c_4 \tilde{L}_{k+2}^{d-1} L_{k+1}^2 \kappa^{\frac{u_k}{8} N_k L_k} &= 2c_3 c_4 \left(\frac{L_{k+2}}{L_0} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}_0^{d-1} L_{k+1}^2 \kappa^{30c_1 L_k} \\ &\leq 2c_3 c_4 8^{3(d-1)} N_k^{6(d-1)} L_k^{3(d-1)} \kappa^{30c_1 L_k} \end{aligned}$$

en utilisant $L_{k+2} = N_{k+1}N_kL_k = 8N_k^2L_k$ et $\tilde{L}_0 \leq L_0^3$ (hypothèse de la proposition). La fonction $L \mapsto L^{3(d-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{c_1L}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ , d'où $c_8(d) > 0$ tel que, si $L_0 \geq c_8$, pour tout $k \geq 0$, comme $L_k \geq L_0 \geq c_8$ et $\kappa < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} 2c_3c_48^{3(d-1)}N_k^{6(d-1)}L_k^{3(d-1)}\kappa^{30c_1L_k} &\leq N_k^{6(d-1)}\kappa^{29c_1L_k} \\ &\leq \left(\frac{240c_1}{u_0}\right)^{6(d-1)}8^{6k(d-1)}\kappa^{29c_1}\left(\frac{240c_1}{u_0}\right)^k8^{\frac{k(k-1)}{2}}L_0 \end{aligned}$$

Ce dernier terme converge vers 0 uniformément par rapport à $\kappa \in (0, \frac{1}{2})$, $u_0 \in (0, 1)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ lorsque L_0 tend vers $+\infty$. Cela se déduit du fait que, pour tous $x, a, \lambda > 0$, $ae^{-\lambda ax} \leq \frac{e^{-1}}{\lambda x} \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$ uniformément par rapport à a (ce qui résulte d'une simple étude de fonction). Il existe donc $c_9(d)$ tel que, si $L_0 \geq c_9$, ce terme est majoré par 1 pour tout $k \geq 1$. Et pour $k = 0$ ce terme est égal à :

$$\left(\frac{240c_1}{u_0}\right)^{6(d-1)}\kappa^{29c_1L_0} \leq u_0^{-6d}\kappa^{6L_0} \leq 1$$

pour $L_0 \geq c_6(d) \geq c_9$, et d'après la condition sur u_0 dans l'énoncé du lemme. On a donc finalement, si $L_0 \geq c_9$:

$$\varphi_{k+1} \leq \kappa^{u_{k+1}L_{k+1}},$$

ce qui achève la récurrence. \square

5.4 Fin de la preuve

De la récurrence on déduit :

COROLLAIRE 42. – Il existe des constantes $c_{10}(d) > 3\sqrt{d}$, $c_{11}(d) > 1$ telles que : si des réels $L_0 \geq c_{10}$, $3\sqrt{d} < \tilde{L}_0 \leq L_0^3$, $a_0 \in (0, 1]$ et une rotation R satisfont, avec $B_0 = B(R, L_0 - 1, L_0 + 1, \tilde{L}_0)$:

$$c_{11} \left(\ln \frac{1}{\kappa}\right)^{3(d-1)} \tilde{L}_0^{d-1} L_0^{3(d-1)+1} \mathbb{E}[\rho_0^{a_0}] < 1,$$

alors, pour $\rho > 0$ assez petit et $l = R(e_1)$:

$$\text{pour tous } b, \tilde{b} > 0, \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L \exp(-\rho(\ln L)^{1/2})} \ln P_0(\tilde{T}_{-\tilde{b}L}^l < T_{bL}^l) < 0.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit de voir que l'on peut trouver $u_0 \in [\kappa^{\frac{L_0}{d}}, 1]$ pour lequel la condition initiale de la récurrence précédente est vérifiée, c'est à dire $c_4\tilde{L}_1^{d-1}L_0\mathbb{E}[\rho_0^{a_0}] = \varphi_0 \leq \kappa^{u_0L_0}$. Or on a, pour tout u_0 :

$$\tilde{L}_1^{d-1}L_0\kappa^{-u_0L_0} = \frac{(240c_1)^{3(d-1)}\tilde{L}_0^{d-1}L_0}{u_0^{3(d-1)}\kappa^{u_0L_0}}$$

(en écrivant $\tilde{L}_1 = \tilde{N}_0\tilde{L}_0$), et une simple étude de fonction montre que le maximum sur $[\kappa^{\frac{L_0}{d}}, 1]$ de $u \mapsto u^{3(d-1)}\kappa^{uL_0}$ est de la forme $c(d)\left(L_0 \ln \frac{1}{\kappa}\right)^{-3(d-1)}$, donc la condition est satisfaite pour un certain u_0 si et seulement si :

$$\frac{c_4(240c_1)^{3(d-1)}}{c} \left(L_0 \ln \frac{1}{\kappa}\right)^{3(d-1)} \tilde{L}_0^{d-1}L_0\mathbb{E}[\rho_0^{a_0}] < 1,$$

ce qui est vérifié sous la condition de l'énoncé si $c_{11} \geq \frac{c_4(240c_1)^{3(d-1)}}{c}$. En prenant c_{11} assez grand, on a donc $c_{11} > 1$ et, sous la condition de l'énoncé, il existe u_0 tel que $\varphi_0 \leq \kappa^{u_0L_0}$ et par conséquent, pour tout k , $\varphi_k \leq \kappa^{u_kL_k}$ ce qui donne en particulier :

$$\mathbb{E}[q_k] \leq \mathbb{E}[q_k^{a_k}] \leq \mathbb{E}[\rho_k^{a_k}] \leq \frac{\kappa^{u_kL_k}}{c_4\tilde{L}_{k+1}^{d-1}L_k} \leq \kappa^{u_kL_k}.$$

Supposons ceci vérifié. Soit $b, \tilde{b} > 0$. Soit $L > L_0$. Il existe $k \geq 0$ tel que $L_k \leq \tilde{b}L < L_{k+1}$. Une manière de réaliser l'événement $\tilde{T}_{-\tilde{b}L}^l > T_{bL}^l$ consiste pour la marche à sortir de B_k par sa face supérieure puis à nouveau sortir de la boîte translaturée $X_{T_{B_k}} + B_k$ par sa face supérieure, etc., et ceci $\left\lfloor \frac{bL}{L_k} \right\rfloor + 1$ fois. Au cours de cette procédure de traversée de $\left\lfloor \frac{bL}{L_k} \right\rfloor + 1$ boîtes B_k translaturées, l'ensemble des points visités par la marche est inclus dans :

$$C = \left\{ x \in \mathbb{Z}^d \mid |x|_{\perp} \leq \frac{bL}{L_k} \tilde{L}_k \text{ et } x \cdot l \in (-\tilde{b}L, bL) \right\}.$$

Ainsi, en définissant l'événement :

$$\mathcal{H} = \{ \text{il existe } x \in C \text{ tel que } q_k \circ t_x \geq \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k} \},$$

on a $\mathbb{P}(\mathcal{H}) \leq |C| \kappa^{-\frac{1}{2}u_k L_k} \mathbb{E}[q_k] \leq |C| \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k}$ et, sur \mathcal{H}^c , par la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} P_{0,\omega}(\tilde{T}_{-\tilde{b}L}^l > T_{bL}^l) &\geq (1 - \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k})^{\left\lfloor \frac{bL}{L_k} \right\rfloor + 1} \\ &\geq 1 - \left(\left\lfloor \frac{bL}{L_k} \right\rfloor + 1 \right) \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P_0(\tilde{T}_{-\tilde{b}L}^l < T_{bL}^l) &\leq \mathbb{P}(\mathcal{H}) + \mathbb{P}(\tilde{T}_{-\tilde{b}L}^l < T_{bL}^l, \mathcal{H}^c) \\ &\leq \left(|C| + \left\lfloor \frac{bL}{L_k} \right\rfloor + 1 \right) \kappa^{\frac{1}{2}u_k L_k} \\ &\leq \exp\left(-\mu(\tilde{b}L) \exp\left(-\rho(\ln(\tilde{b}L))^{1/2}\right)\right) \end{aligned}$$

avec μ et ρ indépendants de k et L . Pour obtenir la dernière ligne, on note que le terme $|C| + \left\lfloor \frac{bL}{L_k} \right\rfloor + 1$ est polynomial en $L_k \leq L$ ($L \leq L_{k+1}$), et : $u_k L_k = \frac{u_k}{N_k} L_{k+1} \geq \tilde{c} \exp(-ck) \tilde{b}L$, or $\ln L_k \sim_k \frac{k^2}{2} \ln 8$ d'où $k \leq c'(\ln L_k)^{1/2} \leq c'(\ln \tilde{b}L)^{1/2}$. Ceci démontre le corollaire. \square

On peut maintenant achever la preuve du théorème 39 :

On pose $c = 2^{d-1} c_{11}$ et $c' = c_{10}$. Supposons l'hypothèse du théorème 39 vérifiée (avec ces constantes c et c'). Alors, en notant $\tilde{L}' = (\tilde{L} + 1) \wedge L^3 > \tilde{L}$, on a $\tilde{L}' \leq 2\tilde{L}$ et donc :

$$c_{11} \left(\ln \frac{1}{\kappa} \right)^{3(d-1)} (\tilde{L}')^{d-1} L^{3(d-1)+1} \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a] < 1.$$

Pour toute rotation R' suffisamment proche de R , en notant $\mathcal{B}' = B(R', L-1, L+1, \tilde{L}')$, on a de plus $p_{\mathcal{B}} \leq p_{\mathcal{B}'}$ (on rappelle que $\mathcal{B} = B(R, L-2, L+2, \tilde{L})$ et $\tilde{L} < \tilde{L}'$), et donc $\rho_{\mathcal{B}'} \leq \rho_{\mathcal{B}}$, si bien que l'on peut appliquer le corollaire précédent à cette boîte \mathcal{B}' . Autrement dit, pour tout l' dans un voisinage de l ($l' = R'(e_1)$), pour $\rho > 0$ assez petit,

$$\text{pour tous } b, \tilde{b} > 0, \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L \exp(-\rho(\ln L)^{1/2})} \ln P_0(\tilde{T}_{-\tilde{b}L}^{l'} < T_{bL}^{l'}) < 0.$$

6 Condition (T')

6.1 Définitions

L'énoncé du critère effectif a fait apparaître une condition plus faible que (T); on va s'y intéresser de plus près dans cette partie.

DÉFINITIONS. – Soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, $a > 0$, et $\gamma \in (0, 1]$. La marche aléatoire $(X_n)_n$ satisfait la condition $(T)_\gamma$ relativement à la direction l et au réel $a > 0$, que l'on abrège en $(T)_\gamma|l, a$, si les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) P_0 -presque sûrement, $\lim_n X_n \cdot l = \infty$;
- (ii) il existe $c > 0$ tel que $E_0[\exp(c(X_{\tau_1}^*)^\gamma)] < \infty$,

τ_1 étant défini selon la direction l et avec le paramètre a .

Cette marche satisfait la condition (T') relativement à la direction l et au réel $a > 0$, que l'on abrège en $(T')|l, a$ si elle satisfait $(T)_\gamma|l, a$ pour tous $\gamma \in (0, 1)$.

On remarque que la condition $(T)_1$ est la condition (T), et que, pour $\gamma < \eta$, $(T)_\eta|l, a$ implique $(T)_\gamma|l, a$. En particulier, $(T)|l, a$ implique donc $(T')|l, a$, qui implique $(T)_\gamma|l, a$ pour tout $\gamma \in (0, 1)$.

De la même manière que pour la condition (T), le paramètre a va s'avérer ne jouer aucun rôle (comme le montrera le théorème 46).

6.2 Une importante majoration de grandes déviations

Sous l'hypothèse $(T)_\gamma$ (ou (T')), la variable $X_{\tau_1}^*$ n'est pas exponentiellement intégrable, si bien que les méthodes de grandes déviations les plus simples, basées sur la transformée de Laplace, ne peuvent s'appliquer directement. On utilisera à la place le résultat plus général suivant :

THÉORÈME 43. – Soit $\gamma \in (0, 1]$. On suppose que $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires centrées i.i.d. sous la probabilité P vérifiant :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^\gamma} \ln P(|X_1| > u) < 0.$$

Pour tous $c > 0$, $\rho \in (\frac{1}{2}, 1]$, on a alors :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{(\gamma\rho) \wedge (2\rho-1)}} \ln \sup_{1 \leq k \leq n} P(|X_1 + \dots + X_k| > cn^\rho) < 0.$$

DÉMONSTRATION. Notons qu'il suffit de faire la preuve pour $X_1 + \dots + X_k$ au lieu de $|X_1 + \dots + X_k|$, et que l'on peut supposer que X_1 n'est pas presque sûrement égal à 0.

• Commençons par le cas le plus simple : $\gamma = 1$. Dans ce cas, les méthodes usuelles fonctionnent puisque, pour a suffisamment petit, $E[e^{aX_1}] = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{au} P(X_1 > u) du < \infty$. Soit $\rho \in (\frac{1}{2}, 1]$ et $c > 0$. Pour tout $\lambda > 0$, on a : pour $k = 1, \dots, n$,

$$P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) \leq e^{-\lambda c^\rho n^\rho} E[e^{\lambda X_1}]^k \leq e^{-\lambda c^\rho n^\rho} E[e^{\lambda X_1}]^n = e^{-\lambda c^\rho n^\rho + nH(\lambda)},$$

où $H(\lambda) = \ln E[e^{\lambda X_1}]$. Vu l'hypothèse sur X_1 , la fonction H est finie et indéfiniment dérivable au voisinage de 0, $H(0) = 0$ et $H'(0) = E[X_1] = 0$, de sorte que $H(\lambda) = O_{\lambda \rightarrow 0}(\lambda^2)$: il existe $C > 0$ tel que, pour λ assez petit, $H(\lambda) \leq C\lambda^2$. Ainsi, pour λ petit, pour tout n ,

$$\sup_{1 \leq k \leq n} P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) \leq e^{-\lambda c^\rho n^\rho + C\lambda^2 n}.$$

Prenons $\lambda = \varepsilon n^{\rho-1}$ (on voit facilement que le choix de la puissance $\rho - 1$ est optimal), où ε est suffisamment petit pour que $\varepsilon c^\rho > C\varepsilon^2$. Alors l'inégalité précédente donne, puisque $\lambda \rightarrow_n 0$ (ou en prenant ε assez petit si $\rho = 1$) :

$$\limsup_n \frac{1}{n^{2\rho-1}} \ln \sup_{1 \leq k \leq n} P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) \leq -(\varepsilon c^\rho - C\varepsilon^2) < 0,$$

comme annoncé puisque $\rho \leq 1$.

• Supposons maintenant $\gamma < 1$ et $2\rho - 1 \leq \gamma\rho$ (donc nécessairement $\rho < 1$). On applique ici l'inégalité de Cramer-Tchernoff une fois correctement tronquées les variables X_1, \dots, X_n . Pour tous $\lambda, \delta > 0$, pour $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) &\leq nP(|X_1| > \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}}) + P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho, \sup_i |X_i| \leq \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}}) \\ &\leq nP(|X_1| > \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}}) + e^{-\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} cn^\rho} \left(E \left[e^{\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1}, |X_1| \leq \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}} \right] \vee 1 \right)^n. \end{aligned}$$

On choisit $\nu > 0$ tel que, si $|u| \leq 1$, $|e^u - 1 - u| \leq \nu u^2$. Pour tout $0 < \varepsilon < (1 - \rho) \wedge \left(\frac{2\rho-1}{\gamma}\right)$ et pour n grand, si $|X_1| \leq n^\varepsilon$, alors $\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} |X_1| \leq \lambda n^{\varepsilon-(1-\rho)} < 1$, d'où :

$$\begin{aligned} E \left[e^{\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1}, |X_1| \leq \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}} \right] &\leq E \left[1 + \frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1 + \nu \frac{\lambda^2}{n^{2-2\rho}} X_1^2, |X_1| \leq n^\varepsilon \right] + E \left[\exp \left(\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1 \right), n^\varepsilon < |X_1| < \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}} \right] \\ &\leq 1 + \nu \frac{\lambda^2}{n^{2-2\rho}} E[X_1^2] - \frac{\lambda}{n^{1-\rho}} E[X_1, |X_1| > n^\varepsilon] + E \left[\exp \left(\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1 \right), n^\varepsilon < |X_1| < \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}} \right] \end{aligned}$$

en utilisant le fait que, X_1 étant centrée, $E[X_1, |X_1| \leq n^\varepsilon] = -E[X_1, |X_1| > n^\varepsilon]$. L'hypothèse sur X_1 fournit $\mu > 0$ tel que, pour n grand, $P(|X_1| > L) \leq e^{-\mu L^\gamma}$, et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$E[X_1, |X_1| > n^\varepsilon] \leq E[X_1^2]^{1/2} P(|X_1| > n^\varepsilon)^{1/2} \leq E[X_1^2]^{1/2} e^{-\frac{\mu}{2} n^{\gamma\varepsilon}}.$$

D'autre part, pour une variable aléatoire X quelconque et des réels $0 \leq a < b$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned} E[e^{\lambda X}, a < |X| < b] &= E[e^{\lambda X}, -b < X < -a] + \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{\lambda u} P(X > u, a < X < b) du \\ &\leq e^{-\lambda a} P(-b < X < -a) + e^{\lambda a} P(a < X < b) + \int_a^b \lambda e^{\lambda u} P(X > u, a < X < b) du \\ &\leq P(|X| > a) (e^{-\lambda a} + e^{\lambda a}) + \int_a^b \lambda e^{\lambda u} P(X > u) du. \end{aligned}$$

Appliquée à la situation présente, cette inégalité implique, pour n grand :

$$\begin{aligned} E \left[\exp \left(\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1 \right), n^\varepsilon < |X_1| < \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}} \right] &\leq 3e^{-\mu n^{\gamma\varepsilon}} + \int_{n^\varepsilon}^{\delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}}} \frac{\lambda}{n^{1-\rho}} \exp \left(\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} u \right) P(X_1 > u) du \\ &\leq 3e^{-\mu n^{\gamma\varepsilon}} + \frac{\lambda}{n^{1-\rho}} \int_{n^\varepsilon}^{\delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}}} \exp \left(\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} u - \mu u^\gamma \right) du. \end{aligned}$$

Comme $\frac{2\rho-1}{\gamma} + \rho - 1 \leq 2\rho - 1$, il apparaît qu'en choisissant δ et λ petits (par rapport à μ), pour n grand, la fonction $u \mapsto \frac{\lambda}{n^{1-\rho}} u - \frac{\mu}{2} u^\gamma$ est négative sur $[n^\varepsilon, \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}}]$, donc la quantité précédente est inférieure à :

$$3e^{-\mu n^{\gamma\varepsilon}} + \frac{\lambda}{n^{1-\rho}} \int_{n^\varepsilon}^{\infty} \exp \left(-\frac{\mu}{2} u^\gamma \right) du \leq \exp \left(-\frac{\mu}{3} n^{\gamma\varepsilon} \right).$$

En revenant à une majoration antérieure, on a donc, pour n grand :

$$E \left[e^{\frac{\lambda}{n^{1-\rho}} X_1}, |X_1| \leq \delta n^{\frac{2\rho-1}{\gamma}} \right] \leq 1 + 2\nu \frac{\lambda^2}{n^{2-2\rho}} E[X_1^2] \leq \exp \left(2\nu \frac{\lambda^2}{n^{2-2\rho}} E[X_1^2] \right)$$

et, finalement :

$$\sup_{1 \leq k \leq n} P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) \leq n \exp(-\mu \delta^\gamma n^{2\rho-1}) + \exp(-(\lambda c - 2\nu \lambda^2 E[X_1^2]) n^{2\rho-1}),$$

ce qui fournit le résultat en prenant λ suffisamment petit.

• Il reste le cas où $\gamma < 1$ et $2\rho - 1 > \gamma\rho$. On procède de manière voisine du cas précédent. Pour $\lambda, \delta > 0$ et $1 \leq k \leq n$, on écrit ici :

$$P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) \leq nP(|X_1| > \delta n^\rho) + e^{-\frac{\lambda}{n^{(1-\gamma)\rho}} cn^\rho} \left(E \left[e^{\frac{\lambda}{n^{(1-\gamma)\rho}} X_1}, |X_1| \leq \delta n^\rho \right] \vee 1 \right)^n,$$

et en choisissant $0 < \varepsilon < (1 - \gamma)\rho$ et λ et δ petits, on a, pour n grand, comme précédemment :

$$E \left[e^{\frac{\lambda}{n^{(1-\gamma)\rho}} X_1}, |X_1| \leq \delta n^\rho \right] \leq 1 + 2\nu \frac{\lambda^2}{n^{2(1-\gamma)\rho}} E[X_1^2],$$

ce qui donne finalement :

$$\sup_{1 \leq k \leq n} P(X_1 + \dots + X_k \geq cn^\rho) \leq n \exp(-\mu \delta^\gamma n^{\gamma\rho}) + \exp(-\lambda cn^{\gamma\rho} + 2\nu \lambda^2 E[X_1^2] n^{2\gamma\rho - 2\rho + 1}).$$

Vu l'hypothèse sur ρ , on a $2\gamma\rho - 2\rho + 1 < \gamma\rho$, d'où le résultat voulu. \square

REMARQUE. Les aspects techniques de la preuve (choix des bonnes troncatures, etc.) n'éclairent pas sur la signification intuitive de l'exposant $(\gamma\rho) \wedge (2\rho - 1)$. On peut la comprendre de la façon suivante : l'exposant $\gamma\rho$ correspond au cas où l'une des variables X_i est supérieure à cn^ρ (éventuellement à un facteur logarithmique près), tandis que $2\rho - 1$ traduit un comportement opposé dans lequel les variables sont distribuées près de leur moyenne : si $\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$ admet presque une loi gaussienne de variance à peu près indépendante de n (comme peut le suggérer le théorème central limite), alors la probabilité : $P(X_1 + \dots + X_n \geq cn^\rho) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \geq cn^{\rho-1/2}\right)$ est approximativement majorée par la queue d'une distribution gaussienne, soit comme $\exp(-\lambda(cn^{\rho-1/2})^2)$, ce qui donne l'exposant $2\rho - 1$. Tout ceci n'a pas bien sûr vocation de preuve, mais met en évidence dans l'énoncé du théorème la concurrence entre deux phénomènes : l'existence d'une variable atypique et le comportement moyen.

6.3 Condition équivalente

La majoration de grandes déviations précédente permet de généraliser de nombreux résultats de (T) à $(T)_\gamma$ ou (T') . Dans ce paragraphe, on démontre des versions du théorème 17 et du corollaire 18 relatives à $(T)_\gamma$, dans l'optique de la remarque qui suit l'énoncé du théorème 39.

Tout d'abord, remarquons que, sous $(T)_\gamma|l, a$, et donc sous $(T')|l, a$, $X_{\tau_1}^*$ est P_0 -intégrable, si bien que la preuve de la prop 14 reste valable : il y a existence d'une direction asymptotique \hat{v} .

Avec les notations de la partie 3.2, on dispose alors du lemme suivant (cf. lemme 15) :

LEMME 44. – On suppose $(T)_\gamma|l$ où $\gamma \in (0, 1]$, $l \in \mathbb{S}^{d-1}$. Pour tous $c > 0$ et $\rho \in (\frac{1}{2}, 1]$, on a :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{(2\rho-1) \wedge \gamma\rho}} \ln P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq cu^\rho \right) < 0,$$

où l'on rappelle que $L_u^l = \sup \{n \geq 0 \mid X_n \cdot l \leq u\}$.

DÉMONSTRATION. La preuve du lemme 15 reste valable jusqu'à l'inégalité :

$$\begin{aligned} P_0 \left(\sup_{0 \leq n \leq L_u^l} |\pi(X_n)| \geq cu^\rho \right) &\leq \sum_{1 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0(X_{\tau_k} \cdot w > \frac{cu^\rho}{3}) + P_0((X_{\tau_k} - X_{\tau_1}) \cdot w > \frac{cu^\rho}{3}) \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq \frac{u}{a}} P_0(X^* \circ \Theta_{\tau_k} > \frac{cu^\rho}{3}). \end{aligned}$$

Le premier et le dernier termes du membre de droite sont majorés par $\exp(-\mu u^{\gamma\rho})$ pour un certain $\mu > 0$, par simple utilisation de la condition $(T)_\gamma$ et d'une majoration par une inégalité de type Cramer-Tchernoff,

tandis que le terme restant est majoré par $\exp(-\mu' u^{(\gamma\rho) \wedge (2\rho-1)})$ où $\mu' > 0$, à l'aide du théorème 43 montré juste avant. \square

De là on déduit, toujours avec les mêmes notations que page 22 :

PROPOSITION 45. – Sous $(T)_\gamma$, pour tous $\varepsilon, a, r > 0$, on a :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^\gamma} \ln P_0(T_{au}^{\hat{v}} > T_{\text{Cyl}_{\varepsilon, a, r}^u}) < 0.$$

DÉMONSTRATION. Le principe de la preuve de la prop 16 fonctionne toujours en faisant appel au lemme précédent, et en utilisant $(T)_\gamma$ pour majorer $P_0(X_{\tau_1}^* \geq \frac{\varepsilon(\hat{v} \cdot l) - r}{2})$. \square

On peut maintenant énoncer :

THÉORÈME 46. – Soit $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, $a > 0$ et $\gamma \in (0, 1]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $b, r > 0$ et, pour L grand, des parties (finies) $\Delta_L \subset \mathbb{Z}^d$ satisfaisant $0 \in \Delta_L \leq \{l_0 \cdot x \geq -bL\} \cap \mathbb{B}^d(0, rL)$ et :

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\gamma} \ln P_0 \left(X_{T_{\Delta_L}} \notin \partial_0 \Delta_L \right) < 0,$$

où $\partial_0 \Delta_L = \partial \Delta_L \cap \{l_0 \cdot x \geq L\}$;

- (ii) la condition $(T)_\gamma$ relative à l_0 et a est vérifiée ;
 (iii) la condition $(T)_\gamma$ est vérifiée pour tous $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ dans un voisinage de l_0 , $a > 0$.

De plus, si l'une de ces conditions est vérifiée, on peut définir $\hat{v} = \lim_n \frac{X_n}{|X_n|}$ via la proposition 14, et la condition $(T)_\gamma$ est satisfaite relativement à $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $a > 0$ si et seulement si $l \cdot \hat{v} > 0$.

DÉMONSTRATION. Toute la preuve du théorème 17 s'adapte sans difficulté à l'aide de la proposition précédente et de l'inégalité $(u+v)^\gamma \leq u^\gamma + v^\gamma$ pour tous $u, v \geq 0$, qui nécessite $\gamma \in (0, 1]$ (la fonction $u \mapsto (u+v)^\gamma - u^\gamma - v^\gamma$ est nulle en 0 et décroissante sur \mathbb{R}_+). \square

Et on a également, toujours comme dans la partie 3.3 :

COROLLAIRE 47. – Soit $l_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, et $\gamma \in (0, 1]$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la condition $(T)_\gamma$ relative à l_0 est vérifiée ;
 (ii) pour tout l dans un voisinage de l_0 , pour tout $b > 0$, on a : $\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^\gamma} \ln P_0 \left(\tilde{T}_{-bL}^l < T_L^l \right) < 0$.

6.4 Retour au critère effectif

À l'aide des résultats précédents, on peut améliorer l'énoncé du critère effectif :

THÉORÈME 48. – Soit $d \geq 2$. Il existe des constantes $c, c' > 1$ telles que, pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et tout $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $a \in [0, 1]$, R une rotation telle que $R(e_1) = l$, et des réels $L \geq c'$, $3\sqrt{d} \leq \tilde{L} < L^3$ tels que, avec $B = B(R, L-2, L+2, \tilde{L})$:

$$c \left(\ln \frac{1}{\kappa} \right)^{3(d-1)} \tilde{L}^{d-1} L^{3(d-1)+1} \mathbb{E}[\rho_B^a] < 1;$$

- (ii) la condition $(T')|l$ est vérifiée ;
 (iii) la condition $(T)_\gamma|l$ est vérifiée.

DÉMONSTRATION. • On a déjà vu (cf. la remarque après l'énoncé du théorème 39) que (i) implique (ii). De plus, l'implication (ii) \Rightarrow (iii) est évidente.

• Il reste donc à voir que (iii) implique (i), c'est à dire que le critère est vérifié sous la condition $(T)_\gamma|l$ quel que soit $\gamma \in (\frac{1}{2}, 1)$. On va majorer $\mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a]$ où $\mathcal{B} = B(R, L-2, L+2, \tilde{L})$ avec \tilde{L} de la forme $\tilde{L} = AL$ et $R(e_1) = l$. On choisit $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ (en fonction de $l \cdot \hat{v}$) de sorte que, pour tout $L > 0$, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$P_{0,\omega}(T_{2LA}^{\hat{v}} = T_{\text{Cyl}_{\varepsilon,\varepsilon,2A}^L}) \leq p_{\mathcal{B}}(\omega).$$

Alors, pour tout $a \in (0, 1)$, $c > 0$, pour L grand :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a] &\leq \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a, p_{\mathcal{B}} \geq e^{-cL^\gamma}] + \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a, p_{\mathcal{B}} < e^{-cL^\gamma}] \\ &\leq e^{acL^\gamma} \mathbb{E}[q_{\mathcal{B}}^a] + \kappa^{-2c_1La} \mathbb{P}(q_{\mathcal{B}} \geq 1 - e^{-cL^\gamma}) \\ &\leq e^{acL^\gamma} \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}]^a + \kappa^{-2c_1La} (1 - e^{-cL^\gamma})^{-1} \mathbb{E}[q_{\mathcal{B}}] \\ &\leq e^{acL^\gamma} P_0(T_{2LA}^{\hat{v}} > T_{\text{Cyl}_{\varepsilon,\varepsilon,2A}^L})^a + 2\kappa^{-2c_1La} P_0(T_{2LA}^{\hat{v}} > T_{\text{Cyl}_{\varepsilon,\varepsilon,2A}^L}) \end{aligned}$$

puisque $p_{\mathcal{B}} \geq \kappa^{2c_1L}$ (voir page 59) et en utilisant l'inégalité de Jensen ($0 < a < 1$); or $(T)_\gamma|l$ fournit $\mu > 0$ tel que, pour L grand, $P_0(T_{2LA}^{\hat{v}} > T_{\text{Cyl}_{\varepsilon,\varepsilon,2A}^L}) \leq e^{-\mu L^\gamma}$, donc :

$$\mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^a] \leq e^{acL^\gamma - \mu a L^\gamma} + 2e^{2c_1La \ln \frac{1}{\kappa} - \mu L^\gamma}.$$

On choisit a de la forme $a = L^{-\alpha}$ où $\alpha > 0$. Pour que le majorant ci-dessus ne diverge pas vers $+\infty$, α doit vérifier $\alpha < \gamma$ et $1 - \alpha < \gamma$. Ceci n'est possible que si $\gamma > \frac{1}{2}$ et dans ce cas on a alors en prenant $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{\gamma - \frac{1}{2}}} \mathbb{E}[\rho_{\mathcal{B}}^{L^{-\frac{1}{2}}}] < 0.$$

Le critère est donc facilement satisfait en choisissant L assez grand. Ceci achève la preuve du théorème 48.

□

REMARQUES.

- Ce théorème montre en particulier que (T') équivaut à $(T)_\gamma$ pour n'importe quel $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. Il est donc naturel de se demander si l'équivalence tient toujours pour $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ou pour $\gamma = 1$ (il s'agit alors de la condition (T)). Dans son article, Sznitman émet la conjecture que (T) et (T') sont équivalentes.
- On déduit aussi de ce théorème que l'ensemble des lois μ sur \mathcal{P}_κ pour lesquelles la condition $(T')|l$ est vérifiée est un ouvert pour la topologie de la convergence étroite (sur $\mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa)$, l'espace \mathcal{P}_κ étant muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^{2d} , qui le rend compact). En effet, pour une boîte \mathcal{B} et un réel $a \in (0, 1]$ fixés, la fonction $\omega \mapsto \rho_{\mathcal{B}}^a(\omega)$ est continue bornée sur $\mathcal{P}_\kappa^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit ($p_{\mathcal{B}}(\omega)$ est limite uniforme de $P_{0,\omega}(X_{T_{\mathcal{B}}} \in \partial_+ \mathcal{B}, T_{\mathcal{B}} \leq M)$ lorsque M tend vers $+\infty$ et, en énumérant les chemins possibles, cette probabilité s'écrit comme une fonction polynomiale à coefficients positifs en les $\omega(x, e)$ où $x \in \mathcal{B}$, $|e| = 1$), de sorte que $\mu \mapsto \int \rho_{\mathcal{B}}^a d\mu^{\otimes \mathbb{Z}^d} = \int \rho_{\mathcal{B}}^a d\mu^{\otimes \mathcal{B}}$ est continue.

6.5 Généralisations

La section précédente fournit un critère pour une condition plus faible que (T) . Cependant, cette condition suffit à avoir des résultats très voisins de ceux obtenus sous (T) , en particulier la convergence balistique.

6.5.1 Balisticité

La plupart des résultats s'étend de (T) à (T') en utilisant essentiellement le lemme 44 montré plus haut pour adapter les preuves.

Comme pour (T) , il s'agit de montrer que τ_1 est intégrable sous P_0 et on dispose en fait du même résultat que pour (T) :

THÉORÈME 49. – Sous (T') , pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $l \cdot \hat{v} > 0$ et tout $a > 0$ (paramètres de définition de τ_1), on a :

$$\text{pour tout } \zeta < \frac{2d}{d+1}, \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\zeta} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

Pour démontrer ceci, on commence par la réduction suivante (dont la conclusion est légèrement plus faible que celle de la proposition 28) :

PROPOSITION 50. – On suppose (T')|l. Si $\beta \in (0, 1)$ est tel que :

$$\text{pour tout } c > 0, \limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln \mathbb{P}(P_{0,\omega}(X_{T_{U\beta,L}} \cdot l > 0) \leq e^{-cL^\beta}) < 0,$$

alors :

$$\text{pour tout } \zeta < \frac{1}{\beta}, \limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^\zeta} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0.$$

DÉMONSTRATION. La seule modification à apporter tient dans la majoration suivante : pour tout $\gamma \in (0, 1)$, pour tout $u > 0$,

$$P_0(\tau_1 > T_{C_{L(u)}}) \leq P_0\left(\sup_{0 \leq n \leq \tau_1} |X_k| \leq \frac{L(u)}{2}\right) \leq e^{-c\frac{L(u)^\gamma}{2^\gamma}} E_0[e^{c(X_{\tau_1}^*)^\gamma}],$$

d'où par l'hypothèse (T) $_\gamma$, pour c assez petit :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{L(u)^\gamma} \ln P_0(\tau_1 > T_{C_{L(u)}}) \leq -\frac{c}{2} < 0.$$

La majoration finale devient donc : pour tout $\gamma \in (0, 1)$,

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln u)^{\gamma/\beta}} \ln P_0(\tau_1 > u) < 0,$$

comme annoncé. \square

D'après le lemme de renormalisation 31 et la preuve du corollaire 32, il suffit de démontrer que le résultat de la proposition 30 reste vérifié :

PROPOSITION 51. – On suppose (T'). Soit $\beta_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ Pour tous $\rho > 0, \beta \in [\beta_0, 1)$,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^{\beta+\beta_0-1}} \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \ln \mathbb{P}(X_{\beta_0,L}(w) \geq \rho L^\beta) < 0.$$

DÉMONSTRATION. La preuve de la proposition 30 reste valable en utilisant le lemme 44 : en notant $\rho = \beta_0/\chi$, $\rho < 1$ donc, pour γ proche de 1, $(2\rho - 1) \wedge (\gamma\rho) = 2\rho - 1$, et l'inégalité du lemme s'écrit alors de la même manière que sous (T). Ainsi, tout fonctionne de même. \square

On a donc obtenu :

THÉORÈME 52. – Sous la condition (T'), on a : P_0 -p.s., $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{v} v = \frac{E_0[X_{\tau_1}|D = \infty]}{E_0[\tau_1|D = \infty]}$.

Le théorème central limite 38 se généralise également sans aucune difficulté vu que l'on a $E_0[\tau_1^2|D = \infty] < \infty$ sous (T') (d'après le théorème 49); son énoncé est identique.

6.5.2 Grandes déviations

Dans le cas *non-nestling*, la condition de Kalikow et donc la condition (T) sont vérifiées; on ne s'intéresse par conséquent pas à cette situation. Le théorème suivant généralise (à légère variation près pour le premier énoncé) les théorèmes 33 et 36 de la section 4.3 :

THÉORÈME 53. – On suppose (T'). Si \mathcal{O} est un voisinage du segment $[0, v]$ dans \mathbb{R}^d , alors :

$$\text{pour tout } \gamma \in (0, 1), \limsup_n \frac{1}{n^\gamma} \ln P_0\left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O}\right) < 0.$$

Si \mathcal{O} est un voisinage de v , alors :

$$\text{pour tout } \zeta < \frac{2d}{d+1}, \limsup_n \frac{1}{(\ln n)^\zeta} \ln P_0 \left(\frac{X_n}{n} \notin \mathcal{O} \right) < 0.$$

De plus, dans le cas non-nestling, pour tout ouvert \mathcal{U} rencontrant $[0, v]$, on a :

$$\liminf_n \frac{1}{(\ln n)^d} \ln P_0 \left(\frac{X_n}{n} \in \mathcal{U} \right) > -\infty.$$

DÉMONSTRATION. • La démonstration du théorème 33 s'adapte immédiatement en utilisant la proposition 45 et le lemme suivant :

LEMME 54. – Sous l'hypothèse $(T)_\gamma$ on a, pour tout $\rho > 0$:

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^\gamma} \ln P_0 \left(\left| \frac{N_u}{u} - \frac{1}{E_0[X_{\tau_1} \cdot l | D = \infty]} \right| \geq \rho \right) < 0.$$

PREUVE DU LEMME. Par la propriété de renouvellement, l'hypothèse $(T)_\gamma$ et le théorème 43, on dispose des majorations de grandes déviations suivantes : en notant $\tilde{m} = E_0[X_{\tau_1} \cdot l | D = \infty]$, pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^\gamma} \ln P_0(X_{\tau_k} \cdot l \geq k(\tilde{m} + \delta)) < 0$$

et :

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^\gamma} \ln P_0(X_{\tau_k} \cdot l \leq k(\tilde{m} - \delta)) < 0,$$

ce qui permet d'obtenir le résultat annoncé de la même manière que dans le lemme 34. \square

(notons que la majoration de $P_0(\tau_{M_n} \leq n)$ à la fin de la preuve du théorème 33 reste valable (puisque τ_1 a aussi des moments de tous ordres sous (T')) : cette probabilité décroît exponentiellement)

• La preuve du théorème 36 s'adapte facilement à (T') : par (T') on a, pour tout $\gamma \in (0, 1)$,

$$\limsup_n \frac{1}{n^\gamma} P_0(T_{-(v_2 - v_1)n}^{\hat{v}} < \infty) < 0$$

(même raisonnement que sous (T)) et le lemme 37 reste vrai sous (T') avec la même preuve en faisant appel au lemme ci-dessus à la place de son analogue.

• La preuve de la minoration dans le théorème 36 reste valable sans modification : elle exploite uniquement la convergence balistique presque sûre (avec une vitesse déterministe non nulle). \square

6.6 Exemple

On traite ici un exemple de loi μ qui ne satisfait pas le critère (i) de la proposition 21 pour la condition de Kalikow, mais qui vérifie (T') , et donc pour lequel la marche aléatoire en milieu aléatoire correspondante présente presque-sûrement une convergence balistique. On vérifiera (T') grâce au critère effectif de la section 5 (cf. aussi le théorème 48). Ceci met en évidence un intérêt de ce critère, et de la condition (T') , puisque la condition de Kalikow (i) constituait la manière la plus générale de construire pratiquement des exemples de marches balistiques (ou transientes dans une direction). À noter toutefois : on ne montre pas que la condition plus générale $(K)l$ n'est pas vérifiée (ce qui reste conjectural). On renvoie à l'article [8] d'A.-S. Sznitman pour un exemple dans lequel la condition (T') est vérifiée et $(K)l$ ne l'est pas, quel que soit $l \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Soit $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$. On définit la loi μ_λ sur \mathcal{P} par :

$$\mu_\lambda = (1 - \sqrt{\lambda})\delta_{p_D} + \sqrt{\lambda}\delta_{p_G},$$

où $p_D, p_G \in \mathcal{P}$ sont les probabilités :

$$p_D(e) = \begin{cases} \frac{1-\lambda}{d} & \text{si } e = e_1, \\ \frac{\lambda}{d} & \text{si } e = -e_1, \\ \frac{1}{2d} & \text{si } |e| = 1 \text{ et } e \neq \pm e_1, \end{cases}$$

et :

$$p_G(e) = \begin{cases} \frac{\lambda}{d} & \text{si } e = e_1, \\ \frac{1-\lambda}{d} & \text{si } e = -e_1, \\ \frac{1}{2d} & \text{si } |e| = 1 \text{ et } e \neq \pm e_1, \end{cases}$$

Cette vérifie la condition d'ellipticité : $\mu_\lambda \in \mathcal{P}_\kappa$ pour $\kappa = \frac{\lambda}{d}$. Sous μ_λ , chaque site de l'environnement est associé à la distribution p_D ou p_G , et on dit alors respectivement qu'il *pointe vers la droite* ou *vers la gauche*.

On notera $\mathbb{P}_\lambda = \mu_\lambda^{\otimes \mathbb{Z}^d}$, et \mathbb{E}_λ l'espérance correspondante.

On va montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 55. – Si $d \geq 4$, il existe $\lambda_0 \in (0, \frac{1}{2})$ tel que, pour $\lambda < \lambda_0$, la distribution μ_λ vérifie la condition (T') $|_{e_1}$ mais ne satisfait le critère (i) de la proposition 21 pour aucun vecteur $l \in \mathbb{S}^{d-1}$.

DÉMONSTRATION. • Vérifions d'abord que le critère de la proposition 21 (dont on reprend les notations) n'est pas vérifié. On note g et g' les éléments de G définis par $g(e) = 1$ pour tout e , et par $g'(e_1) = 1$ et $g'(e) = 0$ si $e \neq e_1$. On a alors, pour tout $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\mathbb{E}_\lambda \left[\frac{d(0, \omega)}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e)g(e)} \right] = \mathbb{E}_\lambda[d(0, \omega)] = \frac{1-2\lambda}{d}(1-\sqrt{\lambda})e_1 - \frac{1-2\lambda}{d}\sqrt{\lambda}e_1 = \frac{1}{d}(1-2\lambda)(1-2\sqrt{\lambda})e_1$$

et :

$$\mathbb{E}_\lambda \left[\frac{d(0, \omega)}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e)g'(e)} \right] = \mathbb{E}_\lambda \left[\frac{d(0, \omega)}{\omega(0, e_1)} \right] = \frac{1-2\lambda}{1-\lambda}(1-\sqrt{\lambda})e_1 - \frac{1-2\lambda}{\lambda}\sqrt{\lambda}e_1 = (1-2\lambda) \left(\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) e_1.$$

On remarque que le coefficient devant e_1 est positif pour g et négatif pour g' . Par suite, pour tout $l \in \mathbb{S}^{d-1}$, on a, en notant $\tilde{g} = g$ si $l \cdot e_1 \leq 0$ et $\tilde{g} = g'$ sinon :

$$\mathbb{E}_\lambda \left[\frac{d(0, \omega) \cdot l}{\sum_{|e|=1} \omega(0, e)g'(e)} \right] < 0,$$

et le critère n'est donc pas satisfait. On n'a d'ailleurs fait aucune hypothèse sur $d \geq 1$ ni sur $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ pour obtenir ceci.

• Reste à voir que, si $d \geq 4$ et λ est assez petit, on peut trouver un réel $a \in (0, 1)$ et une boîte B qui vérifient le critère effectif du théorème 48. On prend λ de la forme $\lambda = e^{-L}$ où $L > c'$ (cf. énoncé du théorème 48), et on s'intéresse à la boîte :

$$B = B(Id, L-2, L+2, L^2).$$

Puisque le paramètre d'ellipticité est $\kappa = \frac{\lambda}{d} = \frac{e^{-L}}{d} \leq e^{-L}$, il suffit, pour appliquer le critère effectif et donc obtenir le théorème, de montrer que, pour L assez grand :

$$cL^{3(d-1)} \tilde{L}^{d-1} L^{3(d-1)+1} \mathbb{E}_\lambda[\rho_B] < 1.$$

On suppose L assez grand pour que $\lambda < (\frac{1}{4})^4$ et $4dL < L^2$. Vu cette deuxième condition, on a :

$$\begin{aligned} q_B(\omega) &\leq P_{0, \omega}(T_B > 4dL) + P_{0, \omega}(T_B \leq 4dL, X_{T_B} \notin \partial_+ B) \\ &\leq P_{0, \omega}(T_B > 4dL) + P_{0, \omega}(T_B \leq 4dL, X_{T_B} \cdot e_1 \leq -L+2). \end{aligned}$$

Pour $l \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $\omega \in \Omega$, le processus $(M_n^l)_{n \geq 0}$ défini par :

$$\text{pour tout } n \geq 0, M_n^l = X_n \cdot l - X_0 \cdot l - \sum_{k=0}^{n-1} d(X_k, \omega) \cdot l$$

est une martingale sous $P_{0,\omega}$. De plus, pour tout n , $|M_{n+1} - M_n| \leq 2$ donc l'inégalité d'Azuma (lemme 24) donne, pour tout $A > 0$:

$$\text{pour tout } n \geq 0, P_{0,\omega}(M_n^l \geq A) \leq e^{-\frac{A^2}{8n}}.$$

Sur l'événement

$$\mathcal{R} = \{\text{tous les points de } B \text{ pointent vers la droite}\},$$

tous les points $x \in B$ vérifient $d(x, \omega) = \frac{1-2\lambda}{d}e_1$. Par conséquent, sur \mathcal{R} , en poursuivant les inégalités précédentes :

$$\begin{aligned} q_B(\omega) &\leq P_{0,\omega}(X_{[4dL]+1} \cdot e_1 < L+3) + P_{0,\omega}\left(T_B \leq 4dL, M_{T_B}^{-e_1} \geq -L+2 + \frac{1-2\lambda}{d}T_B\right) \\ &\leq P_{0,\omega}\left(M_{[4dL]+1}^{-e_1} > \frac{1-2\lambda}{d}4dL - L - 3\right) + P_{0,\omega}(\text{il existe } 1 \leq k \leq [4dL] \text{ tel que } M_k^{-e_1} \geq L-2) \\ &\leq \exp\left(-\frac{(L-3)^2}{8(4dL+1)}\right) + 4dL \exp\left(-\frac{(L-2)^2}{32dL}\right). \end{aligned}$$

(en utilisant l'inégalité $\lambda < \frac{1}{4}$) On en déduit : il existe $c'_1(d) > c'$ tel que, si $L > c'_1$, sur \mathcal{R} ,

$$q_B(\omega) \leq \exp\left(-\frac{L}{64d}\right).$$

Comme de plus on remarque que $p_B \geq \kappa^{L+3} = (de^L)^{-(L+3)}$ et $\mathbb{P}_\lambda(\mathcal{R}^c) \leq |B|\sqrt{\lambda} = |B|e^{-L/2}$, on a, pour tout $L > c'_1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\lambda[\rho_B] &\leq \mathbb{E}_\lambda[\rho_B, \mathcal{R}] + \mathbb{E}_\lambda\left[p_B^{-1}, \mathcal{R}^c, p_B > e^{\frac{L}{4}}\right] + \mathbb{E}_\lambda\left[p_B^{-1}, \mathcal{R}^c, p_B \leq e^{\frac{L}{4}}\right] \\ &\leq \frac{\exp(-\frac{L}{64d})}{1 - \exp(-\frac{L}{64d})} + |B|e^{-\frac{L}{2}}e^{\frac{L}{4}} + (de^L)^{L+3}\mathbb{P}_\lambda\left(p_B \leq e^{-\frac{L}{4}}\right) \end{aligned}$$

Il reste donc à majorer $\mathbb{P}_\lambda(p_B \leq e^{-\frac{L}{4}})$. Pour cela on va exploiter le fait que, puisque $d > 1$, on peut trouver plusieurs chemins pour réaliser $\{X_{T_B} \in \partial_+ B\}$, à la façon du lemme 31 de renormalisation : si p_B est petite, c'est que chacune des probabilités de traverser B le long d'une colonne donnée est petite, or la probabilité que ceci arrive est d'autant plus faible qu'il y a un grand nombre de colonnes... Soit $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. On définit la boîte (qui fera office de «colonne») :

$$\tilde{B} = B(Id, \frac{L}{2}, L+2, L^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

En notant, pour $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\tilde{\mathcal{R}}_x = \{\text{tous les points de } x + \tilde{B} \text{ pointent vers la droite}\},$$

on a, de manière voisine de la majoration précédente, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, sous $\tilde{\mathcal{R}}_x$:

$$\begin{aligned} q_{\tilde{B}} \circ t_x(\omega) &\leq P_{x,\omega}(T_{\tilde{B}} > 4dL) + P_{x,\omega}(T_{\tilde{B}} \leq 4dL, X_{T_{\tilde{B}}} \cdot e_1 \leq -\frac{L}{2}) \\ &\quad + P_{x,\omega}(T_{\tilde{B}} \leq 4dL, \text{il existe } 2 \leq i \leq d \text{ tel que } |X_{T_{\tilde{B}}} \cdot e_i| > L^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \\ &\leq \exp\left(-\frac{(L-3)^2}{8(4dL+1)}\right) + 4dL \exp\left(-\frac{(L/2)^2}{32dL}\right) + 2(d-1)4dL \exp\left(-\frac{L^{1+2\varepsilon}}{32dL}\right), \end{aligned}$$

d'où $c'_2(d) > c'_1$ tel que, si $L > c'_2$, sous $\tilde{\mathcal{R}}_x$:

$$p_{\tilde{B}} \circ t_x \geq \frac{1}{2}.$$

L'ensemble des boîtes \tilde{B}_x que l'on va considérer est paramétré par :

$$\tilde{\mathcal{L}} = \left\{ x \in 2 \left(\left\lfloor L^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) \mathbb{Z}^d \mid x \cdot e_1 = 0 \text{ et } \|x\| \leq \frac{L}{8 \ln(2d)} \right\}.$$

Supposons L assez grand pour avoir $L > c'_2$ et $L^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + \frac{L}{8 \ln(2d)} < L^2$, et donc $x + \tilde{B} \subset B$ pour tout $x \in \tilde{\mathcal{L}}$. Une façon de réaliser $\{X_{T_B} \in \partial_+ B\}$ consiste pour la marche à atteindre l'un des points $x \in \tilde{\mathcal{L}}$ sans quitter B (ce qui peut se faire avec probabilité au moins $(\frac{1}{2d})^{\|x\|}$ vu que $x \cdot e_1 = 0$) puis à sortir de la petite boîte $x + \tilde{B}$ par la face $x + \partial_+ \tilde{B}$. Pour L assez grand, sur l'événement $\bigcup_{x \in \tilde{\mathcal{L}}} \tilde{\mathcal{R}}_x$ («tous les sites de l'une des petites boîtes pointent vers la droite»), la propriété de Markov forte donne donc :

$$p_B \geq \sup_{x \in \tilde{\mathcal{L}}} P_{0,\omega}(H_x < T_B) p_{\tilde{B}} \circ t_x \geq \inf_{x \in \tilde{\mathcal{L}}} \left(\frac{1}{2} \right)^{\|x\|} \frac{1}{2} \geq e^{-\frac{L}{8}} \frac{1}{2} > e^{-\frac{L}{4}}$$

(en utilisant l'inégalité $\lambda < \frac{1}{4^4}$, qui donne $e^{-\frac{L}{8}} = \lambda^{\frac{1}{8}} < \frac{1}{2}$). De plus, les boîtes $x + \tilde{B}$, $x \in \tilde{\mathcal{L}}$, sont disjointes deux à deux, de sorte que les événements $\tilde{\mathcal{R}}_x$, $x \in \tilde{\mathcal{L}}$, sont indépendants (dans leur ensemble). Pour L assez grand, on a ainsi :

$$\mathbb{P}_\lambda(p_B \leq e^{-\frac{L}{4}}) \leq \mathbb{P}_\lambda \left(\bigcap_{x \in \tilde{\mathcal{L}}} \tilde{\mathcal{R}}_x^c \right) = \prod_{x \in \tilde{\mathcal{L}}} \mathbb{P}_\lambda(\tilde{\mathcal{R}}_x^c) = \mathbb{P}_\lambda(\tilde{\mathcal{R}}_0^c)^{|\tilde{\mathcal{L}}|} \leq (|\tilde{B}| e^{-\frac{L}{2}})^{|\tilde{\mathcal{L}}|}.$$

De plus on peut trouver une constante $C(d)$ telle que, pour L assez grand,

$$|\tilde{\mathcal{L}}| \geq CL^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)(d-1)}.$$

Dès que $d \geq 4$, on peut alors choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $(\frac{1}{2}-\varepsilon)(d-1) > 1$ et, puisque les quantités $|B|$ et $|\tilde{B}|$ sont polynomiales en L , en revenant à la majoration de $\mathbb{E}_\lambda[\rho_B]$ précédente, il apparaît que le dernier terme décroît plus vite que $\exp(-L^\alpha)$, pour un réel $\alpha > 0$, comme les deux autres termes. Pour tout L assez grand, donc pour tout λ assez proche de 0, le critère annoncé est par conséquent vérifié. \square

Conclusion

Si les quelques résultats présentés constituent des avancées importantes, et aident à comprendre cet aspect des marches aléatoires en milieu aléatoire qu'est la convergence balistique, de nombreuses questions restent encore sans réponse. Après avoir introduit deux conditions (T) et (T') desquelles on a déduit les mêmes conséquences, il est légitime de se demander si elles sont équivalentes ou non. Par ailleurs, peut-on trouver des situations où il y ait transience dans une direction, mais où il n'y ait pas convergence balistique, ou des situations où il y ait convergence balistique (ou simplement transience dans une direction), mais où (T') ne soit pas vérifiée? Dispose-t-on d'une loi du 0-1 pour l'événement $\{\lim_n X_n \cdot l = +\infty\}$? (voir section 2) Enfin, au-delà de la question de la convergence balistique, peut-on trouver un critère de récurrence, ou même simplement un exemple de marche récurrente en dimension 3? Toute l'étude menée ici exploite très fortement la structure de renouvellement, et cette structure ne peut se construire telle quelle que si la marche est transiente dans une direction : pour aborder des situations récurrentes, de nouveaux outils restent donc à imaginer.

Références

- [1] A. Dembo and O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques*. Jones and Bartlett Publishers, 1993.
- [2] S. M. Ethier and T.G. Kurtz. *Markov processes*. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [3] S. A. Kalikow. Generalized random walk in a random environment. *Ann. Probab.*, 9(5) :753–768, 1981.

- [4] F. Solomon. Random walk in a random environment. *Ann. Probab.*, 27(2) :247–258, 1982.
- [5] A. S. Sznitman. Slowdown estimates and central limit theorem for random walks in random environment. *J. Eur. Math. Soc.*, 2(2) :93–143, 2000.
- [6] A. S. Sznitman. On a class of transient random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 29(2) :723–764, 2001.
- [7] A. S. Sznitman. An effective criterion for ballistic random walks in random environment. *Probab. Theory Relat. Fields*, 122(4) :509–544, 2002.
- [8] A. S. Sznitman. On new examples of ballistic random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 31(1) :285–322, 2003.
- [9] A. S. Sznitman. *Topics in random walks in random environment. Notes of course at School and Conference on Probability Theory, May 2002.* ICTP Lecture Series, Trieste, 2004.
- [10] A. S. Sznitman and M. P. W. Zerner. A law of large numbers for random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 26(4) :1851–1869, 1998.
- [11] O. Zeitouni. *Random walks in random environment, Lectures on probability theory and statistics, Saint-Flour 2001.* Number 1837 in Lecture Notes in Math. Springer, 2004.
- [12] M. P. W. Zerner. Lyapunov exponents and quenched large deviation for multidimensional random walk in random environment. *Ann. Probab.*, 26 :1446–1476, 1998.