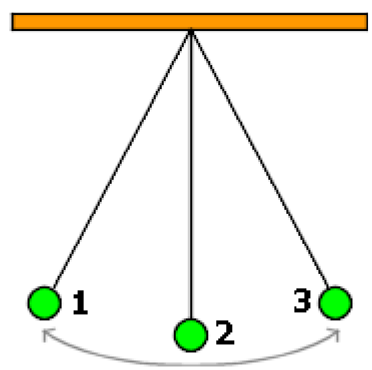
L'urne harmonique simple

Stanislav Volkov

Université de Lund



Travail en commun avec Ed Crane, Nick Georgiou, Andrew Wade et Rob Waters

Considérons le modèle d'urne de Pólya généralisée $(X_n Y_n)$ où les probabilités de transition sont données par

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \begin{cases} (X_n + a, Y_n + b) & \text{avec probabilité} \quad \dfrac{X_n}{X_n + Y_n} \\ (X_n + c, Y_n + d) & \text{avec probabilité} \quad \dfrac{Y_n}{X_n + Y_n} \end{cases}$$

c'est-à-dire, on tire une boule au hasard de l'urne ; alors on la retourne avec ***a*** boules de type X et ***b*** boules de type Y de plus, si on tire une boule de type X ; ça sera ***c*** et ***d*** boules respectivement dans l'autre cas.

Soit $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de renforcement

Ordinairement $a, b, c, d \geq 0$.

Cas particuliers :

- $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ l'urne de Pólya classique
- $R = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $c > 0$, dans M.A.R.S. : Pemantle & V (99)
- $R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ l'urne de Friedman : Freedman (65), Menshikov & V (08)
- $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Fusillade d'O.K. Corral :
  Williams & McIlroy (98), Kingman (99), Kingman & V (03)

Svante Janson (04), Bai & Hu (05), Basak & Dasgupta (05) : généralisations.

Souvent la dynamique de (X_n, Y_n) est bien comprise en regardant l'équation différentielle $\dot{Z} = RZ$ où $Z=(x, y)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

Donc les valeurs propres $\lambda_{1,2} = \dfrac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$ de R sont très importantes ; le rapport $\rho = \lambda_2 / \lambda_1$ est important également.

Dans le cas de Pólya $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $x/y \to$ const, de l'autre côté, dans le cas de Friedman $R = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ on a $x - y \sim (x+y)^{\rho}$

Nous étudions le cas avec $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ correspondant à l'oscillateur harmonique simple et le système $\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = -x \end{cases}$

On commence par (n,0) et on arrive à la situation où on a (0,m). Et après ? On échange les types de boules, c'est-à-dire

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \begin{cases} \begin{cases} (X_n, Y_n + 1) & \text{avec probabilité } \dfrac{X_n}{X_n + Y_n} \\ (X_n - 1, Y_n) & \text{avec probabilité } \dfrac{Y_n}{X_n + Y_n} \end{cases} & \text{if } X_n = 1 \\ (Y_n, X_n) & \text{if } X_n = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathbf{Z_k}$ le nombre de boules au moment du ***k***-ème échange. Question principale : le processus $\mathbf{Z_k}$ est-il est ***récurrent*** ou ***transient ?***

On peut se débarrasser des « échanges », en définissant le processus aussi pour les valeurs négatives de X et Y :

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \begin{cases} \left(X_n, Y_n + \operatorname{sgn}(X_n)\right) \text{ avec probabilité } \dfrac{|X_n|}{|X_n|+|Y_n|} \\ \left(X_n - \operatorname{sgn}(Y_n), Y_n\right) \text{ avec probabilité } \dfrac{|Y_n|}{|X_n|+|Y_n|} \end{cases}$$

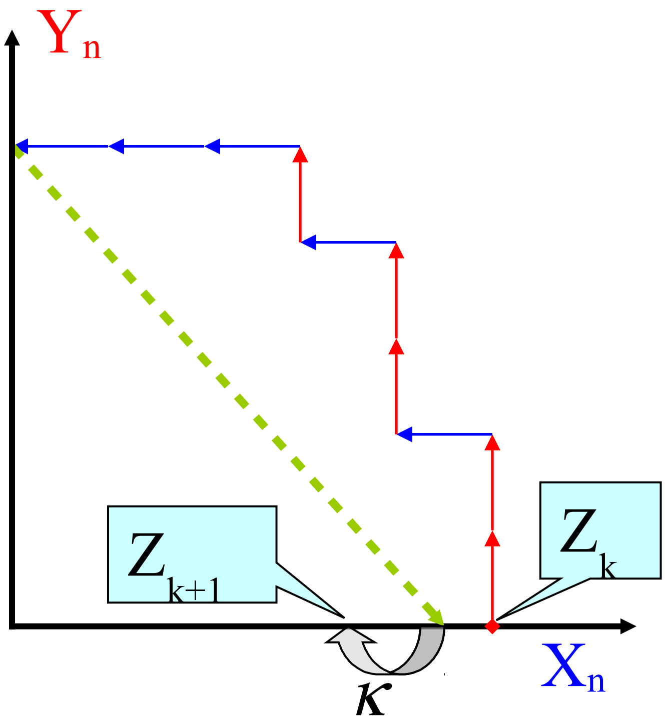
où $$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} +1 & \text{if} \quad a > 0 \\ 0 & \text{if} \quad a = 0 \\ -1 & \text{if} \quad a < 0 \end{cases}$$

Théorème 1. Z_k est transient.

Mais *à quel point* est-il transient ?

Soustrayons une quantité aléatoire chaque fois que X et Y échangent. Donc on arrive à « l'urne bruitée » avec

$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \begin{cases} \begin{cases} (X_n, Y_n+1) & \text{avec probabilité } \dfrac{X_n}{X_n+Y_n} \\ (X_n-1, Y_n) & \text{avec probabilité } \dfrac{Y_n}{X_n+Y_n} \end{cases} & \text{if } X_n = 1 \\ (Y_n - \kappa, X_n) & \text{if } X_n = 0 \end{cases}$$



Le cas particulier $\kappa \equiv 1$ s'appelle « l'urne qui fuit ». Dans ce cas, la quantité $(X + ½)^2 + (Y - ½)^2$ s'avère être une martingale, donc le processus est bien récurrent.

Définissons

$$\tau = \inf\left\{k : Z_k = 1\right\}$$

Théorème 2. Soit $\mathrm{E}\, e^{\lambda|\kappa|} < \infty$ pour quelque $\lambda > 0$. Donc le processus Z_k est

- transient ($\mathrm{P}\left(\tau < \infty\right) < 1$) si $\mathrm{E}\left(\kappa\right) < \frac{1}{3}$;
- récurrent nul ($\mathrm{P}\left(\tau < \infty\right) = 1$ mais $\mathrm{E}\,\tau = \infty$) si $\frac{1}{3} \leq \mathrm{E}\left(\kappa\right) \leq \frac{2}{3}$;
- récurrent positif ($\mathrm{E}\,\tau < \infty$) si $\mathrm{E}\left(\kappa\right) > \frac{2}{3}$.

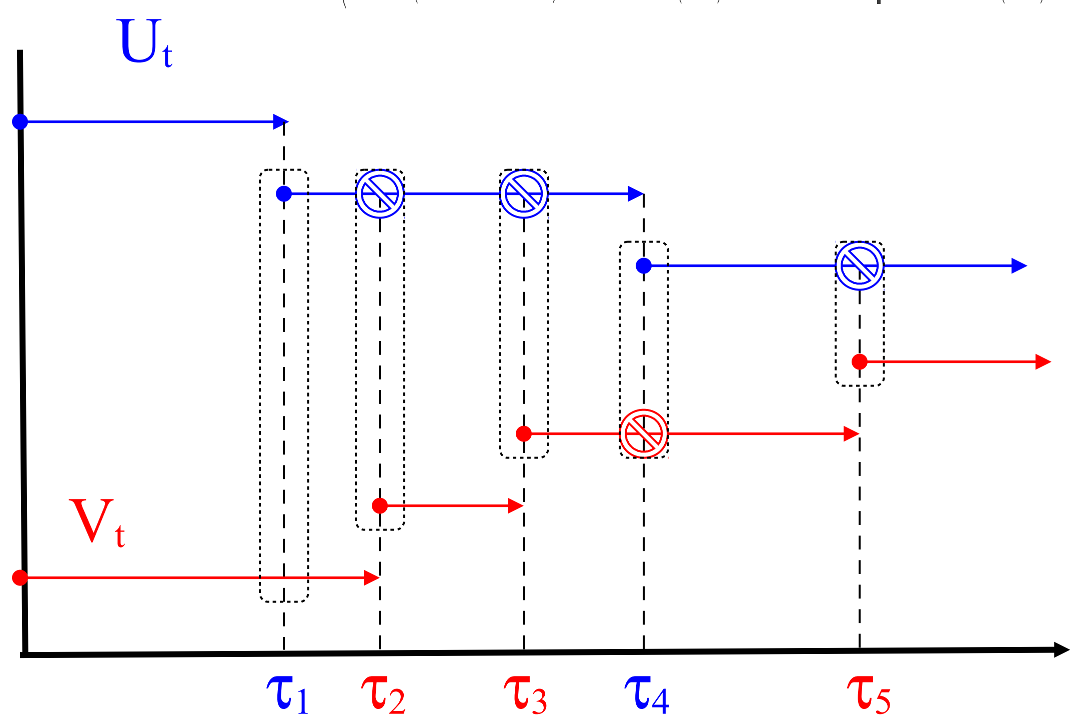
Cette proposition couvre à la fois *l'urne harmonique simple* et *l'urne qui fuit*.

Découplage des urnes

On utilise la construction de Herman Rubin's (B. Davis, 90). Soit U(t) un processus pur de mort et V(t) un processus pur de naissance tels que

$$\mathrm{P}\left(U(t+dt)=U(t)-1 \quad | \quad U(t)=a\right)=\frac{1}{a}dt$$

$$\mathrm{P}\left(V(t+dt)=V(t)+1 \quad | \quad V(t)=b\right)=\frac{1}{b}dt$$



Donc (U(t),V(t)) considérées à des moments des sauts suivent la même loi que (X_n,Y_n).

Soit $T_z = \sum_{k=1}^{z} k\xi_k$, $S_w = \sum_{i=1}^{w} i\xi_{-i}$ où toutes ξ sont i.i.d. exp(1).

Alors $P(Z_{k+1} > m \mid Z_k = n) = P(T_n > S_m)$

Lemme. Les transitions de Z suivent

$$p(n,m) = \frac{m}{(m+n)!} A(n+m-1,m) = m \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i (m-i)^{n+m-1}}{i!\,(n+m-i)!}$$

où

$$A(c,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{c+1}{i} (k+1-i)^c$$

sont *nombres eulériens*.

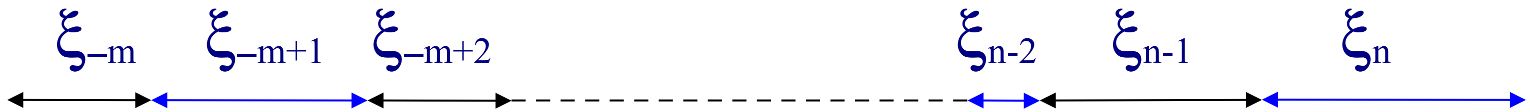
Couplage avec la loi uniforme

Notons $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ où U_i suivent la loi Uniforme[0,1].
Soit $R(n) = \max\{k \geq 0 : S_k < n\}$ la fonction de renouvellement.

Notons que R(n)+1 est la position de $n^{\text{ème}}$ chute d'une suite de variables aléatoires uniformes i.i.d $\tilde{U}_i = S_i \mod 1$; donc il s'agit de permutations aléatoires.

Lemme. La loi de Z_{k+1} sachant que $Z_k = n$ est la même que celle de $R(n)+1-n$.

Démonstration. Soit ξ_i des variables i.i.d. exponentielles (1), $i \in Z$.



Définissons $U'_j = \dfrac{\sum_{i=-m}^{j-1-m} \xi_i}{\sum_{i=-m}^{n} \xi_i}$ pour $j = 1, 2, \ldots, n+m$

Selon les propriétés de processus Poisson, U'_i sont i.i.d. selon la loi uniforme, donc

$$P(R(n)+1-n>m) = P(R(n)+1>m+n) = P\left(\sum_{j=1}^{m+n} U'_j < n\right)$$

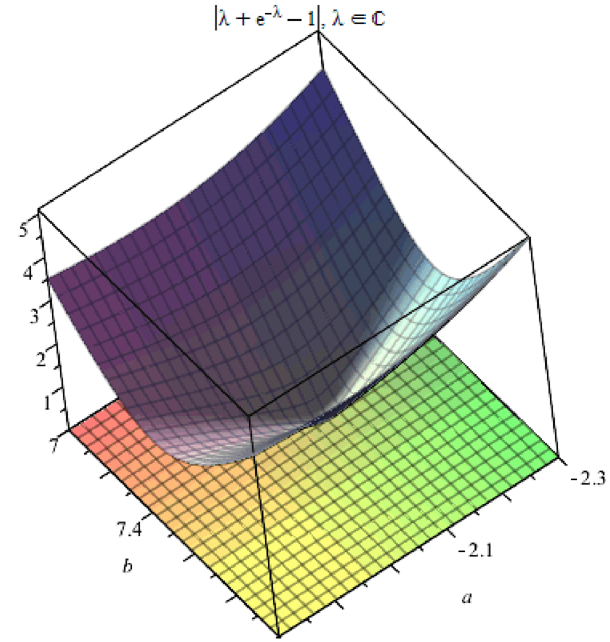
$$= P\left(\sum_{j=m+1}^{m+n} U'_j > \sum_{j=1}^{n} \left[1-U'_j\right]\right) = P\left(\sum_{i=-m}^{n} i\xi_i > 0\right) = P(Z_{k+1} > m \mid Z_k = n)$$

Lemme.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{E}\,R(n)+1-\left(2\mathrm{n}+\frac{2}{3}\right)\right]=0$$

Ainsi $\mathrm{E}\left(Z_{k+1}|Z_k=n\right)=n+\frac{2}{3}+o(1)$

Démonstration. Théorème de renouvellement asymptotique (voir par exemple Feller).



Observons en effet que

$$\mathrm{E}\left(Z_{k+1}|Z_k=n\right)=n+\frac{2}{3}+O\left(e^{-2.088\ldots n}\right)$$

où *-2.088…* est la partie réelle d'une solution de l'équation $\lambda+e^{-\lambda}=1$.

Soit $\Delta_k = Z_{k+1} - Z_k$

Lemme. $P\left(|\Delta_k| > x \mid Z_k = n\right) \le 2\exp\left(-\frac{3x^2}{4n+2x}\right)$ donc

$$P\left(|\Delta_k| > n^{1/2+\varepsilon} \mid Z_k = n\right) \le C\exp\left(-n^{\varepsilon}\right)$$

Lemme. $E\left(\Delta_k \mid Z_k = n\right) = \frac{2}{3} + o(1), \quad E\left(\Delta_k^2 \mid Z_k = n\right) = \frac{2}{3}\left(n + 1 + o(1)\right)$

Démonstration.

$M_n = \left(X_n + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y_n - \frac{1}{2}\right)^2$ est une martingale, pourvu que le processus ne soit pas échangé. Ainsi, en prenant en considération l'échange, nous avons

$$E\left(Z_{k+1}^2 - Z_{k+1} \mid Z_k\right) = Z_k^2 + Z_k$$

Cela, avec la première partie du lemme, finit la preuve.

La marche de Lamperti

Considérons la marche W_k sur $\mathbb{R}_+$ avec un biais (μ_1) asymptotiquement zéro. Soit

$$\mu_1(x) = \mathrm{E}\left(\left[W_{k+1} - W_k\right]^r \mid W_k = x\right), \quad r = 1{,}2$$

Théorème *[Lamperti (60,63), Asymont & Iasnogorodski & Menshikov (95)]*. Selon la valeur de $2x\mu_1(x) - \mu_2(x)$ la marche W_k est soit récurrente soit transiente (avec une condition supplémentaire pour la récurrence nulle)

Maintenant soit $W_k = \sqrt{Z_k}$. Alors

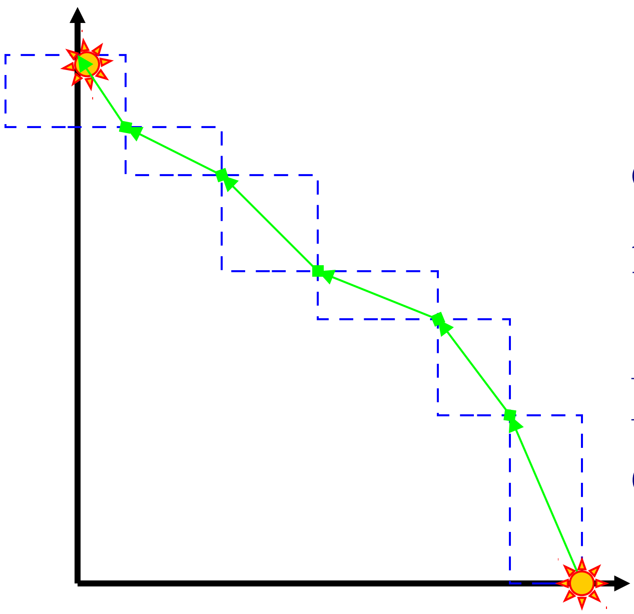
$$\mu_1(x) = \frac{1 - 2\,\mathrm{E}(\kappa)}{4x} + O\left(x^{-2}\right), \quad \mu_2(x) = \frac{1}{6} + O\left(x^{-1}\right)$$

D'où on peut utiliser les résultats pour la marche de Lamperti.

Marche aléatoire dans le premier quadrant

Supposons que (A_n,B_n) se trouve quelque part dans R_+^2 avec $(A_0,B_0)=(a,0)$, et

$$\left(A_{n+1}, B_{n+1}\right) \leftarrow \begin{cases} \left(A_{n+1} - v_n^{(a)}, B_{n+1} + v_n^{(b)}\right) & \text{si} \quad A_n > 0, \\ \left(B_n, 0\right) & \text{sinon}, \end{cases}$$



où $v_n^{(a)}, v_n^{(b)}$ sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une même loi non-négative.

Désignons par Q_k le nombre d'étapes entre les échanges consécutifs.

Proposition. Supposons que ν est U[0,1]. Si $A_0=a$ est la somme de variables aléatoires indépendantes selon la loi uniforme sur [0,1], alors Q_k suit la même loi que Z_k. Donc la marche (A,B) est transiente.

Proposition. Supposons que ν est exp(1). Alors la marche (A,B) est récurrente.

Démonstration. Ça arrive que Q_k suit la loi binomiale négative

$$\mathrm{P}\left(Q_{k+1}=j \mid Q_k=n\right)=\binom{j+n}{n}\frac{1}{2^{n+j+1}}, \quad j=0,1,2,\ldots$$

Vérifions que $\log(Q_k)$ est une sur-martingale positive :

$$\mathrm{E}\left(\log\left(Q_{k+1}\right)-\log\left(Q_k\right) \mid Q_k=n\right)=-\frac{1}{12n^2}+O\left(n^{-3}\right)$$

en utilisant le développement en série de Taylor de $f(x)=\log(1+x)$ jusqu'à $f^{(5)}(x)$. Maintenant la proposition suit, par exemple, de *Fayolle, Malyshev et Menshikov (95)*.

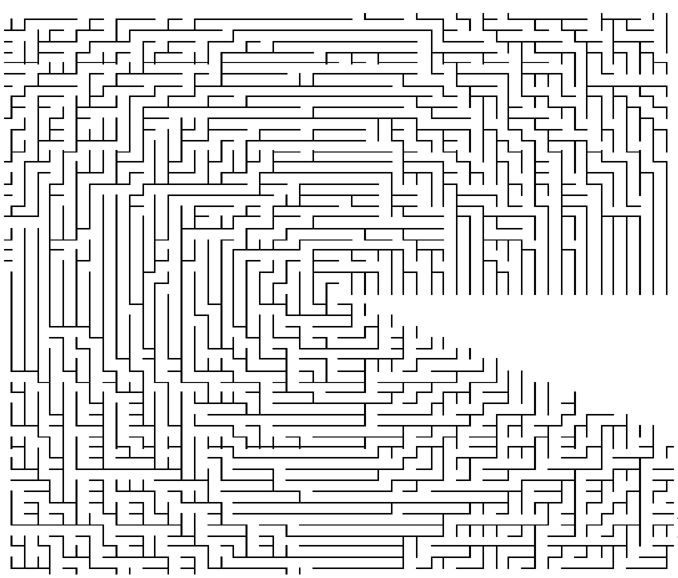
En fait, on peut déterminer la récurrence / transience dans le cas vraiment plus général.

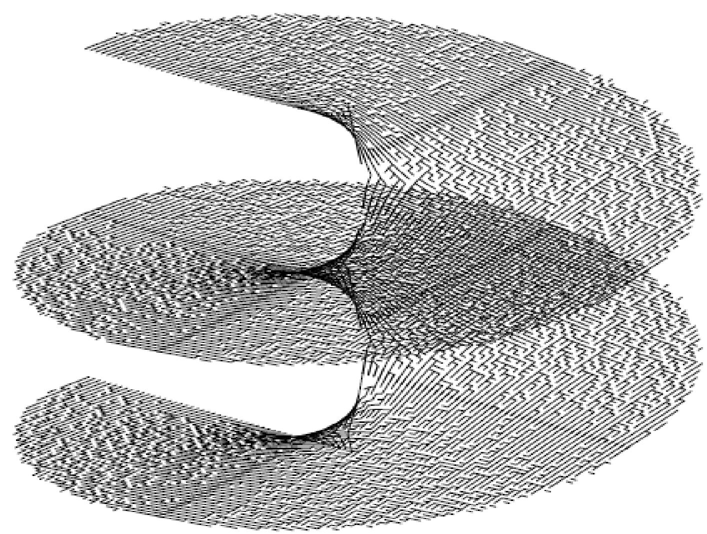
Théorème. Supposons que $E[\nu^4] < \infty$. Alors la marche aléatoire (A,B) est transiente si et seulement si $(E\nu)^2 > \mathrm{Var}(\nu)$.

La démonstration utilise des propriétés très fines des processus de renouvellement, et encore la méthode de Lamperti.

Modèle de la percolation

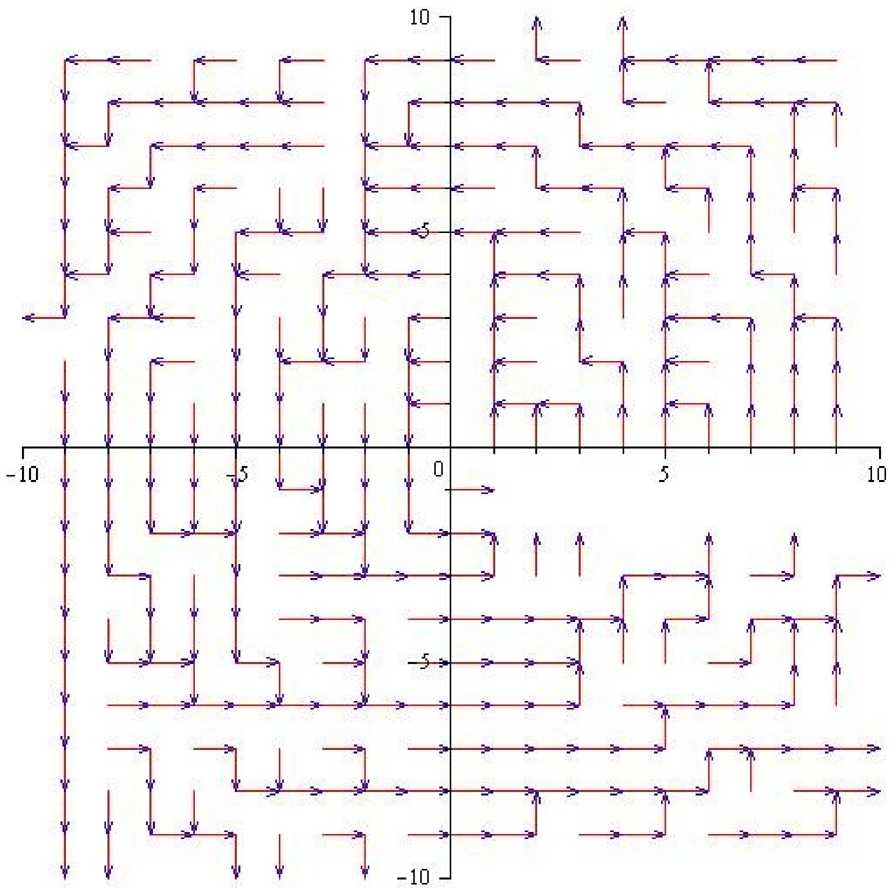
Pour chaque $n\in\{1,2,3,\ldots\}$ on attribue à $(x\,,\,y)\in Z^2\setminus\{(0,0)\}$ un vecteur unitaire orienté, *soit* horizontal *soit* vertical, dans le sens de *l'argument croissant*. En particulier, si x>0 et y>0 alors le vecteur pointe vers le haut avec probabilité ***x*/(*x*+*y*)** et vers la gauche avec probabilité ***y*/(*x*+*y*)**. De même façon on le définit dans les trois autres quadrants. On arrive au graphe orienté H que l'on peut plonger dans la surface de Riemann $\mathfrak{R}$ du logarithme complexe.



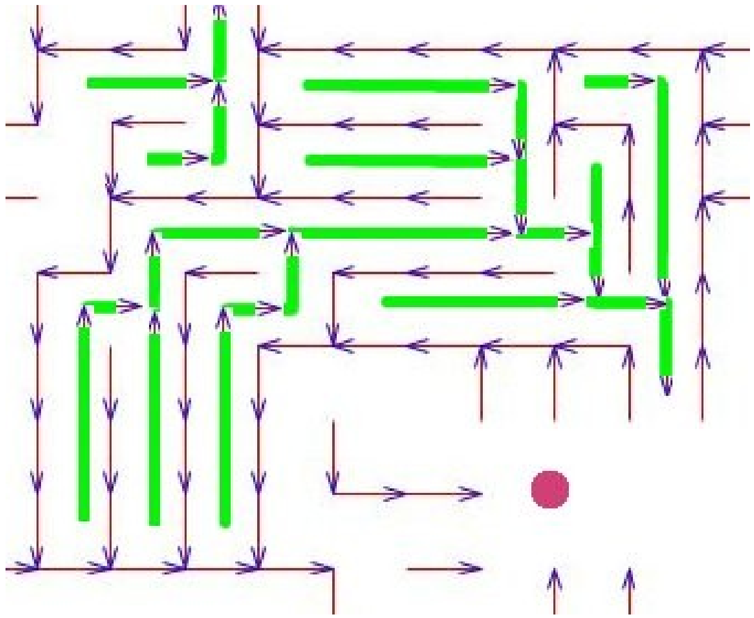


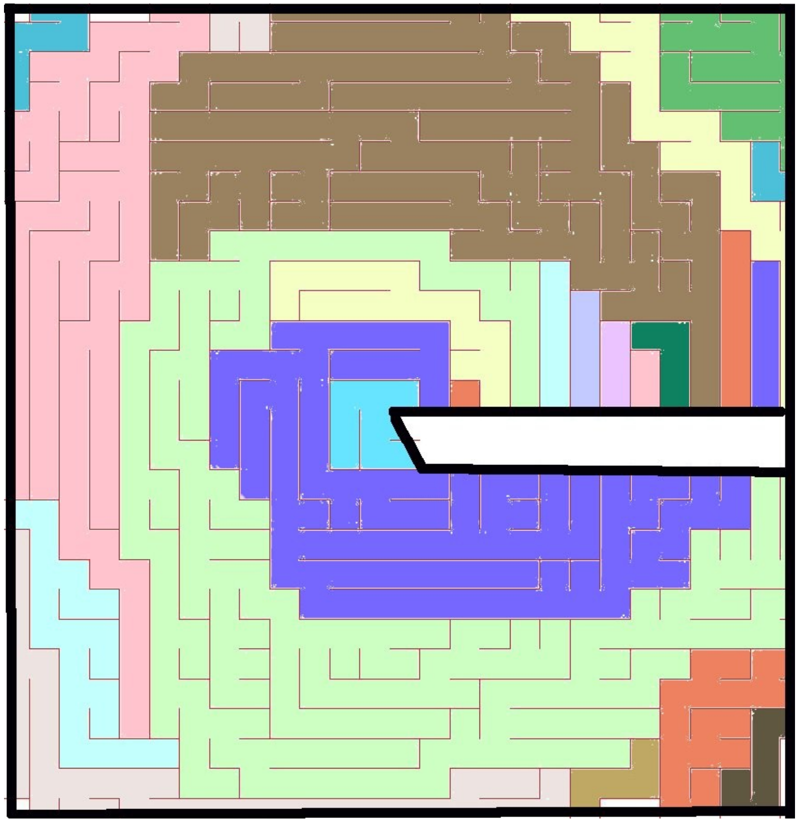
Alors, tout le trajet orienté sur H représente un chemin typique de l'urne harmonique.

Théorème. En ignorant l'orientation, H est un arbre infini avec une seule extrémité semi-infinie dans la direction « vers l'extérieur ».



Remarquons que le graphe dual H′ (bien défini) peut se considérer comme un ensemble de chemins pour *l'urne qui fuit*, d'où H′ est aussi un arbre infini avec un seul chemin doublement infini.





Autres modèles liés à l'urne harmonique simple :

- le cirque simple de puces harmonique
- modèle de Poisson de tremblements de terre

Merci de votre attention !

L'article :
http://is.gd/zonoho