Cours n° 9

V Graphe, convexe, lignes de niveaux

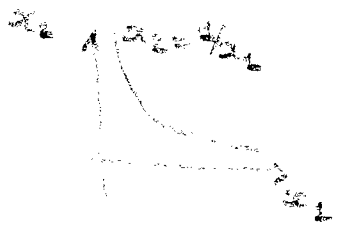
1) Graphe

Déf (graphe d'une fonction) : I intervalle de $\mathbb{R}$ $\quad f : I \to \mathbb{R} \quad x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$

$\Gamma_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \in I$ et $x_2 = f(x_1)\} \subset \mathbb{R}^2$

est appelé le graphe de f

Exemple : $]0, \infty[\to \mathbb{R} \quad x_1 \mapsto x_2 = \frac{1}{x_1}$

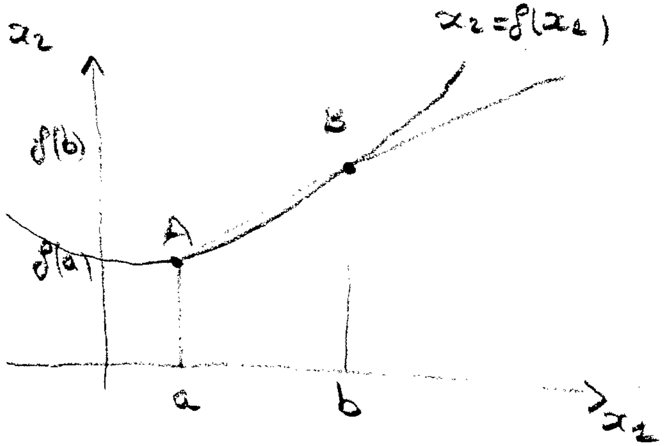


Ensemble des points situés au-dessus du graphe de f :

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \in I \quad x_2 \geq f(x_1)\} \subset \mathbb{R}^2$

au dessous du graphe de f :

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \in I \quad x_2 \leq f(x_1)\} \subset \mathbb{R}^2$



$A = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$

La droite AB dite sécante au graphe de A a pour équation

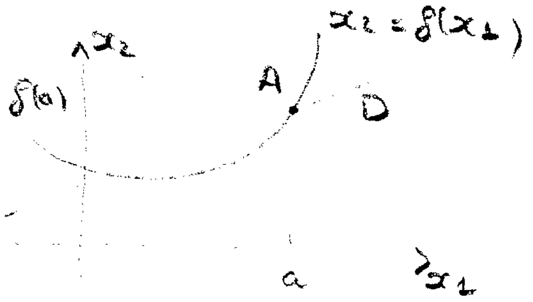
$$x_2 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) + f(a)$$

quand B tend vers A, la droite AB tend si f est dérivable vers une droite, appelé tangente en A au graphe de f. L'equation de la tangente en A au graphe

$$x_2 = f'(a)(x_1 - a) + f(a)$$

C'est encore la droite de pente $f'(a)$ passant par $(a, f(a))$

position relative du graphe de f et d'une secante à ce graphe :



$A = \binom{a}{f(a)}$ D droite passant par A

On dit que D est du même coté du graphe de f si D est contenu soit ds l'ensemble des points situés au-dessus du graphe de f soit dans l'ensemble des points situés en dessous du graphe de f

<u>Proposition</u> : $f : I \to \mathbb{R}$ $x_1 \to x_2 = f(x_1)$ f dérivable en a

$A = (a, f(a))$ D droite passant par A

D du m̂ coté du graphe de f $\Longrightarrow$ D est la tangente en A au graphe de f (c'est à dire pente de D est $f'(a)$)

Prop : $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervalle de $\mathbb{R}$

f deux fois dérivable / I

$\forall x \in I \;\; f''(x) \geqslant 0 \;\; \Longrightarrow$ la tangente en tout point du graphe de f est au dessous du graphe de f

$\forall x \in I \;\; f''(x) \leqslant 0 \;\; \Longrightarrow$ la tangente en tout point du graphe de f est au-dessus du graphe de f

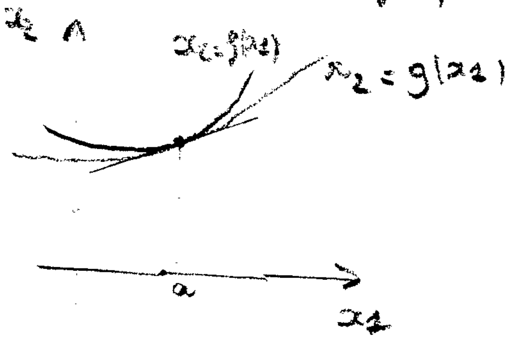
Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x_1 \mapsto x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 + 3$

Alors toute tangente au graphe de f est au-dessous du graphe de f

Proposition : I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ $\quad a \in I$

$f : I \to \mathbb{R} \quad g : I \to \mathbb{R} \quad f(a) = g(a)$

le graphe de f est du même coté du graphe de g $\Longrightarrow$ le graphe de f et le graphe de g ont m̂ tangente en $(a, f(a))$



<u>Proposition</u> : $f : I \to \mathbb{R}$ $\quad g : I \to \mathbb{R}$ $\quad f$ et g 2 fois dérivables

$\forall x_1 \in I \quad f''(x_1) - g''(x_1) \geq 0 \quad$ (resp. ≤ 0)

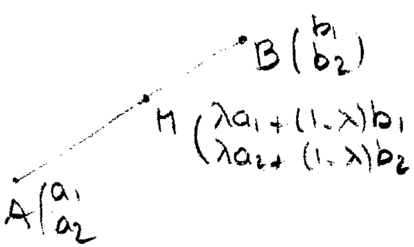
$f(a) = g(a) \quad f'(a) = g'(a) \quad$ (c'est à dire f et g ont m̂ tangente en a)

Alors le graphe de f est au-dessus du graphe de g (respectivement au-dessous)

V.2) Convexes, fonctions convexes

$A = (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2 \quad B \in (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ deux points du plan

segment AB = ensemble des points de coordonnées $\begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + (1-\lambda) b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + (1-\lambda) b_2 \end{cases}$ avec $\lambda \in [0,1]$



généralisation : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ deux points de $\mathbb{R}^n$

Le segment AB est par définition l'ensemble des points de coordonnées

$$\begin{pmatrix} \lambda a_1 + (1-\lambda) b_1 \\ \lambda a_2 + (1-\lambda) b_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n + (1-\lambda) b_n \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda \in [0,1]$$

<u>Définition (ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$)</u> Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si dès qu'il contient deux points $A=(a_1,a_2,..,a_n)$ et $B=(b_1,b_2,..,b_n)$ il contient le segment AB : pour tout $A=(a_1,a_2,..,a_n)$, $B=(b_1,b_2,..,b_n)\in X$, tout $\lambda\in[0,1]$,

$(\lambda a_1+(1-\lambda)b_1, \lambda a_2+(1-\lambda)b_2, .., \lambda a_n+(1-\lambda)b_n)\in X$

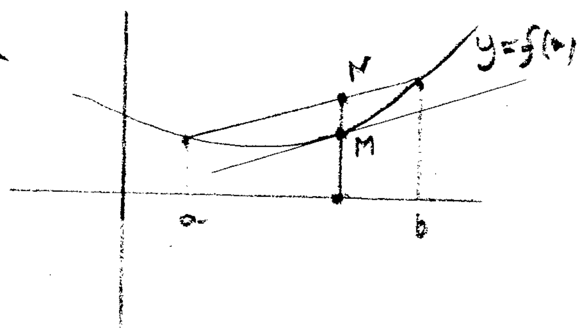
<u>Définition (fonction convexe, fonction concave)</u> $f: I\to\mathbb{R}$ I intervalle de $\mathbb{R}$

f est convexe (resp. concave) si l'une des propriétés suivantes est vérifiée

1) La partie située au-dessus (resp en dessous) du graphe de f est convexe
2) Pour tout $a, b\in I$, pour tout $\lambda\in[0,1]$

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b) \quad (\text{resp } \geq)$$

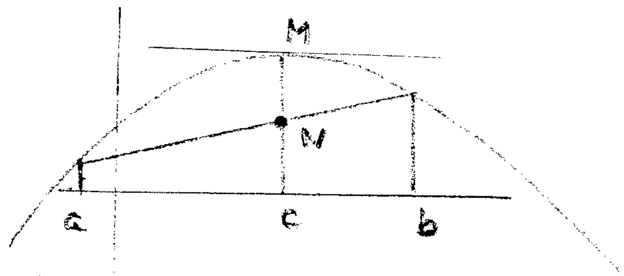
<u>f convexe</u>



$c=\lambda a+(1-\lambda)b$
$\lambda\in[0,1]$

$M\ (\lambda a+(1-\lambda)b, f(\lambda a+(1-\lambda)b))$
$N\ (\lambda a+(1-\lambda)b, \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b))$

<u>f concave</u>



$c=\lambda a+(1-\lambda)b$

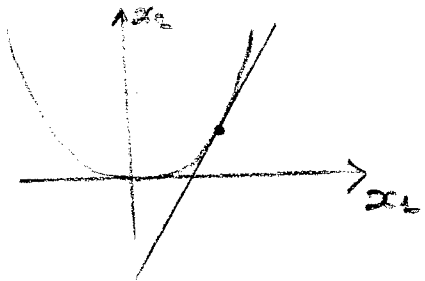
Proposition : f convexe (resp. concave) et dérivable, alors les tangentes au graphe de f sont en-dessous (resp. au-dessus)

Proposition : $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable

f convexe $\Leftrightarrow$ Pour tout $x \in I$ $f''(x) \geq 0$

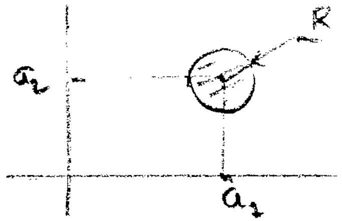
f concave $\Leftrightarrow$ — $f''(x) \leq 0$

Exemple de fonction convexe $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $x_1 \to x_2 = x_1^2$



Exemple d'ensemble convexe $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ $R > 0$

$B(a, R) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq R^2\}$



V.3 Lignes de niveaux X ensemble $f : X \to \mathbb{R}$ une application

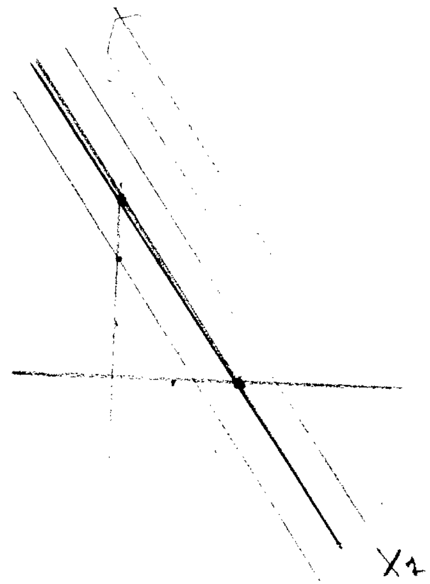
$k \in \mathbb{R}$ $X_k = \{ x \in X$ tels que $f(x) = k \}$

V.3.1 Exemples de lignes de niveau de fonctions de 2 variables

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_2$

Représenter $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1, x_2) = 1\}$

Que dire des lignes de niveaux de f



b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto \frac{2x_1 + 3x_2 - 1}{x_1 + x_2}$$

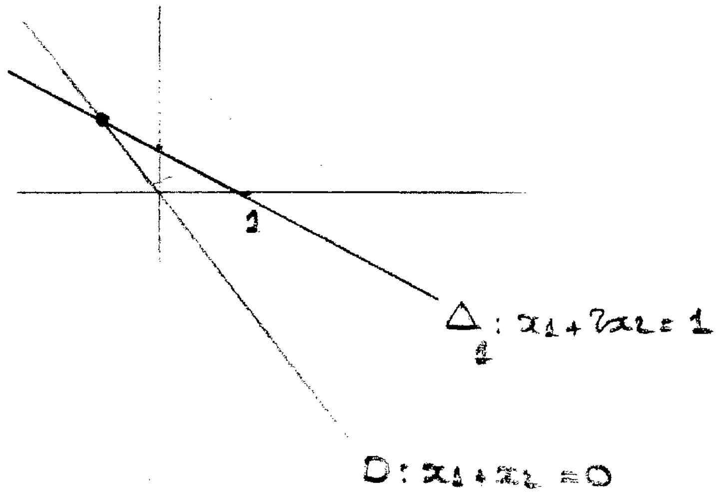
Dessiner le domaine de définition de f

Déterminer $E_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0$ et $f(x_1, x_2) = 1\}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 \neq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \neq 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

$D : x_1 + x_2 = 0$ $\Delta_1 : x_1 + 2x_2 = 1$

$E_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x_1, x_2) \in \Delta_1$ et $(x_1, x_2) \notin D\}$



$\Delta_1 \cap D : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

$x_2 = 1$
$x_1 = -1$

$\Delta_1 \cap D = \{(-1, 1)\}$

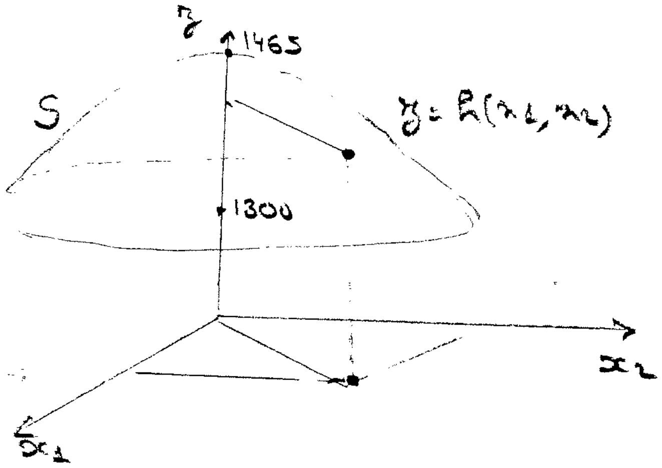
$E_1 = \Delta_1 - \{(-1, 1)\}$

On pose $E_k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0$ et $f(x_1, x_2) = k\}$

$\Delta_k : (k-2)x_1 + (k-3)x_2 = -1$ droite (passant par $(-1, 1)$)

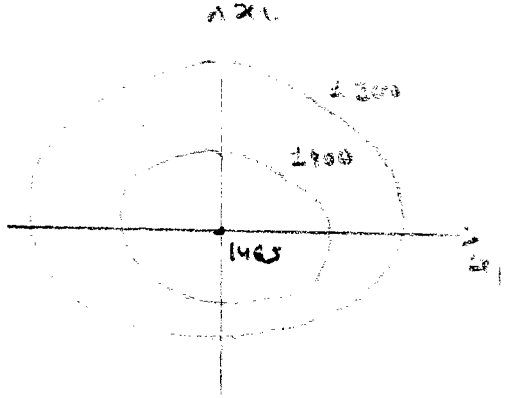
$E_k = \Delta_k - \Delta_k \cap D = \Delta_k - \{(-1, 1)\}$

IV 3 2 Lignes de niveaux / promenade en montagne



S surface du puit de dôme

$\longrightarrow$



Lignes de niveau de h

$E_{1300} = \{(x_1, x_2)$ tel que $h(x_1, x_2) = 1300\}$

$\longleftarrow$

$(x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2)$

Hauteur de la ligne de niveau passant par (x_1, x_2)

$S = \{(x_1, x_2, h(x_1, x_2))\}$

IV.3.3 Tangente à une ligne de niveaux :

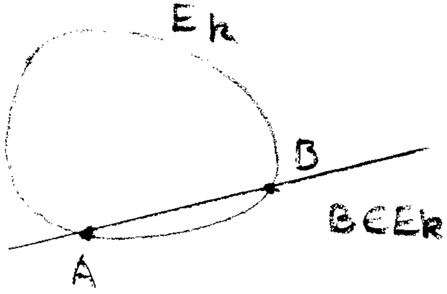
$f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$

on suppose que f admet des dérivées partielles

$E_k = \{(x_1, x_2) \in U$ tels que $f(x_1, x_2) = k\}$

$A = (a_1, a_2) \in E_k$

On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)$ non simultanément nuls. C'est à dire (a_1, a_2) n'est pas un pt critique de f



qd B tend vers A la sécante AB tend vers une droite d'équation ($B \in E_k$)

$$(x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$$

appelé droite tangente à E_k en $A = (a_1, a_2)$

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$x_1 + x_2 = \sqrt{2}$ est l'équation de la tangente à $E_1 : x_1^2 + x_2^2 = 1$

au point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$

V.3.4 Comprendre une ligne de niveaux

Th des fonctions implicites : U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ $(x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2)$

f admet des dérivées partielles continues sur U

$k \in \mathbb{R}$ $(a_1,a_2) \in U$ $f(a_1,a_2) = k$

1) $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) \neq 0$ $\exists I$ intervalle ouvert contenant a_1

$\exists J$ — a_2

$g : I \to \mathbb{R}$ à dérivée continue $/ I$

$$\begin{cases} (x_1,x_2) \in I \times J \\ f(x_1,x_2) = k \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \in I \\ x_2 = g(x_1) \end{cases}$$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) \neq 0$ $\exists I$ intervalle ouvert contenant a_1

$\exists J$ — a_2

$h : J \to \mathbb{R}$ à dérivée continue $/ I$

$$\begin{cases} (x_1,x_2) \in I \times J \\ f(x_1,x_2) = k \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 \in J \\ x_1 = h(x_2) \end{cases}$$

<u>Exemple</u> : $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\qquad (a_1, a_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \in \,]-1, 1[\, \times \,]0, \infty[\\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x_1 \in \,]-1, 1[\\ x_2 = \sqrt{1 - x_1^2} \end{array}$$

<u>généralisation</u> : $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$

f a dérivées partielles continues / U $\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, .., a_n) \neq 0$

$f(a_1, a_2, .., a_n) = k$

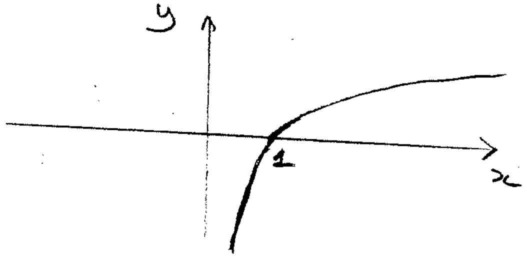
Alors $\exists\, V$ ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant $(a_2, a_3, .., a_n)$

$\exists\, I$ — $\mathbb{R}$ — a_1

$h : V \to \mathbb{R}$ a dérivées partielles continues

$$\begin{cases} (x_1, x_2, .., x_n) \in I \times V \\ f(x_1, x_2, .., x_n) = k \end{cases} \iff \begin{cases} (x_2, .., x_n) \in V \\ x_1 = h(x_2, .., x_n) \end{cases}$$

1 fonction logarithme



$\ln : \mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \ln(x)$

$\ln(1) = 0 \qquad \ln \nearrow$

$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

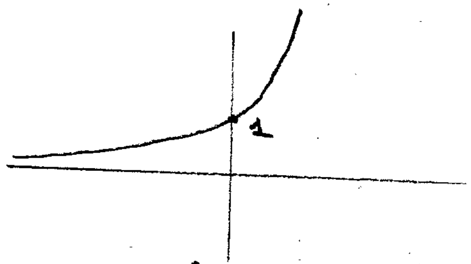
$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$

$\ln x > 0 \iff x > 1$

$x > 0,\ y > 0 : \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

2 fonction exponentielle



$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ - \{0\} \qquad x \mapsto e^x$

$e^0 = 1 \qquad e^x \nearrow$

$e'(x) = e^x$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Pour tout x, y reel

$e^{x+y} = e^x e^y$

Pour tout x reel

$\ln(e^x) = x$

Pour tout $x > 0$

$e^{\ln x} = x$

Autrement dit : logarithme et exponentielle [illegible] l'une de l'autre.

3 fonction puissance

x^n pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^n$ défini par $x^n = x \times x \times \dots \times x$ n fois

x^{-n} pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$x^{p/q}$ pour $p, q \in \mathbb{Z}$: $\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^{p/q}$

$y = x^{p/q}$ est l'unique réel positif tel que $y^q = x^p$

x^a pour $a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$

Proposition : Soit $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^a$ est dérivable et $(x^a)' = a x^{a-1}$

Proposition : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $x, y > 0$

$x^{a+b} = x^a x^b$ $(x^a)^b = x^{ab}$ $(xy)^a = x^a y^a$

Remarque : Pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$