III.3 Point critique, extremum d'une fonction numérique

Retour a des fonctions d'une variable

$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f$ dérivable

Si il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c)$ est une valeur maximum de f (ou minimum), alors $f'(c) = 0$

exemple : $\quad]-1,1[\to \mathbb{R} \quad x \to x^2 = f(x)$ $\qquad f'(x) = 2x$

$0 \in]-1,1[\quad \forall x \in]-1,1[\quad f(x) \geq f(0) = 0$

On a bien $f'(0) = 2 \times 0 = 0$

Ce résultat est faux si on remplace $]a,b[$ par $[a,b]$.

Ainsi $g : [-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \to x^2+1 = g(x)$ admet 2 comme maximum atteint en $x = 1$, mais $g'(1) \neq 0$.

$A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$

<u>Définition :</u> On dit que f admet un maximum en $a = (a_1, .., a_n) \in A$ si pour tout $(x_1, .., x_n) \in A$: $f(x_1, .., x_n) \leq f(a_1, .., a_n)$

On dit que f admet un minimum en $a = (a_1, -, a_n) \in A$ si pour tout $(x_1, -, x_n) \in A$: $f(x_1, .., x_n) \geq f(a_1, .., a_n)$

On dit que f admet un maximum local en $a = (a_1, ., a_n) \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $(x_1, ., x_n) \in B(a, \varepsilon) \cap A$

$$f(x_1, ., x_n) \leq f(a_1, .. a_n)$$

On dit que f admet un minimum local en $a = (a_1, ., a_n) \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ ——

$$f(x_1, ., x_n) \geq f(a_1, ., a_n)$$

extremum = minimum ou maximum

<u>Définition :</u> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$.

On suppose que f admet des dérivées partielles sur U

On appelle point critique de f tout point $x = (x_1, .., x_n) \in U$

tel que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, .., x_n) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, .., x_n) = 0$

<u>Exercice</u> Trouver les points critiques de la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 5x_1 - 6x_2$

f est polynomiale donc admet des dérivées partielles à tout ordre sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_2 + x_1 - 6$$

(x_1, x_2) point critique de f :

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 5 = 0 \\ 4x_2 + x_1 - 6 = 0 \end{array} \right.$$

Donc (x_1, x_2) solution du système

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

D'ou $\quad 8x_2 - x_2 = 12 - 5$

$$7x_2 = 7$$

$$x_2 = 1$$

D'où $\quad x_1 = 6 - 4 = 2$

f a donc un seul point critique, le point $(2,1)$

La valeur de f en $(2,1)$ est $\quad f(2,1) = 4 + 2 + 2 - 10 - 6 = -8$

<u>Proposition :</u> Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$

On suppose que f admet sur U des dérivées partielles d'ordre 1

Si f admet un extremum local en $c = (c_1, .., c_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1, .., c_n) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(c_1, .., c_n) = 0$$

C'est à dire : $\quad c = (c_1, .., c_n)$ est un point critique de f

III.4 Signe d'une dérivée partielle

<u>rappel</u> $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivable

Si pour tout $t \in]a,b[$, $f'(t) \geqslant 0$ alors f est croissante sur $]a,b[$

$t \in]a,b[$, $f'(t) \leqslant 0$ — décroissante —

croissante sur $]a,b[$: $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ "conserve l'ordre"

decroissante sur $]a,b[$: $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$ "renverse l'ordre"

<u>exemple :</u> taux de radioactivité d'un morceau d'uranium décroît
la pollution est une fonction croissante du temps ...

<u>remarque :</u> Il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{R}^n$ donc la croissante
d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n'a pas de sens naturel

Proposition : $f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$

$i \in \{1, 2, .., n\}$ f admet une dérivée partielle $/ x_i$

$\forall (a_1, .., x_n) \in U$: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, .., x_n) \geq 0$ (resp ≤ 0)

Alors la fonction $x_i \to f(x_1, .., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, .., x_n)$ est croissante (resp décroissante)

Exemple : p_1 prix du produit 1

p_2 — 2

r budget du consommateur

$U = \{(p_1, p_2, r) \in \mathbb{R}^3$ tels que $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $r > 0)$

U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$

$f : U \to \mathbb{R}$ $(p_1, p_2, r) \mapsto f(p_1, p_2, r) = \frac{p_2 r}{p_1(p_1 + p_2)}$

f est la fonction demande

que dire de la demande quand le prix du produit 2 et le budget sont fixés

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_1, p_2, r) = - \frac{p_2 r (2p_1 + p_2)}{p_1^2 (p_1 + p_2)^2} < 0$$

donc la demande diminue quand p_1 augmente !

IV Fonctions numériques différentiables

IV.1 fonctions numériques continues

$A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$

<u>Définition intuitive :</u> $b = (b_1, \dots b_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad \ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$ signifie "pour x dans A proche de b, alors $f(x)$ est proche de ℓ"

<u>Remarque :</u> $a \in A$ $\quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\ell = f(a)$

<u>Définition (continuité)</u> $\quad f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad a \in A$

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(autrement dit $f(x)$ est proche de $f(a)$ quand $x \in A$ et est proche de a)

On dit que f est continue si f est continue en tout point de A

<u>Proposition</u> : $f, g \quad A \to \mathbb{R}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$

Supposons f, g continues en $a \in A$. Alors $f+g$, λf, fg sont continues en a. Si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est de plus continue en a

<u>Proposition</u> (Exemple de fonctions continues)

Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur $\mathbb{R}^n$

Les fonctions rationnelles de n variables sont continues sur leur ensemble de définition

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2$

$f(3, 2) = 17$

comme f est continue, on a en particulier que $f(x_1, x_2)$ est proche de 17 quand (x_1, x_2) est proche de $(3,2)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ fonction rationnelle

$\mathcal{D}_g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_2 \neq 0\}$

$(1,1) \in \mathcal{D}_g$ $\quad g(1, 1) = 1$

g est continue en $(1, 1)$

$g(x_1, x_2)$ est proche de 1 quand (x_1, x_2) est proche de $(1, 1)$

<u>Dfn</u> : $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad B \subset A$

on appelle restriction de f à B, notée $f_{|B}$, l'application

$f_{|B} : B \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$

<u>Proposition :</u> La restriction d'une fonction continue est continue

En particulier la restriction d'une fonction polynomiale à tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est continue.

<u>Proposition</u> $f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ continue

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue pour tout $f(a)$ où $a \in A$

Alors $g \circ f$ est continue

IV.2 Deux Résultats sur les fonctions continues

Proposition : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue $\quad c \in \mathbb{R}$

$\{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .., x_n) > c\}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\{ \quad f(x_1, .., x_n) < c\}$ —

$\{ \quad f(x_1, .., x_n) \neq c\}$ —

$\{(x_1, .. x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x_1, .., x_n) \geq c\}$ fermé de $\mathbb{R}^n$

$\{ \quad f(x_1, .., x_n) \leq c\}$ —

$\{ \quad f(x_1, .., x_n) = c$ —

Remarque : En particulier le domaine de définition d'une fonction rationnelle de n variables est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Exemple : $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \varepsilon > 0$

$B(a, \varepsilon) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < \varepsilon\}$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$

Théorème : $A \subset \mathbb{R}^n$ A fermé et borné

$f : A \to \mathbb{R}$ continue

Alors $\exists (a_1, .., a_n) \in A$ tel que $\forall (x_1, .., x_n) \in A$: $f(x_1, .., x_n) \leq f(a)$

(f admet en a un maximum)

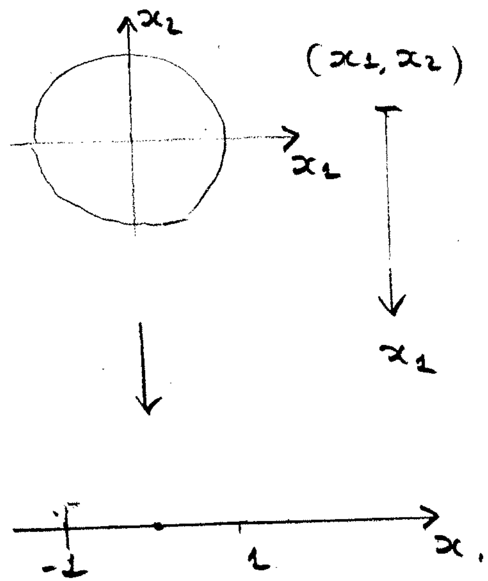
$\exists (b_1, .., b_n) \in A$ ———————— : $f(x_1, .., x_n) \geq f(b)$

(f admet en b un minimum

Exemple $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$f : A \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto x_1$

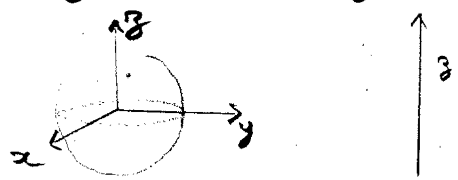
1) montrer que A est un fermé et un borné de $\mathbb{R}^2$
2) montrer que f est continue
3) Donner les points où f admet un maximum et où f admet un minimum



Cours n° 7 Cours 07-08

IV 2. (Suite)

$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$



$S \xrightarrow{h} \mathbb{R}$

$(x, y, z) \longmapsto z$

S est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$

h est continue (restriction d'une fonction polynomiale)

Donc $\exists (x_0, y_0, z_0) \in S$ $h(x_0, y_0, z_0) \leq h(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in S$

rem : $(0, 0, -1)$ convient

IV.3 Fonction numerique differentiable

Remarque : $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1,x_2) \mapsto h(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2+x_2^2} & \text{si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x_1,x_2) = (0,0) \end{cases}$

on peut montrer que h admet en tout point des dérivées partielles par rapport à x_1 et x_2

Par contre $h\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \dfrac{2/n^2}{5/n^2} = \dfrac{2}{5}$

qd n est grand $\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ proche de $(0,0)$
mais $h\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{5}$ n'est pas proche de $h(0,0) = 0$

Donc h n'est pas continue

Proposition : $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$
f admet des dérivées partielles continues sur U
Alors f est continue

<u>Proposition :</u> $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$

On suppose que f admet des dérivées partielles continues sur U

Soit $(a_1, .., a_n) \in U$, alors il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, .., a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, .., a_n) h_i + \varepsilon(h_1, .., h_n)\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$$

avec $\lim\limits_{(h_1, .., h_n) \mapsto 0} \varepsilon(h_1, .., h_n) = 0$

<u>Dfn (différentielle)</u> : $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$

On suppose que f admet des dérivées partielles continues sur U

$a = (a_1, .., a_n) \in U$. On appelle différentielle de f en a, notée $Df(a)$ l'application

$$Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (h_1, .., h_n) \longmapsto Df(a)(h_1, .., h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, .., a_n) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, .., a_n) h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, .., a_n) h_n$$

<u>Resumé</u> : $f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$ à dérivées partielles continues

$a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ Pour $h_1, \dots, h_n$ réels petits

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \cong f(a_1, \dots, a_n) + Df(a)(h_1, \dots, h_n)$$

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$

1) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

2) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1)$, $Df(1,1)$, $f(1,1)$

3) Comparer $f\left(1 + \frac{1}{400}, 1 + \frac{1}{800}\right)$, $f(1,1)$, $f(1,1) + Df(1,1)\left(\frac{1}{400}, \frac{1}{800}\right)$

<u>reponse</u> : 1) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 1$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2 + x_1 + 1$

2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 4$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) = 4$ $f(1,1) = 5$

$Df(1,1) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(h_1, h_2) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,1) h_2 = 4h_1 + 5h_2$

3) $f(1,1) = 5$

$f(1,1) + Df(1,1)\left(\frac{1}{400}, \frac{1}{800}\right) = 5 + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} = 5 + \frac{3}{200}$

$f\left(1 + \frac{1}{400}, 1 + \frac{1}{800}\right) = 5 + 3/200 + \left(\frac{1}{400}\right)^2 + \left(\frac{1}{800}\right)^2 + \frac{1}{400 \times 800}$

<u>Proposition</u> (Identité de Schwarz) $f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues $/U$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

<u>Remarque</u> : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale, on est sous les hypothèses de la proposition

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle et U son ouvert de définition, on est sous les hypothèses de la proposition

<u>Exemple</u> : $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$

$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 \neq 0\}$

1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

2) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$

Constater l'identité de Schwarz

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{2x_2}{(x_1+x_2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{-2x_1}{(x_1+x_2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) = \frac{-4x_2}{(x_1+x_2)^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) = \frac{4x_1}{(x_1+x_2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{(x_1+x_2)^2 \times 2 - 2x_2(2(x_1+x_2))}{(x_1+x_2)^4} = \frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{(x_1+x_2)^2(-2) + 2x_1(2(x_1+x_2))}{(x_1+x_2)^4} = \frac{2(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)^3}$$

Compléments : <u>Dérivées</u> partielles d'une fonction composée

$g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (y_1,\dots,y_p) \longmapsto g(y_1,\dots,y_p)$ $\quad$ U ouvert de $\mathbb{R}^p$

$f_1 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_1,\dots,x_n) \longmapsto f_1(x_1,\dots,x_n)$ $\quad$ V ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\vdots$

$f_p : V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (x_1,\dots,x_n) \longmapsto f_p(x_1,\dots,x_n)$

<u>Hypothèse</u> : $g, f_1, \dots, f_p$ a dérivées partielles continues

$V \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ $\quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto h(x_1,\dots,x_n)$

$$= g(f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n), \dots, f_p(x_1,\dots,x_n))$$

<u>Assertion</u> : Alors h admet des dérivées partielles $i \in \{1, 2, .., n\}$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1,..,x_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_1,..,x_n)\frac{\partial g}{\partial y_1}(f_1(x_1,..,x_n),\dots,f_p(x_1,..,x_n)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_1,..x_n)\frac{\partial g}{\partial y_2}(f_1(x_1,..,x_n),..,f_p(x_1,..,x_n))$$
$$+ \dots + \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x_1,..,x_n)\frac{\partial g}{\partial y_p}(f_1(x_1,..,x_n),..,f_p(x_1,..,x_n))$$

IV.4 Problème d'extremum libre à 2 variables :

$f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$

f admettant des dérivées partielles

On a vu que si f admet en (a_1, a_2) un extremum local, alors

(a_1, a_2) est un point critique de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0$$

<u>Proposition :</u> $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$

On suppose que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues
Soit (a_1, a_2) un point critique de f

1) Si $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)\right)^2 > 0$

Alors f admet en (a_1, a_2) un extremum local

a) $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) > 0$

f admet en (a_1,a_2) un minimum local

b) $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) < 0$

f admet en (a_1, a_2) un maximum local

2) Si $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)\right)^2 < 0$

Alors f n'admet pas en (a_1, a_2) un extremum local

3) Si $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2) \; \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2)\right)^2 = 0$

On ne peut rien dire (des fois oui, des fois non)

Cours n°8

IV.4 (Suite) un pb d'extremum libre à deux variabl

$f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$

f avec des dérivées partielles d'ordre 2

(a_1, a_2) un pt critique de f

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)$ $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2)$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2}(a_1, a_2)$

$rs - t^2 > 0$ f admet un extremum local en (a_1, a_2)

$rs - t^2 < 0$ f n'admet pas

$rs - t^2 = 0$?

$rs - t^2 > 0$, $r + s > 0$ f admet un minimum local en (a_1, a_2)

$rs - t^2 < 0$ $r + s < 0$ — maximum —

<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 3$

1) Pourquoi f admet elle des dérivées de tout ordre

2) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$

3) Trouver les points critiques de f 4) Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

5) Si (a_1, a_2) est un point critique de f, f admet-elle en ce point un extremum local ? de quelle nature ?

1) f est une fonction polynomiale

2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 2$ $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_1) = x_1 + 2x_2 + 1$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(-1, 0)$

4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_1) = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_1) = 1$

5) $(a_1, a_2) = (-1, 0)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(-1,0) = 1$

$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1}(-1,0) = 2$ $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,0) = 2$

$rs - t^2 = 2 \times 2 - (1)^2 = 3 > 0$ donc f admet en $(-1,0)$ un extremum local

$r + s = 4 > 0$ f admet en $(-1,0)$ un minimum local

IV 5 Problème d'extremum avec contrainte

IV. 5. 1 2 variables

Proposition : $f : U \to \mathbb{R}$ U ouvert de $\mathbb{R}^2$
$g : U \to \mathbb{R}$

On suppose que f et g admettent des dérivées partielles continues sur U, $k \in \mathbb{R}$

$H = \{ (x_1, x_2) \in U$ tel que $g(x_1, x_2) = k \}$

- Si (a_1, a_2) est un extremum local de la restriction de f à H alors

$$(a_1, a_2) \in H$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\, \frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\, \frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 0$$

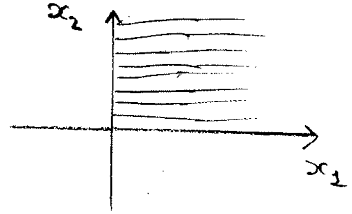
Proposition (version fonction lagrangienne) même hypothèse que précédemment

- Si (a_1, a_2) est un extremum local de la restriction de f à H, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tq. (a_1, a_2, λ_0) soit un point critique de h

$$h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, \lambda) \longmapsto f(x_1, x_2) + \lambda\,(g(x_1, x_2) - k)$$

exercice : $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$

1) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et dessiner U



2) $f : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

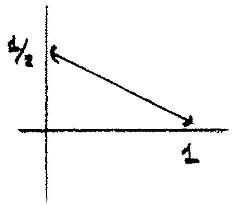
Calculer les dérivées partielles de f

$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}$

3) $g : U \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + 2x_2$

$H = \{(x_1, x_2) \in U \;;\; g(x_1, x_2) = 1\}$

Dessiner H, calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2)$



$\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2$

$\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1$

4) On suppose que $\underset{(x_1,x_2)\longmapsto\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{H \xrightarrow{f} \mathbb{R}}$ a un maximum en (a_1,a_2). Déterminer (a_1,a_2).

On a alors

$$\begin{cases} g(a_1,a_2) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\,\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_1)\,\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 1 \quad a_1 > 0 \quad a_2 > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{a_1}} \times 2 - \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \cdot 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 1 \quad a_1 > 0 \quad a_2 > 0 \\ 2\sqrt{a_2} = \sqrt{a_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 1 \quad a_1 > 0 \quad a_2 > 0 \\ 4a_2 = a_1 \end{cases} \qquad a_2 = \frac{1}{6} \quad a_1 = \frac{2}{3}$$

Ainsi $(a_1,a_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

5) Quels sont les points critiques de

$h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2, \lambda) \mapsto \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \lambda (x_1 + 2x_2 - 1)$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + \lambda = 0 \qquad x_1 > 0$$

$$x_2 > 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} + 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

on a à resoudre

$$\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{x_1}}$$

$$\lambda = -\frac{1}{4\sqrt{x_2}}$$

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$x_1 > 0, \ x_2 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4\lambda^2} \\ x_2 = \dfrac{1}{16\lambda^2} \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{8\lambda^2} = 1 \end{cases} \qquad \frac{3}{8\lambda^2} = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{3}{8}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{6}, \quad \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

h admet un unique point critique $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

6) Montrer que 5 permet de retrouver le resultat de 4

Cela découle de la prop extremum avec contrainte, version fct Lagrangienne

IV.5.2 généralisation à n variables

<u>Proposition :</u> U ouvert de $\mathbb{R}^n$ $\quad f : U \to \mathbb{R}$ $\quad g : U \to \mathbb{R}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

f et g à dérivées partielles continues

$H = \{ (x_1, x_2, .., x_n) \in U$ tels que $g(x_1, x_2, .., x_n) = k \}$

Si $(a_1, a_2, .., a_n)$ est un extremum de la restriction de f à H (ou encore extremum de f sur la contrainte $g(x_1, .., x_n) = k$). Alors soit

- $(a_1, a_2, .., a_n)$ est un pt critique de g

soit

- $\exists \lambda_0$ tq $(a_1, a_2, .., a_n, \lambda_0)$ est un point critique

$(x_1, x_2, .., x_n, \lambda) \longmapsto h(x_1, x_2, .., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, .., x_n) + \lambda (g(x_1, x_2, .., x_n) - k)$

<u>Remarque :</u>

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2, .., x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, .., x_n) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, .., x_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\;, \dots, \;) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, x_1, .., x_n)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1, .., x_n, \lambda) = g(x_1, x_2, .., x_n) - \lambda$$

IV.6 Fonctions homogènes

Dfn : Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est un cône positif si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$: $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in C$

Exemple : $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 + x_2 > 0\}$ est un cône positif de $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^n$ est un cône positif de $\mathbb{R}^n$

Définition (fonction homogène de degré k) Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$ et k un réel. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

La fonction f est dite homogène de degré k si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

<u>Example</u> : $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto g(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$
est homogène de degré 2

1) $\mathbb{R}^2$ est bien un cône positif

2) Soit $\lambda > 0$ $g(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_1)(\lambda x_2) + (\lambda x_2)^2$

$$= \lambda^2(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \lambda^2 g(x_1,x_2)$$

<u>Example</u> : $h : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \mapsto h(x_1,x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^4 + x_2^4}}$

h est définie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ est un cône positif : Si $(x_1,x_2) \neq (0,0)$ et $\lambda > 0$, alors $(\lambda x_1, \lambda x_2) \neq (0,0)$

$$h(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{1}{\sqrt{(\lambda x_1)^4 + (\lambda x_2)^4}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^4(x_1^4 + x_2^4)}} = \frac{1}{\lambda^2\sqrt{x_1^4 + x_2^4}} = \frac{1}{\lambda^2} h(x_1,x_2)$$

$$= \lambda^{-2} h(x_1,x_2)$$

Donc h est homogène de degré -2

<u>Proposition (Identité d'Euler)</u> Soit C un cône positif de $\mathbb{R}^n$ que nous supposons ouverts. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ $(x_1, .., x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, .., x_n)$ admettant des dérivées partielles continues. Alors

f homogène de degré k $\iff$ $\forall (x_1, .., x_n) \in C$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, .., x_n) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, .., x_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, .., x_n)$$
$$= k\, f(x_1, x_2, .., x_n)$$

<u>Exercice</u> : $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $(x_1, x_2) \longrightarrow f(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$

est homogène de degré 0

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(x_1^2 + x_2^2)(2x_1 + x_2) - (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)(2x_1)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2 (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 x_2}{-}$$

$$= \frac{x_2 (x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \qquad \text{de m} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 = 0\, f(x_1, x_2)$$