I Généralités sur les ensembles et les applications

1) Ensemble :

Définition : Un ensemble est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble sont encore appelés élément de cet ensemble

Exemple : Les actions de la bourse de Paris, les électeurs à la présidentielle française 2007, ...

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels (c.a.d les quotients d'entiers relatifs)

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels (c.a.d les nombres à développement décimal arbitraire)

Notation : On convient qu'il existe un ensemble sans élément. Il est noté $\emptyset$

<u>Notation</u> : Soit A un élément et a un élément de A.

$a \in A$ se lit a appartient à A

<u>Définition</u> : Soit A et B deux ensembles. B est dit sous-ensemble de A ou contenu dans A, si tous les éléments de B sont des éléments de A.

<u>Notation</u> : Soit B un sous-ensemble de A.

$B \subset A$ se lit B contenu dans A

<u>Exemples</u> : $\{-1/2, 4, 3/5\}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ constitué des 3 éléments $-1/2$, 4 et $3/5$.

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}$

ou encore $\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs

$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant 0\}$ $\quad$ $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0\}$

2) Opération sur les ensembles

Définitions : Soit E un ensemble et $B \subset E$, $C \subset E$ deux sous-ensembles de E

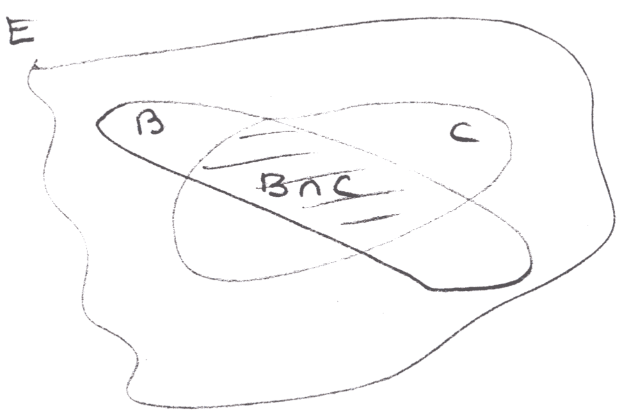
1) L'intersection de B et de C est le sous-ensemble de E, noté $B \cap C$, défini par

$B \cap C = \{x \in E$ tel que $x \in B$ et $x \in C\}$

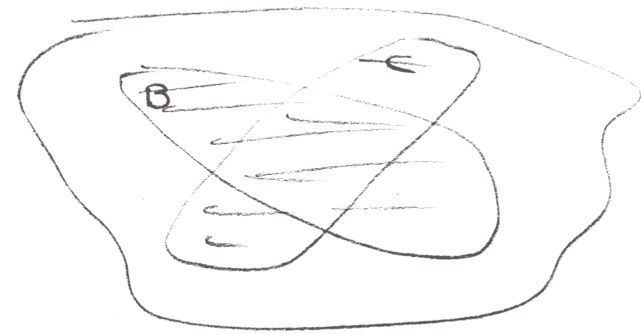
2) La réunion (ou l'union) de B et de C est le sous-ensemble de E, noté $B \cup C$, définie par $B \cup C = \{x \in E$ tel que $x \in B$ ou $x \in C\}$

3) Le complémentaire de B dans E est le sous-ensemble de E, noté $E - B$, définie par :

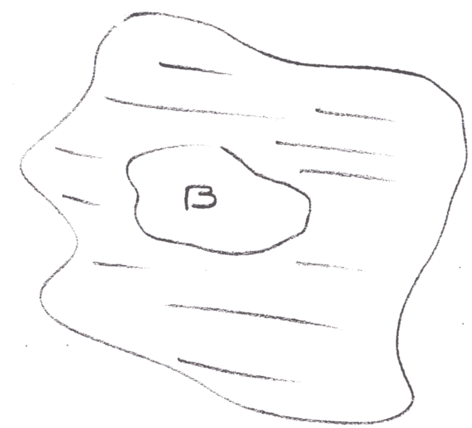
$E - B = \{x \in E$ tel que x n'appartient pas à $B\}$



$B \cap C$



$B \cup C$



$E - B$

- **Definition :** Le cardinal d'un ensemble A est son nombre d'éléments. On peut le noter card(A)

Formule : Soit B, C deux sous-ensembles de E

$$\text{card}(B \cup C) = \text{card } B + \text{card } C - \text{card}(B \cap C)$$

$$\text{card}(E - B) = \text{card } E - \text{card } B$$

Exemple :

$$B = \{-6, -4, -2, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$$

$$C = \{-4, 1, 2, 5, 7\} \subset \mathbb{Z}$$

$$B \cap C = \{-4, 1, 2\}$$

$$B \cup C = \{-6, -4, -2, 1, 2, 3, 5, 7\}$$

$$B \cup C - B \cap C = \{-6, -2, 3, 5, 7\}$$

$$B - B \cap C = \{-6, 2, 3\}$$

$$C - B \cap C = \{5, 7\}$$

3) Applications entre deux ensembles

<u>Définition :</u> Soit X, Y deux ensembles. Une application f de X dans Y est un procédé qui à tout élément x de X associe un élément noté alors $f(x)$ de Y.

1) X est appelé la source de f
2) Y est appelé le but de f
3) Si $x \in X$, $f(x)$ est appelé l'image de x par f
4) Soit $y \in Y$, si $x \in X$ est tel que $f(x) = y$, alors x est appelé un antécédent de y

Une application est la donnée de sa source X, de son but Y et du procédé.

$f : X \longrightarrow Y$ signifie que l'on a une application de X vers Y reste ensuite à préciser le procédé

<u>Exemple</u> : $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = 1 - 3x$

quelle est l'image de 3 : $f(3) = 1 - 9 = -8$

quelles sont les antécédents de -1 :

$x \in \mathbb{R}^+$? $\quad f(x) = -1$

$$1 - 3x = -1$$

$$-3x = -2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

quels sont les antécédents de 3 :

$x \in \mathbb{R}^+$? $\quad f(x) = 3$

$$1 - 3x = 3$$

$$-3x = 2$$

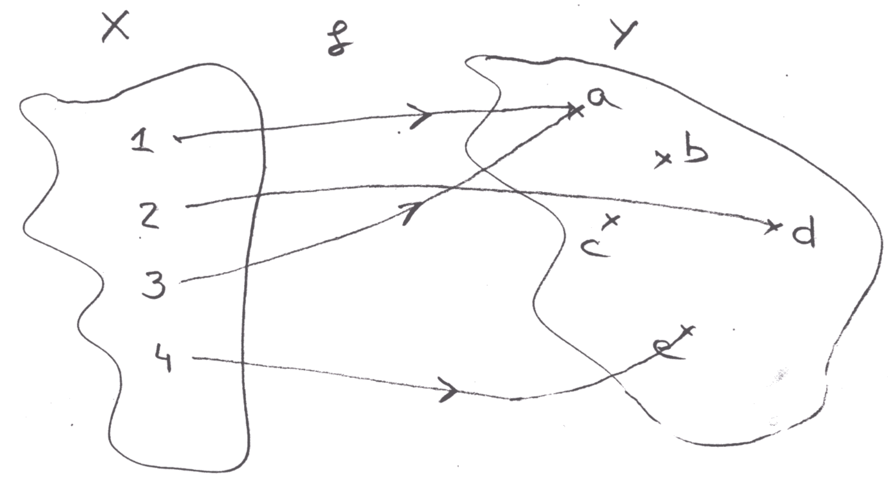
$x = -\frac{2}{3}$ mais $-\frac{2}{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{R}^+$

donc 3 n'a pas d'antécédent

Exemple :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$
$Y = \{a, b, c, d, e\}$

$f(1) = a$
$f(2) = d$
$f(3) = a$
$f(4) = e$



f est bien une application
l'image de 1 est a
les antécédents de a sont 1 et 3
c n'a pas d'antécédents
etc ...

<u>Définition (l'identité)</u> : Soit E un ensemble. L'identité de E, noté Id_E est l'application de E vers E qui envoie tout élément de E sur lui même. Autrement écrit :

$$Id_E : E \to E \qquad x \mapsto Id_E(x) = x$$

<u>Définition (composition d'applications)</u> :

Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. La composée de g par f, notée $g \circ f$, est l'application :

$$g \circ f : A \to C \qquad a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

⚠ $g \circ f$ n'est défini que si la source de g est le but de f.

Exemple 1

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = 1 - 2x$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^+ \qquad x \longmapsto g(x) = x^2 + 2$$

$$g \circ f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - 2x)$$
$$= (1 - 2x)^2 + 2$$
$$= 4x^2 - 4x + 3$$

Exemple 2

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^+ \qquad x \longmapsto (x + 1)^2$$

$$\mathbb{R}^+ \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad x \longmapsto -\sqrt{x}$$

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g((x+1)^2)$$
$$= -\sqrt{(x+1)^2}$$
$$= -|x+1|$$

4) Injection, surjection, bijection

Définition : Soit $f : X \to Y$ une application

1) Si tout élément de Y par f a 0 ou 1 antécédent, on dit que f est injective
2) — a 1 ou plus antécédents, — est surjective
3) — a exactement 1 antécédent, — est bijective

4) Si <u>f est bijective</u>, l'application de Y vers X qui a $y \in Y$ associe son antécédent par f est notée f^{-1}

$f^{-1} : Y \to X \qquad y \mapsto f^{-1}(y)$ l'antécédent de y par f

<u>Remarque</u> Si $f : X \to Y$ est bijective, $\quad f \circ f^{-1} = Id_Y \qquad f^{-1} \circ f = Id_X$

<u>Rappels</u> : Les antécédents de y par f sont les solutions de

$$x \in X \text{ et } f(x) = y$$

Ainsi savoir si f est injective, surjective, bijective, c'est résoudre des équations. Si f est bijective, trouver f^{-1} peut s'obtenir aussi en résolvant des équations

<u>Exemple</u> : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x) = -17x + 1$

Montrer que f est bijective, déterminer f^{-1}

<u>Exercice</u> : $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad x \mapsto f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-1}$

Montrer que f est bijective, déterminer f^{-1}

I 4 Injection, surjection, bijection (suite)

Rappel : $f : X \to Y \qquad x \mapsto y = f(x)$

Fixons $y \in Y$ et regardons le système d'éq. $\begin{cases} f(x) = y \\ x \in X \end{cases} \quad (*)$

Si pour tout y, le syst $(*)$ a $\leqslant 1$ solutions, on dit f injective

$(*)$ a $\geqslant 1$ — f surjective

$(*)$ a 1 solution — f bijective

Dans le dernier cas : $f^{-1} : Y \to X \qquad y \mapsto$ l'unique solution de $(*)$

est appelé l'inverse de f. On a $\quad f \circ f^{-1} = 1d_Y \qquad f^{-1} \circ f = 1d_X$

Exercice : $\mathbb{R} - \{2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad x \longmapsto f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}

1) Préalablement, on peut montrer que f est bien définie.

Si x appartient à la source de f, $x \neq 2$ et $f(x)$ est un réel bien défini. Il reste à voir que $f(a)$ appartient au but de f, donc que $f(x) \neq 1$. Sinon : $\dfrac{x-1}{x-2} = 1$, d'où $x-1 = x-2$ et $1 = 2$, c'est impossible

2) Soit y au but de f, c.a.d. $y \neq 1$ Résolvons

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = y \end{cases} ?$$

ce système s'écrit

$$(*) \begin{cases} x \neq 2 & (a) \\ \dfrac{x-1}{x-2} = y & (b) \end{cases}$$

Si $x \neq 2$ verifie (b) : $(x-1) = y(x-2)$

$$x - 1 = yx - 2y$$

$$x - yx = 1 - 2y$$

$$x(1-y) = 1 - 2y$$

Comme $y \neq 1$, on obtient $x = \dfrac{1-2y}{1-y}$.

Il reste a voir que ce reel verifie bien (a), c.a.d est differente de 2

Sinon $\dfrac{1-2y}{1-y} = 2$, d'où $1 - 2y = 2 - 2y$ et $1 = 2$; impossible !

Donc, pour tout $y \neq 1$, (*) a une unique solution L'application

f est bien bijective et

$$f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \qquad y \longmapsto x = \frac{1-2y}{1-y}$$

<u>Exercice</u> : Montrer que l'application

$h : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\} \qquad x \longmapsto y = h(x) = 3 + \frac{6}{x+2}$

est bijective. Déterminer h^{-1}

Solution : on admet que h est bien défini

Soit $y \neq 3$

Résolvons $\begin{cases} x \neq -2 \\ 3 + \frac{6}{x+2} = y \end{cases}$ (*)

Si $x \neq -2$ et $3 + \frac{6}{x+2} = y$:

$$\frac{6}{x+2} = y - 3$$

$$\frac{6}{y-3} = x + 2$$

$$x = -2 + \frac{6}{y-3}$$

Reste à voir que $-2 + \frac{6}{y-3} \neq -2$: sinon $-2 + \frac{6}{y-3} = -2$

et $\frac{6}{y-3} = 0$ et $6 = 0$ impossible

Donc pour $y \neq 3$, y a un unique antécédent par h

$$x = -2 + \frac{6}{y-3}$$

ainsi h est bijection.

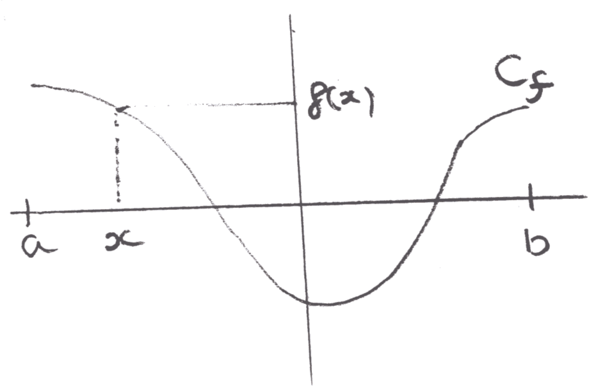
$$h^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\} \qquad y \longmapsto x = -2 + \frac{6}{y-3} = \frac{-2y+12}{y-3}$$

5) Théorème sur les fonctions numériques d'une variable (une propriété des nombres réels)

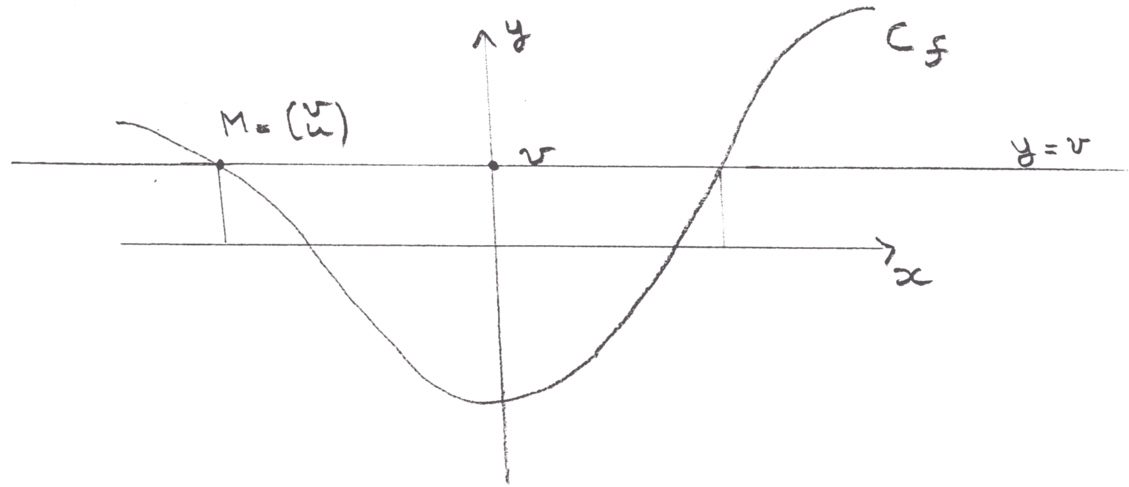
$a < b$ deux réels $\qquad f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

a peut être $-\infty$
b — $+\infty$

Considérons la courbe représentative C_f de f



M de coordonnées $(x, y) \in C_f$
si et seulement si $y = f(x)$



Soit v une valeur au but de f. Considérons la droite d'équation $y = v$

Soit $M = \binom{u}{v}$ a l'intersection de C_f et de cette droite.

On a donc, puisque $M \in C_f$: $v = f(u)$

Conclusion : Les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'equation $y = v$ sont les antécédents de v par f

alphabet grec α alpha

β beta

Théorème : $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable

On suppose que pour tout $c \in]a,b[$: $f'(c) > 0$

(respectivement $f'(c) < 0$)

Alors

1) f est strictement croissante (respectivement décroissante)

2) L'ensemble des images par f des réels de $]a,b[$ est intervalle $]\alpha,\beta[$ de $\mathbb{R}$ où $\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$ $\beta = \lim_{x \to b} f(x)$ (respectivement $\alpha = \lim_{x \to b} f(x)$, $\beta = \lim_{x \to a} f(x)$)

3) L'application $]a,b[\to]\alpha,\beta[$ $x \mapsto f(x)$ est alors bijective.
Son inverse $g :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est dérivable et pour tout $x \in]\alpha,\beta[$: $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

Exemple : Considérons la fonction polynomiale d'une variable réelle
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^2$
Sa dérivée est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto 2x$ qui est strictement positive sur $]0,\infty[$. Ainsi $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f(x) = x^2$ vérifie les hypothèses du théorème
Comme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, on obtient

Définition de $\sqrt{\ }$: Pour tout $y > 0$, il existe un unique $x > 0$ vérifiant $x^2 = y$. Ce réel est noté $\sqrt{y}$ et appelé la racine carrée de y

La fonction $]0,\infty[\xrightarrow{g}]0,\infty[$ $\quad x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et
$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Corollaire : Soit a réel, considérons l'équation $x^2 = a$ $(**)$
Si $a < 0$ $(**)$ pas de solutions
$a = 0$ $(**)$ a une unique solution
$a > 0$ $(**)$ a deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

Exercice : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto y = (x-1)^2 + 2$

1) Déterminer en fonctions du réel y, les antécédents de y par f
2) En déduire que $h :]1, \infty[\to]2, \infty[$ est bijective et déterminer son inverse

1) $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \quad ? \\ y = (x-1)^2 + 2 \end{cases}$ $\qquad y - 2 = (x-1)^2$

Si $y < 2$ pas de solutions

$y = 2$ $\quad x = 1$ unique solution

$y > 2$ $\quad (x-1)^2 = y - 2$

d'où $x - 1 = \pm\sqrt{y-2}$

et $x = 1 \pm \sqrt{y-2}$ deux solutions dont une seul est dans l'intervalle $]1, \infty[$

2) Ainsi h est bijective d'inverse

$h^{-1} :]2, \infty[\to]1, \infty[\qquad y \mapsto 1 + \sqrt{y-2}$

Vocabulaire (fonction) Une fonction $f : A \to B$ est un procédé qui associe à des éléments de A des éléments de B. Son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des points de A auxquels on associe un unique élément de B. On obtient alors l'application

$$\mathcal{D}_f \to B \qquad x \longmapsto f(x)$$

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$

$$\mathcal{D}_f =]1,2[\cup]2, \infty[$$

II $\mathbb{R}^n$ et sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$

Un n-uplet de réel est la donnée de n réels

$\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de réels

Un élément de $\mathbb{R}^n$ est la donnée de n reels $x_1, x_2, , x_n$.

Cet élément est noté $(x_1, x_2, .., x_n)$

Soit $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, .., y_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

<u>addition dans $\mathbb{R}^n$</u> $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

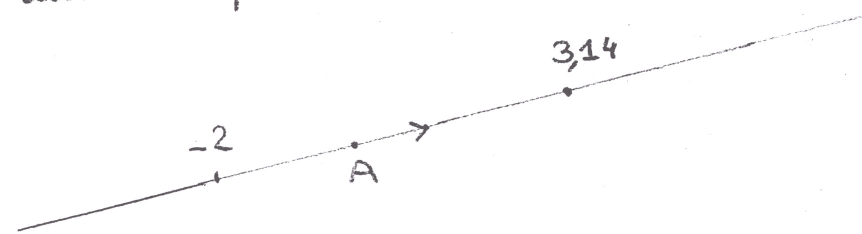
<u>multiplication par un réel dans $\mathbb{R}^n$</u> : $\lambda x = (\lambda x_1, .., \lambda x_n)$

Lettre grecque : λ Lambda

Représentation géométrique de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

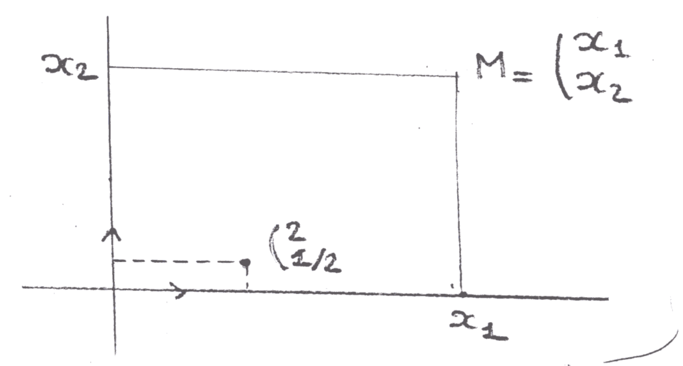
$n = 1$ $\qquad \mathbb{R}$ $\qquad \mathcal{D}$ droite muni d'un repère

$x \longrightarrow$ le point M de $\mathcal{D}$ de coordonnée x dans le repère de $\mathcal{D}$

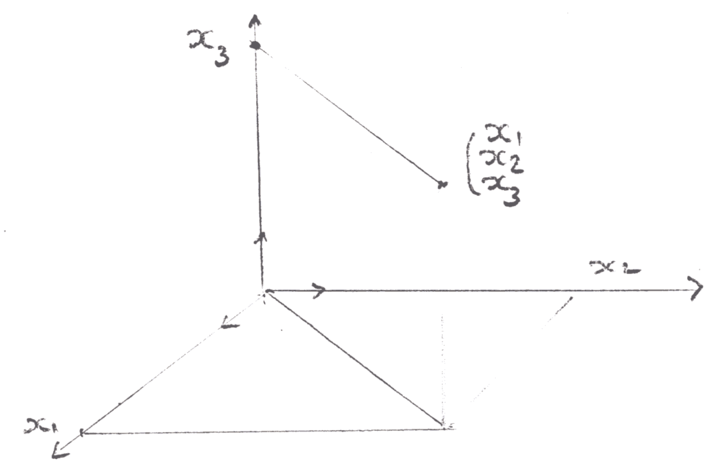


$n = 2$ $\qquad \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{P}$ plan avec un repère

$(x_1, x_2) \longmapsto$ le point M de coordonnée (x_1, x_2) dans le repère de $\mathcal{P}$



$\mathbb{R}^3$		$\mathcal{E}$ espace muni d'un repère
(x_1, x_2, x_3)	$\longmapsto$	le point M de coordonnée (x_1, x_2, x_3) dans le repère $\mathcal{E}$



1) Quelques exemples de sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$

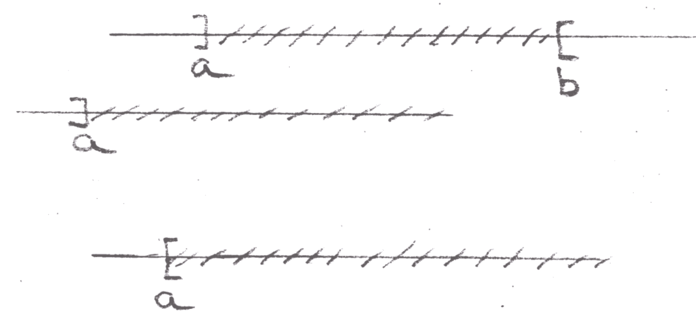
<u>$n = 1$:</u> Soit $a < b$ deux réels

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R}$ tel que $a < x < b\}$

$]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ — $a < x\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $a \leqslant x \leqslant b\}$

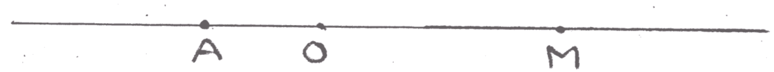
$[a,\infty[= \{x \in \mathbb{R}$ — $a \leqslant x\}$



<u>valeur absolue</u> $x \in \mathbb{R}$ $|x| \geqslant 0$ $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

$x \longrightarrow M$ le point d'abscisse x

$a \longrightarrow A$ — a



$|x|$ est la distance de M à l'origine

$|x-a|$ — de M à A

epsilon ε

Soit ε reel strictement positif

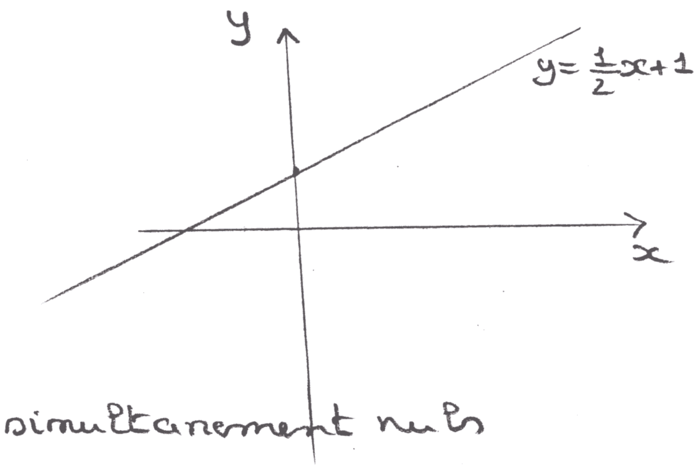
$\{ x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < \varepsilon \} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

$\{ x \in \mathbb{R}$ — $|x - a| \leqslant \varepsilon \} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$

"droite" de $\mathbb{R}^2$

Exemple sous forme usuelle :

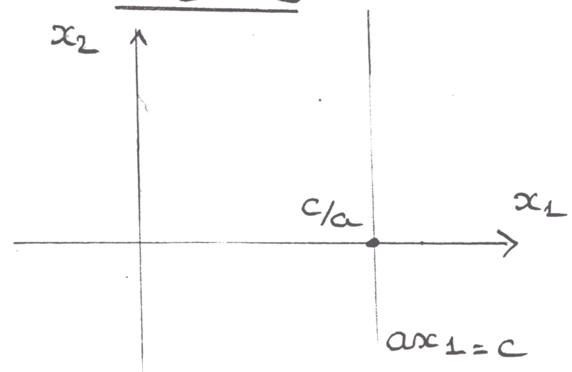
$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ y = \frac{1}{2}x + 1 \}$



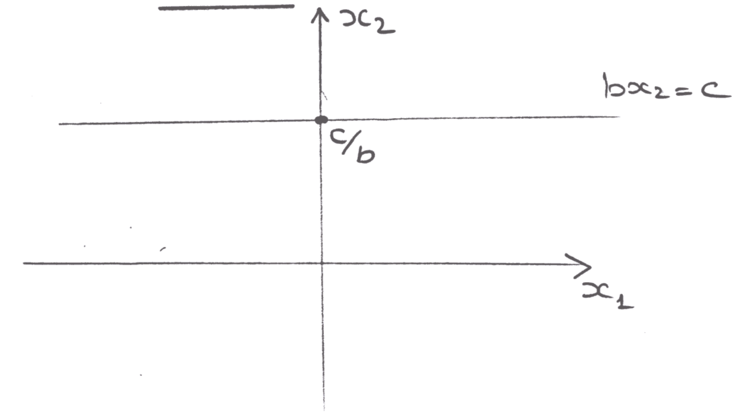
Fixons a, b, c trois reels , a et b non simultanement nuls

Point clef : La représentation dans le plan du sous ensemble $\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a x_1 + b x_2 = c \} \subset \mathbb{R}^2$ est une droite dite la droite d'équation $a x_1 + b x_2 = c$

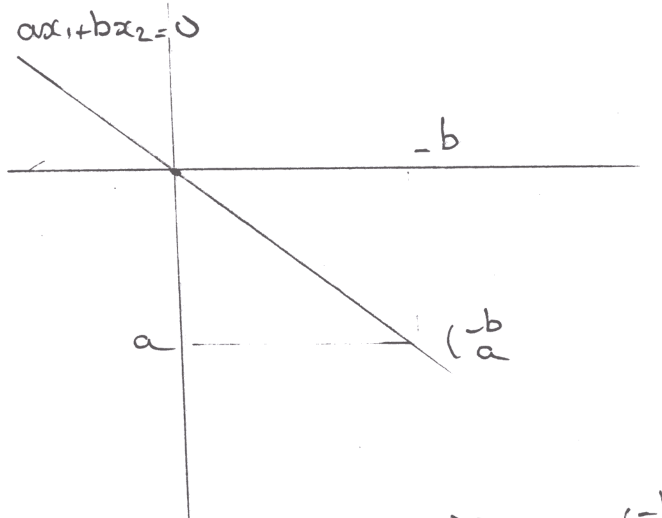
<u>$b = 0$ droite d'équation $ax_1 = c$</u>



<u>$a = 0$ droite d'équation $bx_2 = c$</u>

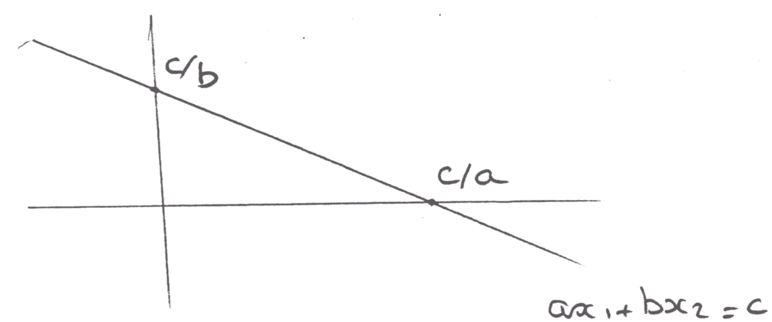


<u>$c = 0$ droite d'équation $ax_1 + bx_2 = 0$</u>



<u>preuve</u> : passe par $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

<u>cas a, b, c non nuls</u>



<u>preuve</u> : passe par $\begin{pmatrix} c/a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix}$

Exemples : tracer les droites respectivement d'equation

a) $2x_1 = 3$ b) $\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0$ c) $\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1$

Remarque 1 : Quand c varie les droites d'equations $ax_1 + bx_2 = c$ sont parallèles

Remarque 2 : Les droites d'equations $ax_1 + bx_2 = c$ et $a'x_1 + b'x_2 = c$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$

Exemple de variation des coefficients Fixons $b > 0$, $c > 0$

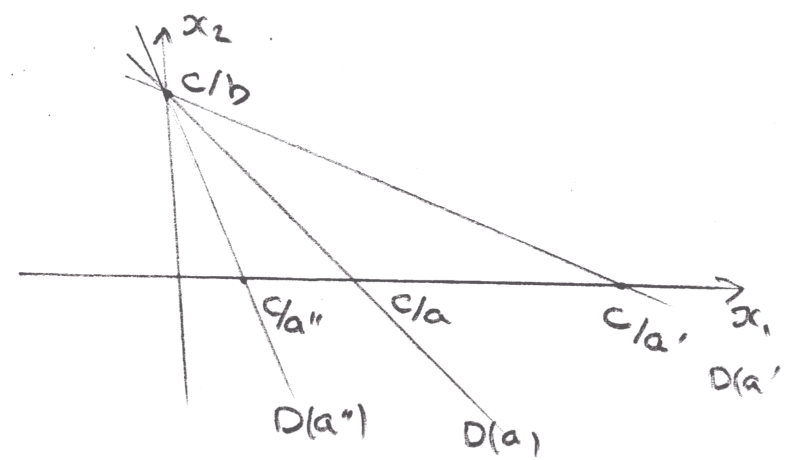
Considerons la famille de droites $D(a) : ax_1 + bx_2 = c$

Ces droites passent toutes par le point $\binom{0}{c/b}$

$D(a)$ passe par $\binom{c/a}{0}$.

Ainsi si $0 < a' < a < a''$

$0 < \frac{c}{a''} < \frac{c}{a} < \frac{c}{a'}$



"<u>demi-plan" de $\mathbb{R}^2$</u> Dans un plan une droite délimite deux demi-plans

E un demi plan délimité par D

Fixons a, b deux reels non simultanément nuls, c reel

<u>point clef</u> : La representation géométriques des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$:

$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } ax_1 + bx_2 > c \} \subset \mathbb{R}^2$$
$$\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ — } ax_1 + bx_2 < c \} \subset \mathbb{R}^2$$

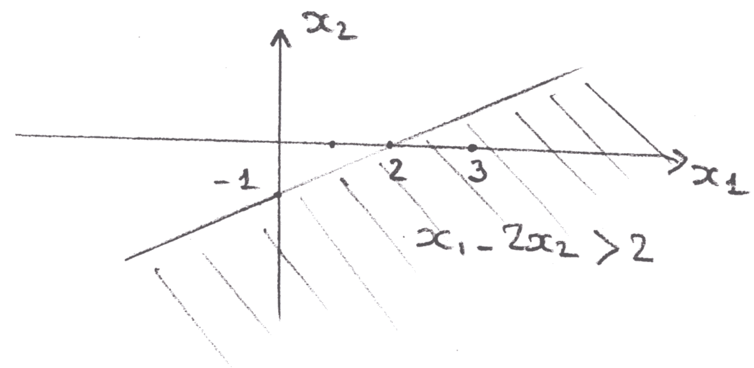
sont les deux demi plans délimités par la droite d'equation $ax_1 + bx_2 = c$. On les appelle demi plan resp. d'equation $ax_1 + bx_2 > c$ et $ax_1 + bx_2 < c$

<u>Exemple</u> : Représenter le demi-plan d'équation $x_1 - 2x_2 > 2$

Il s'agit d'un demi plan delimité par la droite D d'équation $x_1 - 2x_2 = 2$.

D est la droite passant par les points $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Le point $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient au demi plan $x_1 - 2x_2 > 2$.



<u>Exercice</u> : représenter le demi-plan d'equation $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} < 1$

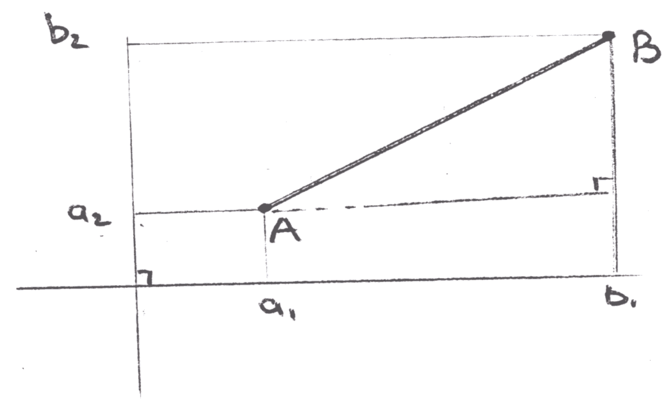
Cercle de $\mathbb{R}^2$: $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$

$d(a,b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ est appelé distance de a à b.

interprétation géométrique : A pt de coord $\binom{a_1}{a_2}$ B pt de coord $\binom{b_1}{b_2}$

$d(a,b) = AB$ longueur du segment AB

$= $ distance de A à B



Point clef $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ $R > 0$

La représentation geométrique du sous ensemble

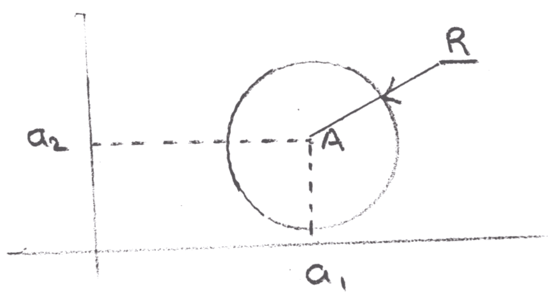
$C(a,R) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tq $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = R \}$

est un cercle de centre A et de rayon R où A est le point de coordonnée $\binom{a_1}{a_2}$

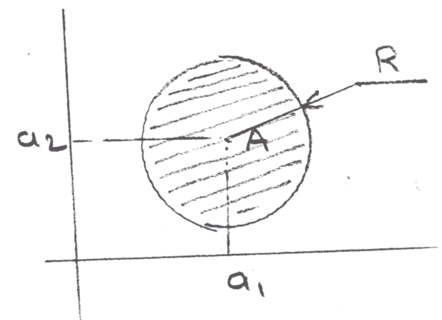
La représentation géométrique du sous-ensemble

$B(a,R) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < R \}$

est le disque de centre A et de rayon R c'est à dire l'ensemble des points du plan à une distance $< R$ de A



cercle de centre A
de rayon R



boule de centre A
de rayon R

Exercice : Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

a) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{(x_1-1)^2+(x_2-2)^2} = \frac{1}{4}\} = C$

b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ — $< \frac{1}{4}\} = B$

c) $\{$ $> \frac{1}{4}\} = E$

2) Notions d'ouverts, de fermés, de bornés dans $\mathbb{R}^n$

Definition : $x = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad y = (y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

$d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$ est appelé la distance de x à y

Definition : $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad R > 0$

$B(a;R) = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(a,x) < R\} \subset \mathbb{R}^n$

$= \{$ — tel que $\sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2} < R\}$

est appelé la boule de centre a et de rayon R

Exemple : $a = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$ $\quad b = (2,3,4,5) \in \mathbb{R}^4$

calculer $d(a,b)$

2) Notions d'ouverts, de fermés et de bornés dans $\mathbb{R}^n$

<u>Rappels :</u> $x, y \in \mathbb{R}^n$ $d(x,y)$ distance de x à y

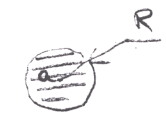
$n=2$ $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ $d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$

$n=3$ $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^2$ $d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}$

$x=(x_1,x_2,..,x_n)$ $y=(y_1,...y_n) \in \mathbb{R}^n$ $d(x,y) = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\dots+(y_n-x_n)^2}$

$a=(a_1,..,a_n) \in \mathbb{R}^n$, R réel >0 $B(a;R)$ boule de centre a et de rayon R

$B(a;R) = \{x=(x_1,..,x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $d(a;x) < R\}$



$n=2$ disque de centre a et de rayon R

$n=3$ boule de centre a et de rayon R

<u>Définition</u> : Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $x=(x_1,..,x_n) \in U$, les n-uplets $y=(y_1,..,y_n)$ assez proche de x restent dans U

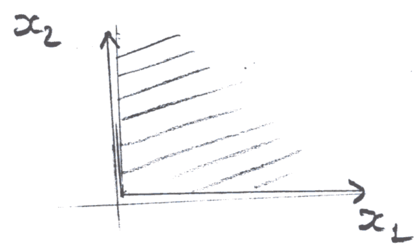
y assez proche de x signifie $d(x,y)$ petit

ε lettre epsilon

<u>Exemple :</u> (x_1, x_2) les prix de 2 produits d'un commerce, on suppose ces prix non nuls et donc variant dans

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$$

U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$



q_1 quantité de marchandise 1 qui coûte 1 €
q_2 2 3 €

(q_1, q_2) les couples de quantités 1 et 2 d'un coût de 17 €

Ces couples (q_1, q_2) varient dans F

$$F = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \quad q_1 \geqslant 0,\ q_2 \geqslant 0 \qquad q_1 + 3q_2 = 17\}$$

Soit $(q_1, q_2) \in F$ pour n grand par exempl $(q_1 + \frac{1}{n}, q_2 + \frac{1}{n})$

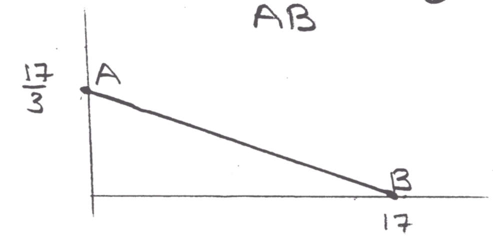
est proche de (q_1, q_2)

$(q_1 + \frac{1}{n}) + 3(q_2 + \frac{1}{n}) = q_1 + 3q_2 + \frac{4}{n} = 17 + \frac{4}{n} \neq 17$

donc $(q_1 + \frac{1}{n}, q_2 + \frac{1}{n})$ n'appartient pas à F d

F n'est pas un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$

V est le segment AB



Définition : $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit un ouvert de $\mathbb{R}^n$

si pour tout $x = (x_1, .., x_n) \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ reel

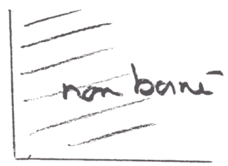
tel que $B(x ; \varepsilon) \subset U$

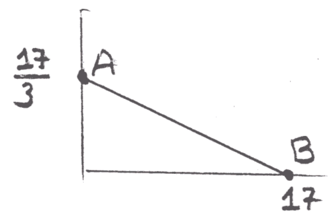
Un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémentaire

est ouvert

<u>definition</u> $H \subset \mathbb{R}^n$ est dit borné si H est contenu dans une boule de $\mathbb{R}^n$

<u>exemple :</u>



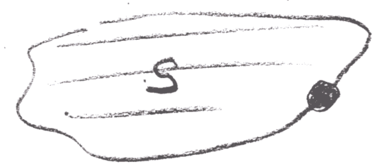


le segment AB est borné

Exemples où la représentation géométrique de $\mathbb{R}^2$ permet de conclure

zone hachurée sans le bord

ouvert



zone hachurée avec le bord

non ouvert

$\mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$, fermé dans $\mathbb{R}^n$ et non borné

<u>Proposition :</u> Soit U et V deux ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}^n$

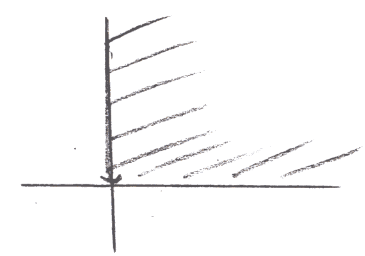
Alors $U \cap V$ et $U \cup V$ sont des ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}^n$

II.3 Fonctions numériques, exemples

On entendra par fonction numérique, une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$

$U \subset \mathbb{R}^n \qquad f : U \to \mathbb{R} \qquad (x_1, .., x_n) \longmapsto f(x_1, .., x_n)$

<u>Exemple :</u> $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}$



quel est le domaine de dfn de g

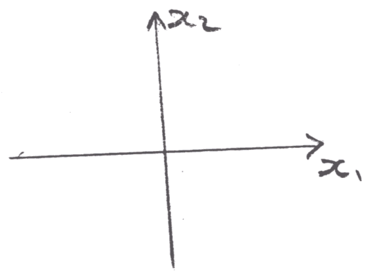
representer ce domaine

$\mathcal{D}g = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0 \}$

<u>Exemple :</u> $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}$

m̂ questions

$\mathcal{D}_h = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 x_2$ différent de zéro $\}$



$\mathcal{D}_h$ complémentaire des axes de coordonnées

<u>autres exemples :</u>

$F = \{ (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $q_1 + 3q_2 = 17$, $q_1 \geq 0$ et $q_2 \geq 0 \} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(q_1, q_2) \longmapsto \sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}$

Cette fonction est définie sur F

opérations sur les fonctions numériques

$f : U \to \mathbb{R}$ $\qquad g : U \to \mathbb{R}$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad U \subset \mathbb{R}^n$

somme : $f+g : U \to \mathbb{R}$ $\qquad x = (x_1, .., x_n) \longmapsto (f+g)(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_n) + g(x_1, .., x_n)$

produit par λ : $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ $\qquad x = (x_1, .., x_n) \longmapsto (\lambda f)(x_1, .., x_n) = \lambda . f(x_1, .., x_n)$

produit : $fg : U \to \mathbb{R}$ $\qquad x = (x_1, .., x_n) \longmapsto (fg)(x_1, .., x_n) = f(x_1, .., x_n)\, g(x_1, .., x_n)$

quotient : $\frac{f}{g} : U \to \mathbb{R}$ $\qquad x = (x_1, .., x_n) \longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x_1, .., x_n) = \dfrac{f(x_1, .., x_n)}{g(x_1, .., x_n)}$

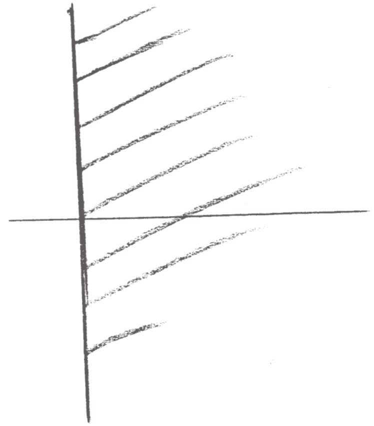
$\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ $\qquad \mathcal{D}_{f/g} = \{x \in U \, ; \, x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) \neq 0\}$

Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$

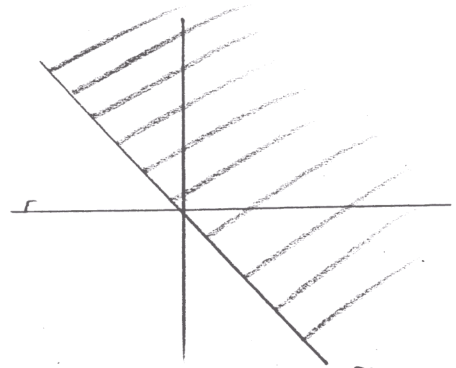
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$

Déterminer les domaines de définitions et les représenter

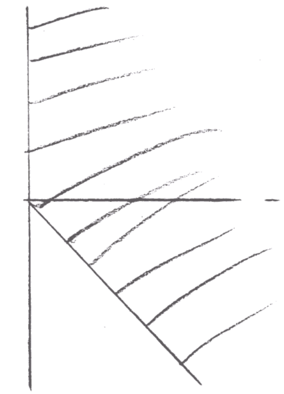
a) f $\qquad$ b) g $\qquad$ c) $f+g$ $\qquad$ d) $\frac{f}{g}$



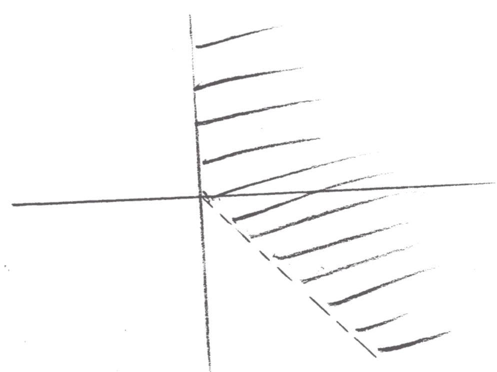
$\mathcal{D}_f$



$\mathcal{D}_g$



$\mathcal{D}_{f+g}$



$\mathcal{D}_{f/g}$

Exemples de fonctions polynomiales

une variable : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \frac{1}{17}x^5 - 3x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

deux variables : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{3}x_1^7 x_2^{11} - 17x_1^4 x_2 + 5x_1 - \frac{1}{2}$

trois variables : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto 7x_1^3 x_2 x_3^4 + \frac{1}{2}x_1^2 x_2 - 8x_1x_2x_3$

$(i_1, .., i_n) \in \mathbb{N}^n$ $\quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto a\, x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$

$a \in \mathbb{R}$ $\quad$ est appelée fonction monomiale

Une fonction polynomiale s'obtient comme somme finie de fonctions monomiales

Les fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbb{R}^n$. Elles sont stables par +, produits

Exemple : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_3x_2 + 1$

est une fonction polynomiale

Exemples de fonctions polynomiales

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad (u,v,w,t) \mapsto \frac{1}{5} u^4 w^3 t - \frac{7}{2} u^5 + 9uw + 17$

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \qquad (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto \frac{1}{17} x_1^2 x_2^3 x_4 - 9x_1x_2 + x_4$

Les fonctions polynomiales sont stables par somme et produit

Exemple : Developper la fonction

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_1^2 x_2^2 + x_3 x_2 + 1$

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 - x_1^2x_2^2 + x_3x_2 + 1$$
$$= x_1^4 + x_2^4 + x_1^2x_2^2 + x_3x_2 + 1$$

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad (x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1^4 + x_2^4 + x_1^2x_2^2 + x_3x_2 + 1$

__Définition :__ On appelle fonction rationnelles le quotient de deux fonctions polynomiales

__Exemple__ $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad (x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{x_1^2 x_2 + x_1^4 + 2}{x_1^3 x_2 + x_1 x_2}$

$\mathcal{D}_R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1^3 x_2 + x_1 x_2 \neq 0\}$

III Derivées partielles, premières applications

1) Rappel de la notion de derivé

$\alpha < \beta \in \mathbb{R}$

$f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x)$

On dit que la limite de $f(x)$ quand x tend vers a est ℓ, on ecrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Si $f(x)$ est proche de ℓ quand x est proche de a

On dit que f est dérivable en a de dérivé $f'(a)$ si la fonction

$x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite quand x est proche de a, cette

limite est alors noté $f'(a)$

Autrement dit f est dérivable en a de derivé $f'(a)$ si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Dfn : La dérivée de f est la fonction $f' :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto f'(x)$

(elle est définie sur les réels où f est dérivable)

Rappels :

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$(fg)' = f'g + fg'$

$(1/g)' = - g'/g^2$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$

$(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$ $\qquad (g \circ f)'(x) = f'(x) \; g'(f(x))$

$(x^n)' = n x^{n-1}$ $\qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(e^x)' = e^x$

$\ln x = 1/x$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + x + 4$

$g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto g(x) = \frac{2x-4}{x-1}$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto h(x) = e^{(1/4\, x^2 - 2x + 4)}$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto u(x) = \ln(x^2+1)$

2) Derivée partielle :

Définition : Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$

$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

On dit que f admet en $a = (a_1, \dots, a_n)$ une dérivée partielle par rapport à x_i si la fonction d'une variable

$$x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

est dérivable en a_i. Dans le cas la dérivée de cette fonction en a_i est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, \dots, a_n)$

Si en tout point de Ω, f admet une dérivée / x_i,
on obtient une fonction

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

appelée dérivée partielle de f en x_i

<u>Règle :</u> Pour déterminer $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$, on regarde f comme fonction de la seule variable x_i, puis on dérive cette fonction de la variable x_i. Ou encore on considère $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ comme des constantes et on dérive par rapport à la variable x_i

<u>Exemple :</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, x_2) \longmapsto \frac{1}{6} x_2 x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2 + 4x_2$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ puis $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$

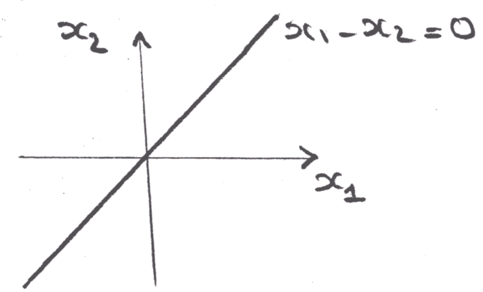
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{3}{6} x_2 x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2 = \frac{1}{2} x_2 x_1^2 - 4x_1 x_2 + x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{6} x_1^3 - 2x_1^2 + x_1 + 4$$

<u>Exemple 2</u> $\quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \longmapsto \dfrac{2x_1x_2 - 4x_2}{x_1 - x_2}$

Trouver le domaine de définition de g
Représenter $\mathcal{D}_g$ et montrer que $\mathcal{D}_g$ est ouvert
Calculer les dérivées partielles de g en tout point de $\mathcal{D}_g$

$\mathcal{D}_g = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 - x_2 \neq 0 \}$



$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(2x_2) - (2x_1x_2 - 4x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{4x_2 - 2x_2^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(2x_1 - 4) - (2x_1x_2 - 4x_2)(-1)}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{2x_1^2 - 4x_1}{(x_1 - x_2)^2}$$

<u>Exemple</u> : $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, u) \mapsto f(x_1, x_2, u) = x_1^2 x_2 + u(x_1 + x_2) + 2u$

Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x_1, x_2 et u. Calculer ces 3 trois dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, u) = 2x_1 x_2 + u \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, u) = x_1^2 + u \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(x_1, x_2, u) = x_1 + x_2 + u$$

<u>Exemple</u> : $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}$

Déterminer et représenter $\mathcal{D}_g$.

$\Omega = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \ x_1^2 + x_2^2 - 1 > 0 \}$

Représenter Ω, montrer que Ω est ouvert

Pour $(x_1, x_2) \in \Omega$, calculer $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}}$$

<u>Dérivée d'ordre supérieure</u> : Lorsque ces dérivées ont un sens, on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$ est aussi notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$

On appelle ces dérivées partielles, les dérivées partielles d'ordre 2

On peut continuer $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)(x)$

<u>Exemple</u> : Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x_1, x_2) \longmapsto \frac{1}{2} x_2 x_1^3 - 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2 + 4x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{3}{2} x_2 x_1^2 - 4 x_1 x_2 + x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^3 - 2 x_1^2 + x_1 + 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = 3 x_2 x_1 - 4 x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{3}{2} x_1^2 - 4 x_1 + 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{3}{2} x_1^2 - 4 x_1 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0$$

Proposition : Une fonction polynomiale admet des dérivées partielles de tout ordre. Ces dérivées partielles sont encore des fonctions polynomiales

Une fonction rationnelle admet des dérivées partielles de tout ordre sur son ouvert de définition. Ces dérivées partielles sont encore des dérivées partielles définies sur le même ouvert.

<u>Exemple</u> : $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\qquad (x_1, x_2) \longmapsto g(x_1, x_2) = \dfrac{2x_1x_2 - 4x_2}{x_1 - x_2}$

3) Extremum local et point critique :

$A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad f : A \to \mathbb{R}$ $\quad (x_1, .., x_n) \mapsto f(x_1, .., x_n)$

<u>Définition :</u> On dit que f admet un maximum en $a = (a_1, .., a_n) \in A$ si pour tout $(x_1, .., x_n) \in A$: $f(x_1, .., x_n) \leq f(a_1, .., a_n)$

On dit que f admet un minimum en $a = (a_1, -, a_n) \in A$ si pour tout $(x_1, -, x_n) \in A$: $f(x_1, .., x_n) \geq f(a_1, .., a_n)$

On dit que f admet un maximum local en $a = (a_1, -, a_n) \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $(x_1, .., x_n) \in B(a, \varepsilon) \cap A$

$$f(x_1, .., x_n) \leq f(a_1, .. a_n)$$

On dit que f admet un minimum local en $a = (a_1, .., a_n) \in A$ s'il existe $\varepsilon > 0$ ——

$$f(x_1, .., x_n) \geq f(a_1, .., a_n)$$

extremum = minimum ou maximum