Groupe de travail : Homologie des graphes d'après Kontsevich - Willwacher

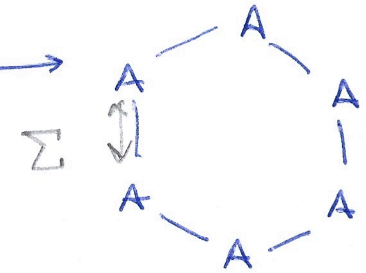
⓪ homologie (topo alg) ← graphe (Combinatoire) ← bon modèle (opéradique, Ho R/Q, ...)

①' $BA = $ A — A — A — A — A ; d = edge contraction → Koszul duality for operads

① Théorème de Loday-Quillen-Tsygan

$$C^\lambda_n(A) := (A^{\otimes n+1})_{\mathbb{Z}/n+1\mathbb{Z}} = A^{\otimes n+1} / \mathrm{Im}(id - \tau_{n+1}) \longleftrightarrow$$

planar structure



$b(a_0, a_1, \dots, a_n) := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^n (a_n a_0, a_1 \dots)$ (pas e augmentant)

Σ edge contraction

$$H_n(C^\lambda_n(A), b) \cong HC_n(A)$$

Thm [LQT '83]

k corps car 0

A alg asso unitaire

$$H^{CE}_\bullet(gl(A)) \cong \Lambda(HC_{\bullet-1}(A))$$

- $H^{CE}_\bullet$: homologie de Chevalley-Eilenberg
- $gl(A)$: alg de Lie des matrices de taille ∞ (dimension) nulles presque partout
- Λ : alg. extérieure
- HC : homologie cyclique
- $\cong$: iso canonique d'algèbres de Hopf graduées

Intérêt : ← dim ∞, dur à calculer ; thm de "stabilité" ; ? si on considère $gl_n(A)$: matrices de taille $n \times n$

Démonstration : ① $gl_n^{(k)} \hookrightarrow gl_n(A)$ réductive ($Z(g) = \mathrm{Rad}\, g$) $\Rightarrow \Lambda^\bullet gl(A) \overset{qi}{\simeq} (\Lambda^\bullet gl(A))_{gl} := \Lambda^\bullet gl(A) / gl \cdot \Lambda^\bullet gl$

② Théorie classique des invariants [Weyl] : $(gl^{\otimes n})_{gl} \cong k[S_n]$

③ Thm [Borel - Cartan Milnor Moore]

$\mathcal{H}$: alg de Hopf com, cocom, connexe graduée

$\Lambda \,\mathrm{Prim}\, \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$.

"Rappel" (un) complexe qui calcule l'homologie cyclique d'une algèbre associative unitaire (car k = 0)

$\forall n$ $A^{\otimes n+1}$: module "cyclique" sur $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ ← générateur τ_n (C_n)

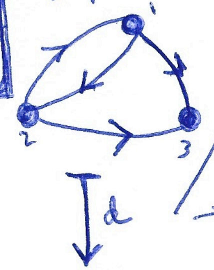
$$\tau_n(a_0, a_1, a_n) := (-1)^{n+1}(a_n, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

① **Thm** [Kontsevich '93] k corps car = 0

$$H^{CE}_\bullet(\mathbb{R}[p_1, \dots, q_1, \dots]_{(\geq 1)}, \{\,\}) \cong \Lambda H_\bullet(\mathcal{G})$$

- Champs de vecteurs polynomiaux symplectiques qui s'annulent en 0
- $\cong$: iso alg de Hopf gr
- $\mathcal{G}$: complexe de graphes connexes

Crochet de Lie (Poisson) $\{P, Q\} = \sum_i \frac{\partial P}{\partial p_i}\frac{\partial Q}{\partial q_i} - \frac{\partial P}{\partial q_i}\frac{\partial Q}{\partial p_i}$

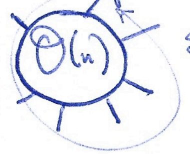


/ sgn S_n

d = edge contraction

③ Cas général opéradique [Conant - Vogtmann 03]

Soit $(\mathcal{O}, \circ_i, \ )$ une opérade cyclique (graduée)



Ex: Ass, Com, Lie

2 ≠ opérades classiques : tout le monde est entrée-sortie, pas de sortie privilégiée

Foncteur de totalisation

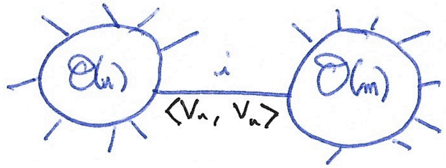
$$\mathcal{O} \overset{(V_n)}{\longmapsto} \bigoplus_{k\geq 2} \left(\mathcal{O}(k) \otimes V_n^{\otimes k}\right)_{\mathfrak{S}_k} =: \hat{\mathcal{O}}$$

Ex: Com — indistinguables

Ass — planaire

Lie — bracket... IHX

Composition (tq)



$\in \mathcal{O}(n+m-2)$

Lemme

$(\hat{\mathcal{O}}, \star := \sum_i)$ algèbre Lie admissible

$\Updownarrow$

$(\hat{\mathcal{O}}, [\,,\,] := \star - \star^{(12)})$ algèbre de Lie

Thm Darboux → "variété symplectique canonique "locale""

$V_n := (k\{p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n\}, \langle\,,\,\rangle)$ — non dég antisym

$\langle q_i, p_j \rangle = \delta_{ij} = -\langle p_j, q_i \rangle$

$\langle q_i, q_j \rangle = 0$

$\langle p_i, p_j \rangle = 0$

Def: $\hat{\mathcal{O}}^{\infty} := \operatorname{colim}_n \mathcal{O}(V_n)$ Ex: $\widehat{\mathrm{Com}}^{\infty} \cong (k[p_1,\dots,q_1,\dots]^{\geq 2}, \{\,,\,\})$

Rq: $sp(2n) :=$ sous-alg $(k\,\mathrm{id} \otimes V_n^{\otimes 2})_{\mathfrak{S}_2} \hookrightarrow \mathcal{O}(V_n)$ $\quad \mathrm{id} \in \mathcal{O}(2) \neq \mathrm{id}$

même méthode ① $sp_{2n} \hookrightarrow \mathcal{O}(V_n)$

② Théorie des invariants de $sp(2n)$

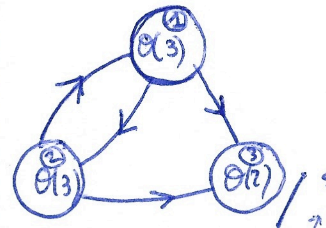
③ CMM - Borel

$\boxed{\text{Thm}}$ [Kontsevich, Conant-Vogtmann]

$$H^{CE}_{\bullet}(\hat{\mathcal{O}}^{\infty}) \cong \Lambda H_{\bullet}(\mathcal{G}_c\mathcal{O})$$

algèbre Hopf

Complexe de graphes connexes orientés avec sommets indicés par $\mathcal{O}$



$d =$ contraction des arêtes $+ \circ_i$

Ex: [graphe] $= -$ [graphe] $= 0$: pas de boucle

donc ici $d(\dots) = 0$

Rq: $H_\bullet(\mathcal{G}_{Lie}) = \bigoplus H^\bullet(\mathrm{Out}(F_r))$ outer automorphisms of free group

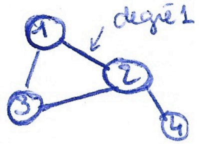
$H_\bullet(\mathcal{G}_{Ass}) = \bigoplus H^\bullet$(moduli spaces of punctured surfaces) (mapping class grp)

④ L'opérade des graphes de Kontsevich

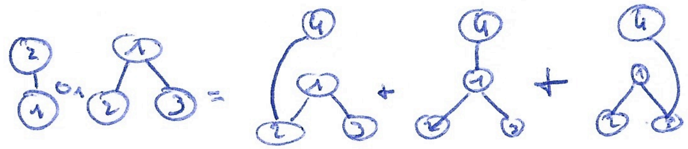
$|p_i| = 0, |q_i| = -1$

$A_n := (k[p_1,\dots,p_n,q_1,\dots,q_n], \cdot, \{\})$ algèbre de Gerstenhaber (e_2-alg $= H_\bullet(\mathcal{D}_2)$)

→ opérade de toutes les opérations naturelles agissant sur A_n (toutes totalisation op cyclique)

Def: $\mathrm{Gra}(n) = k\{$graphes  $\}$ & composition opéradique = insertion puis recollage

Ex:



$\mathrm{Gra}(P_1, \dots, P_n) := \text{produit}\left(\prod_{\substack{(i,j) \text{ arêtes} \\ \text{de } \gamma}} \{P_i, P_j\}\right)$

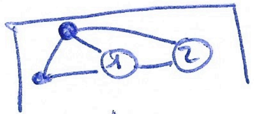
γ

Gam ① ②

$\mathrm{Gam} \to \mathrm{Gerst} \longrightarrow \mathrm{Gra}$ twisting $\Longrightarrow$ procedure for op [Willwacher]

$s\mathrm{Lie} \to \mathrm{Gerst}$, $s\mathrm{Lie} \to \mathrm{Gra}$

①—②



$\downarrow$

$\mathrm{MC\,Gra} := \{\mathrm{Gra} \vee \{\circ\}, d\}$

$d(\circ) = - \bullet\!\!-\!\!\bullet$

$\longleftrightarrow$ MC Gra-alg = Gra-alg + MC element

dg operad

$\overbrace{\mathrm{Tw\,Gra}}^{W}$ (aka $\overset{\downarrow}{\simeq}$ Graph$)$, $\uparrow k$

$\shortparallel$

$(\mathrm{Gra} \vee \{\circ\}, d^{\circ-①})$ arity 0, degree 0

$d_1^{d} = \bullet\!-\!①$ arité

vérifie l'eq de MC dans

MC Gra(1) :

$d(\circ\!-\!①) + \bullet\!-\!① \circ_1 \bullet\!-\!① =$

$- \bullet\!-\!\bullet\!-\!① + \dots$ $\sum = 1$, $= 0$

et $d^{\circ-①}(\dots) = d + [\,,\circ\!-\!①]$

Tw Gra-alg =

↳ non trivial dg operad mais

Thm [L, V, K, W]

$\mathrm{Ger} \to \mathrm{Gra} \xrightarrow[q.i]{\sim} \mathrm{Tw\,Gra}$ ← arité 0

ie $H_0(\mathrm{Tw\,Gra}) = H_0(\mathcal{D}_2)$

plus fort $\longrightarrow$ $\underbrace{\mathrm{Tw\,Gra}^\vee}_{\text{Hopf coop}} \xrightarrow{\sim} \Omega^*_{PA}(\text{FultonMacPherson}_2)$

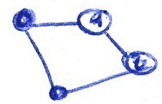
ie formalité des petits disques.

Willwacher : Théorie de torsion :

$\mathrm{Def}(s\mathrm{Lie} \xrightarrow{①②} \mathrm{Gra}) = (\mathrm{Hom}_S(\mathrm{Lie}^\vee, \mathrm{Gra}), \partial^{(①②)})$

$\Omega\mathrm{Lie}^\vee \xrightarrow{\sim} s\mathrm{Lie}$

$\simeq$



$d :$ ○—○ $+$ …

action de $\underset{\shortparallel\!s}{\mathrm{Def}}(s\mathrm{Lie} \to \mathrm{Gra}) \curvearrowright \mathrm{Tw\,Gra}$ dérivation

$\mathrm{Tw\,Gra}(0)$

Def [Kont graphes]

$GC :=$ ↳ sub Lie alg connected, $\geq$ trivalent

$\boxed{\text{Thm}}$ [Willwacher] $H^0(GC) \underset{\uparrow \text{Lie alg}}{\simeq} \mathfrak{grt}^1$

$\mathfrak{grt}_1 \longrightarrow H_0(\mathrm{Der}(\mathrm{Gerst}_\infty))$

$\boxed{\text{Thm}}$ $\mathfrak{grt} := \mathfrak{grt}_1 \rtimes k \simeq H_0(\mathrm{Der}(\mathrm{Gerst}_\infty))$

$\Longrightarrow$ Group of homotopy auto of $\mathbb{Q}$ completion of D_2 $\underset{GT}{\shortparallel\!s}$