FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

EXPONENTIELLE ET ALGÈBRE DE LIE

Exercice 1 ("Noyau" de l'exponentielle complexe)**.**
Montrer que l'ensemble des matrices
$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \exp(M) = I\}$$
est égal à l'ensemble des matrices diagonalisables dont les valeurs propres sont de la forme $2i\pi\mathbb{Z}$.

———— ✍ ————

Exercice 2 (Connexité)**.**
Donner une nouvelle démonstration de la connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

———— ✍ ————

Exercice 3 (Non-surjectivité de l'exponentielle réelle)**.**
Montrer que la matrice réelle
$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$
n'est pas dans l'image de l'exponentielle des matrices réelles.

———— ✍ ————

Exercice 4 (Formules)**.**
Montrer les formules suivantes

(1) $\exp(X) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(I + \frac{1}{k}X\right)^k$.

(2) $\exp(X+Y) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{k}X\right)\exp\left(\frac{1}{k}Y\right)\right)^k$.

(3) $\exp([X,Y]) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{1}{k}X\right)\exp\left(\frac{1}{k}Y\right)\exp\left(-\frac{1}{k}X\right)\exp\left(-\frac{1}{k}Y\right)\right)^{k^2}$.

———— ✍ ————

Exercice ☢ 5 (Formule de Baker–Campbell–Hausdorff)**.**
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une formule, valable pour tout $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, de la forme
$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\right) + \cdots\right) .$$

———— ✍ ————

Exercice 6 (L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$)**.**
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'espace tangent au neutre I du groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est
$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\} .$$

———— ✍ ————

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr`
☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/~vallette/`