FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 6

DÉCOMPOSITION POLAIRE ET GROUPES D'ISOMÉTRIES

Exercice 1 (Exponentielle)**.**

(1) Montrer que l'exponentielle de matrices décrit un homéomorphisme suivant
$$\exp \ : \ \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \ .$$
Indication. Pour démontrer l'injectivité, on pourra montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme un polynôme en $\exp(S)$. Pour démontrer la continuité de la réciproque, on pourra considérer la norme $|||\cdot|||_2$.

(2) En conclure l'existence d'un homéomorphisme de la forme
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \ .$$

Exercice 2 (Groupes de Lorentz)**.**
Soit s, t deux entiers naturels. On pose $n := s+t$. On considère la forme quadratique standard de $\mathbb{R}^n$:
$$q(x_1, \ldots, x_n) := x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_{s+t}^2 \ ,$$
dont la matrice dans la base canonique est
$$I_{s,t} := \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(q) = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{t}) \ .$$
Le *groupe de Lorentz* est le groupe des isométries de q :
$$\mathrm{O}(s,t) := \mathrm{O}(q) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM\, I_{s,t}\, M = I_{s,t}\} \ .$$
On se propose de montrer qu'il existe un homéomorphisme de la forme
$$\mathrm{O}(s,t) \cong \mathrm{O}_s(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_t(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{st} \ .$$

(1) Montrer que le groupe de Lorentz $\mathrm{O}(s,t)$ est stable par transposition.

(2) Soit $M \in \mathrm{O}(s,t)$. Montrer que sa décomposition polaire $M = OS$ vérifie
$$O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(s,t) \quad \text{et} \quad S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(s,t) \ .$$

(3) Montrer que
$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(s,t) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A \in \mathrm{O}_s(\mathbb{R}),\ D \in \mathrm{O}_t(\mathbb{R}) \right\} \ .$$

(4) Montrer que l'espace tangent à $\mathrm{O}(s,t)$ en l'identité est égal à
$$\mathrm{T}_{I_n}\mathrm{O}(s,t) = \left\{ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tX I_{s,t} + I_{s,t} X = 0 \right\} \ .$$

(5) Montrer que l'exponentielle de matrices réalise un homéomorphisme
$$\exp \ : \ \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{T}_{I_n}\mathrm{O}(s,t) \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(s,t) \ .$$

(6) Conclure.

(7) En déduire que les valeurs de s et de t pour lesquelles le groupe $\mathrm{O}(s,t)$ est compact.

(8) Montrer que le groupe topologique $\mathrm{O}(s,t)$ admet quatre composantes connexes.

(9) Montrer que la composante connexe de l'identité est égale à
$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(s,t) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(s,t),\ A \in \mathrm{GL}_s^{+}(\mathbb{R}) \right\} \ .$$

✉ Bruno Vallette : `vallette@math.univ-paris13.fr`
☞ Page internet du cours : `www.math.univ-paris13.fr/~vallette/`