UNE INTRODUCTION AUX ∞-CATÉGORIES SYMÉTRIQUES MONOÏDALES

DENIS NARDIN

1. Rappels sur les ∞-catégories

Si $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$ sont de nombres naturelles, le **corne** est le sous-ensemble simplicial $\Lambda_i^n \subseteq \Delta^n$ donné par l'union de faces opposées au sommets $0, \dots, i-1, i+1, \dots, n$.

Définition 1. *Une ∞-**catégorie** est un ensemble simplicial C tel que pour tous n, $0 < i < n$ les mappes $f : \Lambda_i^n \to C$ il y a une extension $\bar{f} : \Delta^n \to C$.*

Atténtion 2. *L'extension à Δ^n n'est pas unique en général.*

Example 3. *Si C est une catégorie, le **nerve** de C défini par*

$$N(C)_n = \{F : [n] \to C\}$$

où $[n]$ est le poset $\{0 < \cdots < n\}$, est une ∞-catégorie. En fait, $N(-)$ est un foncteur pleinement fidèle qui identifie les catégories avec les ∞-catégories pour qui les extensions de Λ_i^n à Δ^n sont unique. Dans la suite de ce note on ne distinguera pas entre une catégorie et son nerve et on écrira C pour tous les deux.

Example 4. *Si X est un espace topologique, le complexe singulier $\operatorname{Sing} X$ donné par*

$$(\operatorname{Sing} X)_n = \{f : \Delta^n \to X \mid f \text{ continue}\}$$

est un complexe de Kan, ainsi en particulier une ∞-catégorie. On peut identifier $\operatorname{Sing} X$ avec l'∞-groupoïde où les objets sont le points de X et les morphismes de x à y sont les chemins entre x et y.

Plus généralement, si $\mathbf{C}$ est une catégorie simpliciale on peut définir son **nerve simplicial** $N^{\Delta}(\mathbf{C})$ comme l'ensemble simplicial où les n-simplexes sont les foncteurs de $\mathfrak{C}[\Delta^n] \to \mathbf{C}$. Ici, $\mathfrak{C}[\Delta^n]$ est la catégorie simplicial où les objets sont le numéros $0, \dots, n$ et

$$\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i,j) = \begin{cases} \{A \subseteq \{i, \dots, j\} \mid i, j \in A\} & \text{si } i \leq j \\ \varnothing & \text{si } i > j \end{cases}$$

et la composition est donné par l'union. On doit penser à $\operatorname{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i,j)$ comme le poset contractile de toutes les façons d'aller de i à j in $[n]$.

Proposition 5. *Si $\mathbf{C}$ est une catégorie simpliciale fibrante (c'est à dire, tous les espaces de mappes sont complexes de Kan), le nerve simplicial $N^{\Delta}(\mathbf{C})$ est une ∞-catégorie.*

Date : 7 décembre 2017.

Example 6. *Soit* $\mathbf{M}$ *une catégorie modèle simpliciale. Alors la sous-catégorie des objets bifibrantes est une catégorie simpliciale fibrante et on peut appeler son nerve simplicial l'*∞***-catégorie associée*** *à* $\mathbf{M}$.

Example 7. *Malheureusement on aura besoin d'une généralisation du cas précédent au catégorie modèle non simpliciales. Soit* R *un anneau commutatif et soit* $\mathbf{Ch}(R)$ *la catégorie simpliciale de complexes de chaînes dg-projectifs où les espaces de mappes sont obtenus par la correspondance de Dold-Kan. Alors on peut définir* $\mathcal{D}(R) = N^{\Delta}(\mathbf{Ch}(R))$ *et l'appeler l'*∞***-catégorie dérivée de*** R.

Example 8. *Si* M *et* N *sont deux* n*-variétés, on peut définir l'espace de plongements* $\mathrm{Emb}(M, N)$ *comme l'ensemble simplicial où les* m*-simplexes sont mappes continues*

$$f : M \times \Delta^m \to N$$

où pour chaque $x \in \Delta^m$ *la mappe* $f : M \times \{x\} \to N$ *est un plongement lisse. Il est facile à voire que* $\mathrm{Emb}(M, N)$ *est un complexe de Kan, ainsi on peut former une catégorie simpliciale fibrante. On appelle son nerve simplicial la* ∞***-categorie de*** n***-variétés*** *et l'on dénote par* Mfld_n.

Définition 9. *On dit que une une mappe d'ensembles simpliciaux* $p : E \to S$ *est une* ***fibration intérieure*** *si pour tous les* $n > 0$*, tous les* $0 < i < n$ *et tous les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

il y a un relèvement qui fait commuter le diagramme. En particulier, C *est une* ∞*-catégorie ssi* $C \to *$ *est une fibration intérieure et toutes les fibres d'une fibration intérieure sont* ∞*-catégories.*

Définition 10. *Soit* $p : E \to S$ *une fibration intérieure et soit* $e : \Delta^1 \to E$ *une flèche de* E*. On dit que* e *est* ***cocartésienne*** *si la fibration à gauche*

$$E_{e/} \to E_{e0/} \times_{S_{pe0/}} S_{pe/}$$

est une fibration triviale (en particulier e *est un objet initial de la catégorie de relèvements de* pe *en partent de* $e0$*). Si pour chaque* $f : \Delta^1 \to S$*, flèche de* S *et chaque* $e0 \in E$ *tel que* $pe0 = f0$ *il y a une flèche cocartésienne* e *tel que* $pe = f$*, on dit que* p *est une* ***fibration cocartésienne****.*

Si $p : E \to S$ est une fibration cocartésienne, et $f : x \to y$ est une flèche de S, un foncteur de pushforward est un diagramme

$$\begin{tikzcd} E_x \times \Delta^1 \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^1 \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

tel que $\bar{f}|_{E_x \times \{0\}} = id$ et pour chaque $t \in \Delta^n$, la flèche $\bar{\sigma}|_{\{t\}\times\Delta^1}$ est cocartesienne. L'espace de foncteurs pushforward est contractile. On denote $\bar{f}|_{E_x\times\{1\}}$ par $f_!$, et on va abuser la notation et dire que $f_!$ est le foncteur de pushforward.

Théoreme 11 (Straightening-Unstraightening)**.** *L'∞-catégorie de fibrations cocartésiennes est equivalent à l'∞-catégorie* $\mathrm{Fun}(S, \mathrm{Cat}_\infty)$ *d'une façon compatible au changement de base. En plus, l'equivalence est tel que pour chaque flèche $f : x \to y$ le foncteur $f_! : E_x \to E_y$ est un foncteur pushforward.*

Proposition 12 ([2] 2.4.1.10)**.** *3 Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur de catégories simpliciales tel que pour chaque $x, y \in \mathbf{C}$ la mappe*

$$F : \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x,y) \to \mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(Fx, Fy)$$

est une fibration de Kan. Alors $N^\Delta(F) : N^\Delta(\mathbf{C}) \to N^\Delta(\mathbf{D})$ est une fibration intérieure. En plus, une flèche $e \in \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x,y)$ est cocartésienne si et seulement si pour chaque $z \in \mathbf{C}$ le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(y,z) \arrow[r, "e^*"] \arrow[d, "F"] & \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x,z) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(Fy,Fz) \arrow[r, "(Fe)^*"] & \mathrm{Map}_{\mathbf{D}}(Fx,Fz)
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. On doit prouver que pour chaque diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^n_i \arrow[r] \arrow[d] & N^\Delta(\mathbf{C}) \arrow[d] \\
\Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & N^\Delta(\mathbf{D})
\end{tikzcd},$$

il y a un relèvement pointillé. En utilisant l'adjonction $\mathfrak{C}[-]|N^\Delta(-)$, c'est la même chose que trouver un relèvement pour le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}[\Lambda^n_i] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{C} \arrow[d] \\
\mathfrak{C}[\Delta^n] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathbf{D}
\end{tikzcd},$$

Mais $\mathfrak{C}[\Lambda^n_i] \to \mathfrak{C}[\Delta^n]$ est une bijection entre les objets et pour tous i, j la mappe

$$\mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Lambda^n_i]}(i,j) \to \mathrm{Map}_{\mathfrak{C}[\Delta^n]}(i,j)$$

est anodyne. On peut donc trouver le relèvement.

Soit $e \in \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}(x,y)$ une flèche de $\mathbf{C}$. Elle est cocartésienne ssi la mappe

$$N^\Delta(\mathbf{C})_{e/} \to N^\Delta(\mathbf{C})_{e0/} \times_{N^\Delta(\mathbf{D})_{pe0/}} N^\Delta(\mathbf{D})_{pe/}$$

est une fibration triviale. Puisque elle est une fibration à gauche entre fibrations à gauches sur $N^\Delta(\mathbf{C})$, on peut simplement contrôler que, pour chaque $z \in \mathbf{C}$ la mappe

$$\{z\} \times_{N^\Delta(\mathbf{C})} N^\Delta(\mathbf{C})_{e/} \to \{z\} \times_{N^\Delta(\mathbf{C})} N^\Delta(\mathbf{C})_{x/} \times_{N^\Delta(\mathbf{D})_{Fx/}} N^\Delta(\mathbf{D})_{Fe/}$$

est une équivalence de complexes de Kan. Mais le codomain est équivalent à

$$(\{z\} \times_{N^\Delta(\mathbf{C})} N^\Delta(\mathbf{C})_{x/}) \times_{(\{Fz\} \times_{N^\Delta(\mathbf{D})} N^\Delta(\mathbf{D})_{Fx/})} (\{Fz\} \times_{N^\Delta(\mathbf{D})} N^\Delta(\mathbf{D})_{Fe/}),$$

alors e est une flèche cocartésienne ssi le carré

$$\begin{tikzcd}
\{z\} \times_{N^\Delta(\mathbf{C})} N^\Delta(\mathbf{C})_{e/} \arrow[r] \arrow[d] & \{z\} \times_{N^\Delta(\mathbf{C})} N^\Delta(\mathbf{C})_{x/} \arrow[d] \\
\{Fz\} \times_{N^\Delta(\mathbf{D})} N^\Delta(\mathbf{D})_{Fe/} \arrow[r] & \{Fz\} \times_{N^\Delta(\mathbf{D})} N^\Delta(\mathbf{D})_{Fx/}
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésienne. Mais cet carré est équivalent au carré dans l'énoncé par [1, Th. 1.1.5.13]. □

2. Rappels sur les catégories symétrique monoïdales

Définition 13. *Une catégorie symétrique monoïdale est une catégorie C équipée avec,*

— *Pour chaque ensemble fini I, un foncteur $\bigotimes_I : C^I \to C$;*
— *Pour chaque mappe $f : I \to J$, un isomorphisme naturel*

$$\bigotimes_I \xrightarrow{\sim} \bigotimes_J \circ \left(\bigotimes_{f^{-1}j}\right)_{j\in J} ;$$

tel que

— *Si I a un seul élément, le foncteur $\bigotimes_I$ est le foncteur d'évaluation $C^I \xrightarrow{\sim} C$;*
— *Pour tous les mappes $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$ le carré suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_I \arrow[r] \arrow[d] & \bigotimes_J \circ \left(\bigotimes_{f^{-1}j}\right)_{j\in J} \arrow[d] \\
\bigotimes_K \circ \left(\bigotimes_{(gf)^{-1}k}\right)_{k\in K} \arrow[r] & \bigotimes_K \circ \left(\bigotimes_{g^{-1}k}\right)_{k\in K} \circ \left(\bigotimes_{f^{-1}j}\right)_{j\in J}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

On écrit $-\otimes- : C^2 \to C$ pour $\bigotimes_2$ et $1 \in C$ pour l'image de $\bigotimes_\varnothing : * = C^0 \to C$.

Définition 14. *Une Γ-catégorie est un (pseudo)foncteur $X : \mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Cat}$ tel que*

$$\prod_{i\in I} \chi_i : X(I_+) \to \prod_{i\in I} X(\{i\}_+)$$

est une équivalence de catégories, où $\chi_i : I_+ \to \{i\}_+$ est la mappe qui envoie i à i et les autres éléments au point base.

Théoreme 15. *Il y a une équivalence naturelle de 2-catégories entre la 2-catégorie de catégorie symétriques monoïdales et la 2-catégorie de Γ-catégories.*

Démonstration. On va seulement donner la description du 2-foncteur, le reste de la démonstration est laissé comme exercice au lecteur courageux. Pour chaque ensemble fini I soit F_I la catégorie symétrique monoïdale libre sur I. On va donner un foncteur de $(\mathrm{Fin}_*)^{\mathrm{op}}$ à le catégorie symétrique monoïdales qui envoie I_+ à F_I. Un morphisme $I_+ \to J_+$ est envoyé sur le foncteur $F_J \to F_I$ qui envoie j sur

$$\bigotimes_{i \in f^{-1}j} i\,.$$

On voie que les axiomes de catégorie symétrique monoïdale implique que ça est un (pseudo)foncteur. Pour chaque catégorie symétrique monoïdale, on définie le pseudofoncteur $\mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Cat}$

$$\tilde{C}(I) = \mathrm{Fun}^{\otimes}(F_I, C)\,.$$

Dans l'autre direction, si $\tilde{C}$ est une Γ-catégorie, on peut définir une structure de catégorie symétrique monoïdale sur $C = \tilde{C}(1_+)$ en prenant pour $\bigotimes_I$ le composition

$$\tilde{C}(1_+)^I \xrightarrow{(\prod \chi_i)^{-1}} C(I_+) \to C(1_+)\,.$$

□

3. La définition de ∞-catégorie symétrique monoïdale

On veut définir la notion de ∞-catégorie symétrique monoïdale par analogie à la description de catégories symétriques monoïdales donné avant.

Définition 16. *Une ∞-catégorie symétrique monoïdale est un foncteur*

$$C : \mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Cat}_\infty$$

tel que, pour tous les ensembles finis I la mappe

$$\prod_{i \in I} C(\chi_i) : C(I_+) \to \prod_{i \in I} C(\{i\}_+)$$

est une équivalence.

Cette définition est parfaitement bonne, mais un peu difficile à utiliser. Pour obtenir une définition plus agréable on applique le théorème de straightening-unstraightening :

Définition 17. *Une* ***∞-catégorie symétrique monoïdale*** *est une fibration cocartésienne*

$$p : C^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$$

tel que, pour chaque ensemble fini I la mappe

$$\prod_{i \in I} (\chi_i)_! : C^{\otimes}_{I_+} \to \prod_{i \in I} C^{\otimes}_{\{i\}_+}$$

est une équivalence de ∞-catégories. Un foncteur symétrique monoïdale est un foncteur $F : C^{\otimes} \to D^{\otimes}$ qui envoie flèches cocartésiennes à flèches cocartésiennes. Si $C^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ est une catégorie symétrique monoïdale, le produit tensoriel $\otimes : C \times C \to C$ est le pushforward pour le morphisme $m : 2_+ \to 1_+$. L'unité est le foncteur pushforward $* = C^0 \to C$ pour le (seul) morphisme $e : 0_+ \to 1_+$

Si $\mathbf{C}$ est une catégorie simpliciale symétrique monoïdale, on peut définir sa catégorie d'opérateurs comme la catégorie avec objets le couples $(I, \{c_i\}_{i\in I})$ où I est un ensemble fini et $\{c_i\}_{i\in I}$ est une I-uple d'objets in C (c'est à dire, un foncteur $c : I \to C$) et ensembles de mappes

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{C}^\otimes}\left((I, \{c_i\}_{i\in I}), (J, \{d_j\}_{j\in J})\right) = \coprod_{f:I_+\to J_+} \prod_{j\in J} \mathrm{Map}_{\mathbf{C}}\left(\bigotimes_{i\in f^{-1}j} c_i, d_j\right)$$

Théoreme 18 (cfr. [2] Pr. 2.1.1.27)**.** *Si* $\mathbf{C}$ *est une catégorie simpliciale symétrique monoïdale, le foncteur* $p : N^\Delta(\mathbf{C}^\otimes) \to \mathrm{Fin}_*$ *est une* ∞*-catégorie symétrique monoïdale.*

Démonstration. On doit démontrer que p est une fibration cocartésienne. Pour ça, on applique la proposition . Il est clair que p est une fibration intérieure, on va vérifier que pour chaque $f : I_+ \to J_+$ et chaque $(I, \{c_i\}_{i\in I})$ la mappe canonique

$$(I, \{c_i\}_{i\in I}) \to (J, \{\bigotimes_{i\in f^{-1}j} c_i\}_{j\in J})$$

est une flèche cocartésienne. En fait, ça est presque évident par la définition qu'on a donné de $\mathbf{C}^\otimes$. En plus, le foncteur $f_! : N^\Delta(\mathbf{C}^\otimes)_{I_+} \cong N^\Delta(C^I) \to N^\Delta(\mathbf{C}^\otimes)_{J_+} \cong N^\Delta(C^J)$ qui envoie $\{X_i\}_{i\in I}$ à $\left\{\bigoplus_{fi=j} X_i\right\}_{j\in J}$ est un choix pour le foncteur de pushforward.

Finalement, il reste seulement à contrôler la condition de Segal. Mais la mappe

$$C^I \to \prod_{i\in I} C \qquad \{c_i\}_{i\in I} \mapsto (c_i)_{i\in I}$$

est évidement un isomorphisme de catégories simpliciaux. □

Example 19. *La catégorie de* n*-variétés et plongements a une structure de catégorie simpliciale symétrique monoïdale, avec le produit tensorielle donné par l'union disjointe . Ainsi on peut donner à* Mfld_n *une structure de* ∞*-catégorie symétrique monoïdale.*

Example 20. *Soit* R *un anneau commutatif, et soit* $\mathbf{Ch}(R)$ *la catégorie de complexes de chaînes dg-projectifs*[1]*, avec la structure simpliciale donnée par Dold-Kan. Alors, elle a une structure de catégorie simpliciale symétrique monoïdale, donné par le produit tenseur de complexes de chaînes, ainsi* $\mathcal{D}(R) = N^\Delta(\mathbf{Ch}(R))$ *a une structure de* ∞*-catégorie symétrique monoïdale.*

4. Algèbres commutatives et foncteurs lax monoïdales

Soit $\mathcal{O}$ une opérade simpliciale (par exemple obtenue en appliquant le foncteur Sing à une opérade topologique). Alors on peut définir une catégorie simpliciale symétrique monoïdale $\mathbf{Env}(O)$ où

— Les objets sont les ensembles fini ;

— Les espaces de mappes sont donné par :

$$\mathrm{Map}_{\mathbf{Env}(O)}(I, J) = \coprod_{f:I\to J} \prod_{j\in J} \mathcal{O}(\{^{-\infty}|) ;$$

1. C'est à dire, les complexes $P_\bullet$ où P_n est projectif pour chaque n et tel que pour chaque complexe exact $E_\bullet$ tous le mappes $P_\bullet \to E_\bullet$ sont chaîne-homotopique à 0.

— Le produit tensoriel est donné par l'union disjointe.

On dit la correspondante ∞-catégorie symétrique monoïdale $\mathrm{Env}(O)^{\otimes} = N^{\Delta}(\mathbf{Env}(O)^{\otimes})$, l'**$\infty$-catégorie symétrique monoïdale engendré par $\mathcal{O}$** où l'**enveloppe symétrique monoïdale de** O.

On appelle un foncteur symétrique monoïdale $A : \mathrm{Env}(O)^{\otimes} \to C^{\otimes}$ une **O-algèbre** dans $C^{\otimes}$. On écrit $\mathrm{Alg}_O(C^{\otimes} := \mathrm{Fun}^{\otimes}(\mathrm{Env}(O)^{\otimes}, C^{\otimes})$

Example 21. *Soit* $O = \mathrm{Comm}$ *l'opérade commutative. Alors* $\mathrm{Env}(\mathrm{Comm})$ *est la catégorie* $\mathrm{Fin}^{\amalg}$ *des ensembles fini avec l'union disjointe.*

Example 22. *Soit* $O = \mathrm{Ass}$ *l'opérade associative. Alors* $\mathrm{Env}(\mathrm{Ass})$ *est la catégorie* $\mathrm{Fin}^{nc,\amalg}$ *des ensembles noncommutatives fini avec l'union disjointe.*

Il y a une définition plus facile de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{Comm}}(C^{\otimes})$

Définition 23. *Une flèche* $f : I_+ \to J_+$ *de* Fin_* *est* ***inerte*** *si pour chaque* $j \in J$, *la preimage* $f^{-1}j$ *consiste exactement d'un point. C'est à dire,* f *"oublie" des éléments de* I *mais elle ne fais aucune autre chose.*

Théoreme 24 (cfr. [2] Pr. 2.2.4.9)**.** *Il y a une équivalence de ∞-catégories entre* $\mathrm{Alg}_{\mathrm{Comm}}(C^{\otimes})$ *et l'∞-catégorie de sections* $s : \mathrm{Fin}_* \to C^{\otimes}$ *qui envoie flèches inertes sur flèches cocartésiennes.*

Démonstration. On va seulement a donner le foncteur qui réalise l'équivalence. Il y a une section canonique $s : \mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Env}(\mathrm{Comm})^{\otimes}$ qui envoie I_+ sur la I-uple $(\{i\})_{i\in I}$. Le foncteur qu'on cherche envoie $F : \mathrm{Env}(\mathrm{Comm})^{\otimes} \to C^{\otimes}$ sure $F \circ s$. $\square$

L'intuition est que si une section envoie flèches inertes sur flèches cocartésiennes, elle doit commuter avec le pushforward le long de flèches inertes, c'est à dire

$$(\chi_i)_! s(I_+) \cong s(\{i\})\,.$$

Ainsi, si on écrit $A = s(1_+)$, on a $s(I_+) = \{A\}_{i\in I}$ and pour chaque I il y a une mappe

$$m_!(s(I_+)) = A^{\otimes I} \to s(1_+) = A$$

donné par $m : I_+ \to 1_+$ qui envoie tous les points non base sur le point non base.

On peut nous demander quels foncteurs préserves les algèbres commutatives. Certainement le foncteurs symétrique monoïdales, ma y-a-t-il d'autres ? La réponse est oui.

Définition 25. *Un foncteur lax symétrique monoïdale est un foncteur* $F : C^{\otimes} \to D^{\otimes}$ *qui envoie relèvements cocartésiennes de flèches inertes sur flèches cocartésiennes.*

Comme dans le cas du algèbres commutatives, un foncteur lax symétrique monoïdale est forcé a commuter avec le pushforward par le flèches inertes, ainsi

$$F(\{x_i\}_{i\in I}) = \{Fx_i\}_{i\in I}$$

et on a mappes

$$m_! F(x,y) = Fx \otimes Fy \to Fm_!(x,y) = F(x \otimes y)\,.$$

C'est évident du théorème précédent que le foncteurs lax symétriques monoïdales préservent les algèbres commutatives (en fait, il préservent les O-algèbres pour chaque opérade O).

5. Constructions sur les ∞-catégories symétriques monoïdales

On va voire, sans démonstrations, beaucoup constructions qu'on peut faire sur les ∞-catégories symétriques monoïdales.

Théoreme 26 ([2] Sec. 2.4.3)**.** *Si C est une ∞-catégorie symétrique monoïdale avec tous le coproduits finis, il y a une structure de ∞-catégorie symétrique monoïdale $C^{\amalg}$ où le produit tensoriel est le coproduit. En plus, il y a une équivalence de catégories*

$$\mathrm{CAlg}(C^{\amalg}) \xrightarrow{\sim} C\,.$$

Si $D^{\otimes}$ est une ∞-catégorie symétrique monoïdale où l'unité est un objet initial, il y a une équivalence

$$\mathrm{Fun}^{lax}(D^{\otimes}, C^{\amalg}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fun}(D, C)$$

Example 27. *Si Mfld_n est la catégorie de n-variété lisses et plongements, on a une foncteur $\mathrm{Mfld}_n \to \mathrm{Esp}_{/BO_n}$ (obtenu en identifient le codomain avec le nerve de la catégorie simpliciale des espaces topologiques avec un fibré vectoriel). Puisque l'identité de Mfld_n est un objet initial, on peut le relever à un foncteur lax symétrique monoïdale $\mathrm{Mfld}_n \to (\mathrm{Esp}_{/BO_n})^{\amalg}$. Ce foncteur est en fait symétrique monoïdale, et non simplement lax. Ainsi, pour chaque $\theta : X \to BO_n$, on peut définir l'∞-catégorie symétrique monoïdale de n-variété avec θ-structure :*

$$\mathrm{Mfld}_n^{\theta} = \mathrm{Mfld}_n \times_{\mathrm{Esp}_{/BO_n}} \mathrm{Esp}_{/X}\ .$$

Théoreme 28. *Si C est une ∞-catégorie symétrique monoïdale avec tous le produits finis, il y a une structure de ∞-catégorie symétrique monoïdale $C^{\times}$ où le produit tensoriel est le produit.*

Proposition 29 ([2] Pr. 2.2.1.1.)**.** *Soit $p : C^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ une ∞-catégorie symétrique monoïdale, et soit $D \subseteq C$ une sous-catégorie pleine tel que le foncteur $\otimes : C \times C \to C$ envoie $D \times D$ dans D. Alors, si $D^{\otimes}$ est la sous-catégorie pleine de $C^{\otimes}$ tel que la fibre sur I_+ est $D^I \subseteq C^I$, la restriction $p|_{D^{\otimes}} : D^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ est une ∞-catégorie symétrique monoïdale.*

Démonstration. Puisque $D^{\otimes}$ contienne tous le flèches cocartésiennes de $C^{\otimes}$ partent de $D^{\otimes}$, la projection $D^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ est une fibration cocartésienne. En plus la condition de Segal est vrai par définition. $\square$

Example 30. *Si $x \in C$ est un objet, on peut prendre la sous-catégorie pleine composé par les objets $x^{\otimes I}$ où I est un ensemble fini. Alors D est équivalent à l'enveloppe symétrique monoïdale de l'opérade $O(n) = \mathrm{Map}_C(x^{\otimes n}, x)$.*

En particulier, si on prend $D^n \in \mathrm{Mfld}_n^{fr}$, dans l'$\infty$-catégorie de variété parallélisé et plongements, on obtient que la sous-catégorie Disk_n composé par les objets $\coprod_I D^n$ est l'enveloppe symétrique monoïdale de l'opérade E_n.

Proposition 31 ([2] Pr. 2.2.1.9)**.** *Soit $p : C^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ une ∞-catégorie symétrique monoïdale, et soit $D \subseteq C$ une sous-catégorie réflective avec localisation $L : C \to D$ tel que pur chaque $c \in C$ le foncteur $c \otimes - : C \to C$ envoie L-équivalences à L-équivalences (ce qu'on dit que $\otimes$ est **compatible** avec L). Alors, la restriction $p|_{D^{\otimes}} : D^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ est une ∞-catégorie symétrique monoïdale avec produit tensoriel $\otimes_D : D \times D \to D$ donné par*

$$d \otimes_D d' = L(d \otimes d')\,.$$

Démonstration. La thèse suivi immédiatement si on preuve que une flèche de $D^{\otimes}$ est cocartésienne si et seulement si elle peut être factorisé comme une flèche cocartésienne de $C^{\otimes}$ suivi par une L-équivalence dans la fibre. □

Si $p : C^{\otimes} \to \mathrm{Fin}_*$ est une ∞-catégorie symétrique monoïdale, et C a tous le colimites, on dit que $\otimes$ commute avec le colimites en chaque variable, si pour tous $x \in C$ le foncteur $x \otimes -$ commute avec tous le colimites.

Proposition 32 ([3],[2] Sec. 2.4.6)**.** *Si $C^{\otimes}$ est une ∞-catégorie symétrique monoïdale où $\otimes$ commute avec le colimites en chaque variable, et $I^{\otimes}$ est une ∞-catégorie symétrique monoïdale, il y a une ∞-catégorie symétrique monoïdale $\mathrm{Fun}(I,C)^{\otimes}$ tel que*

— *La catégorie sous-jacent est l'∞-catégorie de foncteurs $\mathrm{Fun}(I,C)$;*
— *Le produit tensoriel $F \otimes G$ est donné par l'extension de Kan à gauche de $F(-) \otimes G(-) : I \times I \to C$ le long de $\otimes : I \times I \to I$:*

$$(F \otimes G)(i) = \operatorname*{colim}_{j \otimes j' \to i} F(j) \otimes G(j') \,.$$

— *Il y a un équivalence naturelle entre les algèbre commutatives de $\mathrm{Fun}(I,C)^{\otimes}$ et le foncteurs lax monoïdales $I \to C$.*

Example 33. *La catégorie Sp de spectre est définie par la sous catégorie de $\mathrm{Fun}(\mathrm{Esp}_*^{fin}, \mathrm{Esp})$ composé par le foncteurs linéaires (c'est à dire, $F(*) = *$ et $F(X) \xrightarrow{\sim} \Omega F(\Sigma X)$). C'est une sous-catégorie réflective, où la localisation est la dérivée de Goodwillie de F. On peut donner à $\mathrm{Fun}(\mathrm{Esp}_*^{fin}, \mathrm{Esp})$ la structure symétrique monoïdale de convolution de Day.*

Lemma 34. *Cette structure est compatible avec la localisation.*

Démonstration. Il suffit de prouver que si E est un foncteur linéaire, $\mathrm{Map}(F \otimes G, E) \leftarrow \mathrm{Map}(P_1 F \otimes G, E)$ est une équivalence. Puisque $- \otimes G$ a un adjoint à droite donné par

$$\mathrm{Nat}(G,E)(X) = \int_{Y \in \mathrm{Esp}_*^{fin}} \mathrm{Map}(G(Y), E(X \wedge Y))$$

il suffit de démontrer que $\mathrm{Nat}(G,E)$ est linéaire. La preuve de ça est laissé comme un exercice. □

Le produit induit sur Sp *est appelé le **produit smash** de spectres.*

Example 35. *La catégorie dérivée $\mathcal{D}(R)$ est équivalent à la catégorie $\mathrm{Fun}^{\times}(\mathrm{Free}_R^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sp})$, où Free_R est la catégorie de R-modules libres. Ainsi, on peut donner à $\mathcal{D}(R)$ la structure symétrique monoïdale en localisant la convolution de Day.*

Références

[1] Lurie, J., 2009. *Higher Topos Theory (AM-170)*. Princeton University Press.
[2] Jacob Lurie, 2017. *Higher Algebra*. Preprint on the author's webpage.
[3] Glasman, S., 2013. *Day convolution for infinity-categories*. arXiv preprint arXiv :1308.4940.