Etude de quelques équations d'ondes en milieux dispersifs ou dispersifs-dissipatifs

Stéphane Vento

Université Paris-Est

2 décembre 2008

Equations de Benjamin-Ono généralisées

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$$

- $u : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Equations de Benjamin-Ono généralisées

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$$

- $u : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- k entier ≥ 1

Equations de Benjamin-Ono généralisées

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$$

- $u : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- k entier ≥ 1
- $\mathcal{H}$ transformée de Hilbert définie par

$$\mathcal{H}f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(- i \ \operatorname{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\big)(x)$$

Equations de Benjamin-Ono généralisées

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$$

- $u : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- k entier ≥ 1
- $\mathcal{H}$ transformée de Hilbert définie par

$$\mathcal{H}f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(-i \ \mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\big)(x)$$

- Pour $k = 1$ c'est l'équation de Benjamin-Ono
  modélise la propagation des ondes uni-directionnelles en eaux profondes

Propriétés algébriques

Symétries

Invariance par translations spatiales, temporelles, réversibilité en temps.
Invariance par le changement d'échelle

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{1/k} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0$$

Espace critique : $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ avec $s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$

Propriétés algébriques

Symétries

Invariance par translations spatiales, temporelles, réversibilité en temps.
Invariance par le changement d'échelle

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{1/k} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0$$

Espace critique : $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ avec $s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$

Lois de conservations

Conservation de la masse et de l'énergie du flot

$$M(u) = \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)dx$$

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2}|D_x^{1/2} u(t,x)|^2 \mp \frac{1}{(k+1)(k+2)} u(t,x)^{k+2}\Big)dx$$

Estimations linéaires

Equation linéaire

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = 0, \quad u(0) = u_0$$

Solution :

$$u(t,x) = V(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi|\xi|)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi$$

Estimations linéaires

Equation linéaire

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = 0, \quad u(0) = u_0$$

Solution :

$$u(t,x) = V(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi|\xi|)} \widehat{u_0}(\xi) d\xi$$

Effet régularisant (Kato)

$$\|D_x^{1/2} V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}$$

Estimations linéaires

Equation linéaire

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = 0, \quad u(0) = u_0$$

Solution :

$$u(t,x) = V(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi|\xi|)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi$$

Effet régularisant (Kato)

$$\|D_x^{1/2}V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}$$

Estimations maximales en temps (Kenig, Ponce, Vega)

$$\|D_x^{-1/4}V(t)\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}$$

$$\|V(t)\varphi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}, \quad s > 1/2, \quad T < 1$$

Résultats connus

Pour $k = 1$ ($s_1 = -1/2$)

- Saut (1979) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$
- Ponce (1991) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3/2$
- Tao (2004) : bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$
- Burq-Planchon (2008) : Bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$
- Ionescu-Kenig (2007) : bien posé dans $L^2(\mathbb{R})$

Résultats obtenus par compacité

Résultats connus

Pour $k = 1$ ($s_1 = -1/2$)

- Saut (1979) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$
- Ponce (1991) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3/2$
- Tao (2004) : bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$
- Burq-Planchon (2008) : Bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$
- Ionescu-Kenig (2007) : bien posé dans $L^2(\mathbb{R})$

Résultats obtenus par compacité

Pour $k = 2$ ($s_2 = 0$)

- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2$
- Kenig-Takaoka (2006) : bien posé dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$

Résultats connus

Pour $k = 3$ ($s_3 = 1/6$)

- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$ pour petites données
- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/4$

Résultats connus

Pour $k = 3$ ($s_3 = 1/6$)

- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$ pour petites données
- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/4$

Pour $k \geq 4$ ($s_k = 1/2 - 1/k$)

- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_k$ pour petites données
- Molinet-Ribaud (2004) : bien posé dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$
- Burq-Planchon (2006) : bien posé dans $\dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ pour $k = 4$

Résultat principal

Théorème (S.V. (2008))

Soit $k \geq 3$ *et* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *avec* s *satisfaisant*

$$\begin{cases} s > 1/3 & si\ k = 3, \\ s \geq s_k & si\ k \geq 4. \end{cases}$$

Il existe $T = T(u_0) > 0$ *et une unique solution* u *de Benjamin-Ono généralisée tels que* $u \in Z_T$ *avec*

$$Z_T = \mathcal{C}([-T, +T], H^s(\mathbb{R})) \cap X^s \cap L^k_x L^\infty_T.$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ *est localement Lipschitz de* $H^s(\mathbb{R})$ *dans* Z_T*. Le résultat reste vrai lorsque* $k \geq 4$ *et si l'on remplace* $H^s(\mathbb{R})$ *par l'espace homogène* $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$*.*

Caractère mal posé

Théorème (Molinet-Ribaud (2004), S.V. (2007))

Soit $k \geq 3$ *et* $s < s_c$ *avec*

$$s_c = \begin{cases} 1/3 & si\ k = 3, \\ 1/2 - 1/k & si\ k \geq 4. \end{cases}$$

Alors il n'existe pas $T > 0$ *tel que le problème de Cauchy admette une unique solution locale définie sur l'intervalle* $[0, T]$ *et tel que le flot solution* $u_0 \mapsto u$ *soit de classe* $\mathcal{C}^{k+1}$ *dans un voisinage de l'origine de* $H^s(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{C}([0, T]; H^s(\mathbb{R}))$.

Preuve du théorème principal

D'après les estimations linéaires précédentes, si u est solution alors

$$\begin{aligned}\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|u\|_{L_x^k L_T^\infty} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k-1/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|_{L_x^k L_T^\infty}^k,\end{aligned}$$

Preuve du théorème principal

D'après les estimations linéaires précédentes, si u est solution alors

$$\begin{aligned}\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|u\|_{L_x^k L_T^\infty} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k-1/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|_{L_x^k L_T^\infty}^k,\end{aligned}$$

- Règle de Leibniz fractionnaire invalide

Preuve du théorème principal

D'après les estimations linéaires précédentes, si u est solution alors

$$\begin{aligned}\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|u\|_{L_x^k L_T^\infty} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k-1/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|_{L_x^k L_T^\infty}^k,\end{aligned}$$

- Règle de Leibniz fractionnaire invalide
- Le terme $\|V(t)u_0\|_{L_x^k L_T^\infty}$ n'est petit que si $\|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}$ l'est aussi

Preuve du théorème principal

D'après les estimations linéaires précédentes, si u est solution alors

$$\begin{aligned}\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|u\|_{L_x^k L_T^\infty} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k-1/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_T^2} \\ &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|_{L_x^k L_T^\infty}^k,\end{aligned}$$

- Règle de Leibniz fractionnaire invalide
- Le terme $\|V(t)u_0\|_{L_x^k L_T^\infty}$ n'est petit que si $\|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}$ l'est aussi
- Besoin de partager la dérivée du terme non-linéaire

La transformée de jauge

Pour u solution, soit

$$w = P_+(e^{-iF}u), \quad F(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u^k(t,y)dy$$

La transformée de jauge

Pour u solution, soit

$$w = P_+(e^{-iF}u), \quad F(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u^k(t,y)dy$$

w satisfait

$$\partial_t w + \mathcal{H}\partial_x^2 w = P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_-\partial_x u - iP_-\partial_x^2 u)] - ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}\partial_x u \mathcal{H}\partial_x u\Big).$$

La transformée de jauge

Pour u solution, soit

$$w = P_+(e^{-iF}u), \quad F(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u^k(t,y)dy$$

w satisfait

$$\partial_t w + \mathcal{H}\partial_x^2 w = P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_-\partial_x u - iP_-\partial_x^2 u)] \\ - ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}\partial_x u \mathcal{H}\partial_x u\Big).$$

Lemme (Molinet-Ribaud (2004))

Si $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ *et* $1 < p, q < \infty$ *alors*

$$\|D_x^\alpha P_+(fP_-D_x^\beta g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

où $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$, $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ *et* $\gamma_1 \geq \alpha$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$.

Autre méthode

- Travail dans les espaces de Besov

$$\dot{X}^s = \mathcal{B}^{s+\frac{3\varepsilon-1}{4},2}_{\frac{4}{1-\varepsilon}}(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}) \cap \mathcal{B}_1^{s-\frac{1}{2},2}(L_T^2)$$

Autre méthode

- Travail dans les espaces de Besov

$$\dot{X}^s = \mathcal{B}^{s+\frac{3\varepsilon-1}{4},2}_{\frac{4}{1-\varepsilon}}(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}) \cap \mathcal{B}_1^{s-\frac{1}{2},2}(L_T^2)$$

- Considération de l'équation satisfaite par $u - u_0$:
  si $T \ll 1$ alors $\|V(t)u_0 - u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} \ll 1$

Autre méthode

- Travail dans les espaces de Besov

$$\dot{X}^s = \mathcal{B}^{s+\frac{3\varepsilon-1}{4},2}_{\frac{4}{1-\varepsilon}}(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}) \cap \mathcal{B}_1^{s-\frac{1}{2},2}(L_T^2)$$

- Considération de l'équation satisfaite par $u - u_0$:
  si $T \ll 1$ alors $\|V(t)u_0 - u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} \ll 1$
- Mauvaise contribution du terme non-linéaire : $\pi(u, u)$ avec

$$\pi(f, g) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \partial_x Q_j((Q_{\ll j} f)^k Q_{\sim j} g)$$

Injection de ce terme dans la partie linéaire :

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_0, u) = f$$

avec

$$f = \pi(u_0, u) - \pi(u, u) - \sum_j \partial_x Q_j \Big(\sum_{r\gtrsim j} (Q_{\sim r} u)^2 (Q_{\lesssim r} u)^{k-1} \Big)$$

- Estimations linéaires sur

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_0, u) = 0$$

Soit $v_j = P_+ Q_j u$. Alors

$$i\partial_t v_j + (\partial_x + ib_{\ll j})^2 v_j = g_j, \quad b_{\ll j} = \frac{1}{2}(Q_{\ll j} u_0)^k$$

Transformée de jauge localisée

$$w_j = e^{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{x}(Q_{\ll j}u_0)^k} v_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

w_j satisfait

$$i\partial_t w_j + \partial_x^2 w_j = e^{i\int^x b_{\ll j}} g_j.$$

- Estimations linéaires sur

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_0, u) = 0$$

Soit $v_j = P_+ Q_j u$. Alors

$$i\partial_t v_j + (\partial_x + ib_{\ll j})^2 v_j = g_j, \quad b_{\ll j} = \frac{1}{2}(Q_{\ll j} u_0)^k$$

Transformée de jauge localisée

$$w_j = e^{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{x}(Q_{\ll j}u_0)^k} v_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

w_j satisfait

$$i\partial_t w_j + \partial_x^2 w_j = e^{i\int^x b_{\ll j}} g_j.$$

- Estimation du terme non-linéaire

$$f = \pi(u_0, u) - \pi(u, u) - \sum_j \partial_x Q_j \Big(\sum_{r \gtrsim j} (Q_{\sim r} u)^2 (Q_{\lesssim r} u)^{k-1} \Big).$$

Equations de type KdV dissipatives

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + D_x^{\alpha} u + u\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

- $u : (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Equations de type KdV dissipatives

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

- $u : (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- D_x^α multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + D_x^{\alpha} u + u\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

- $u : (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- D_x^{α} multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|^{\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 2$
- $0 \leq a \leq 1$

Equations de type KdV dissipatives

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

- $u : (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- D_x^α multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|^\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2$
- $0 \leq a \leq 1$
- $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$

Equations de type KdV dissipatives

$$\partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + D_x^{\alpha} u + u\partial_x u = 0$$

Combinaison des équations de type KdV

$$\partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + u\partial_x u = 0$$

et des équations dissipatives

$$\partial_t u + D_x^{\alpha} u + u\partial_x u = 0$$

Méthode de résolution

Argument de point fixe sur la formulation intégrale tronquée en temps

$$u(t) = \psi(t)\Big[W_\alpha(t)u_0 - \frac{\chi_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\int_0^t W_\alpha(t-t')\partial_x(\psi_T^2(t')u^2(t'))dt'\Big]$$

où ψ fonction cutoff, W_α défini par

$$\mathcal{F}_x(W_\alpha(t)\varphi)(\xi) = \exp[ith(\xi) - |\xi|^\alpha |t|]\widehat{\varphi}(\xi), \ \varphi \in \mathcal{S}'$$

et $h(\xi) = \xi|\xi|^{1+a}$ relation de dispersion

Espace de résolution

Par analogie avec les espaces introduits par Bourgain, nous définissons pour $b, s \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$ l'espace $X_\alpha^{b,s}$ muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_\alpha^{b,s}} &= \|\langle\xi\rangle^s \langle i(\tau - h(\xi)) + |\xi|^\alpha\rangle^b \widetilde{u}(\tau,\xi)\|_{L^2_{\tau\xi}} \\ &\sim \|W(-t)u\|_{H^{b,s}} + \|u\|_{L^2_t H_x^{s+\alpha b}} \end{aligned}$$

où $W(\cdot)$ est le générateur de l'évolution libre associée à l'équation dispersive.

Estimations linéaires

Lemme

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ *et tout* $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$,

$$\|\psi(t)W_\alpha(t)\varphi\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}.$$

Pour tout $0 < \delta < 1/2$ *et tout* $f \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,

$$\left\|\chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t W_\alpha(t-t')f(t')dt'\right\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|f\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}.$$

Estimations linéaires

Lemme

Pour tout $s \in \mathbb{R}$ *et tout* $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$,

$$\|\psi(t)W_\alpha(t)\varphi\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}.$$

Pour tout $0 < \delta < 1/2$ *et tout* $f \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,

$$\left\|\chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t W_\alpha(t-t')f(t')dt'\right\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|f\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}.$$

Ainsi, si u est solution alors

$$\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|\partial_x(\eta_T u)^2\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}.$$

Estimation bilinéaire

- Il reste maintenant à montrer que

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}} \lesssim \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}$$

pour tout $u, v \in X_\alpha^{1/2,s}$ et $\delta \ll 1$.

Estimation bilinéaire

- Il reste maintenant à montrer que

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}} \lesssim \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}$$

  pour tout $u, v \in X_\alpha^{1/2,s}$ et $\delta \ll 1$.
- Par dualité, il est équivalent de montrer que

$$\Big| \int_{\substack{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0 \\ \tau_1+\tau_2+\tau_3=0}} K(\tau,\xi) \prod_{j=1}^{3} u_j(\tau_j,\xi_j) \Big| \lesssim \prod_{j=1}^{3} \|u_j\|_{L^2_{xt}},$$

  où

$$K(\tau,\xi) = \frac{|\xi_3| \langle \xi_3 \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle i(\tau_3 - h(\xi_3)) + |\xi_3|^\alpha \rangle^{1/2-\delta} \prod_{j=1}^{2} \langle i(\tau_j - h(\xi_j)) + |\xi_j|^\alpha \rangle^{1/2}}.$$

$[k; Z]$-multiplicateurs de Tao

Définition (Tao (2001))

Un $[3, \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$*-multiplicateur est une fonction* m *définie sur* $\Gamma = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^3 : \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*.*
La norme de m *est la meilleure constante telle que l'inégalité*

$$\Big| \int_\Gamma m(\eta) \prod_{j=1}^{3} f_j(\eta_j) d\eta \Big| \leq \|m\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \prod_{j=1}^{3} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$$

est vraie pour toutes fonctions test f_1, f_2, f_3 *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*.*

$[k; Z]$-multiplicateurs de Tao

Définition (Tao (2001))

Un $[3, \mathbb{R}\times\mathbb{R}]$*-multiplicateur est une fonction* m *définie sur* $\Gamma = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^3 : \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0\}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*.*
La norme de m *est la meilleure constante telle que l'inégalité*

$$\Big| \int_\Gamma m(\eta) \prod_{j=1}^{3} f_j(\eta_j) d\eta \Big| \le \|m\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \prod_{j=1}^{3} \|f_j\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$$

est vraie pour toutes fonctions test f_1, f_2, f_3 *sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$*.*

L'estimation bilinéaire est alors équivalente à

$$\left\| \frac{\xi_3 \langle \xi_3\rangle^s \langle \xi_1\rangle^{-s} \langle \xi_2\rangle^{-s}}{\langle |\lambda_1| + |\xi_1|^\alpha\rangle^{1/2} \langle |\lambda_2| + |\xi_2|^\alpha\rangle^{1/2} \langle |\lambda_3| + |\xi_3|^\alpha\rangle^{1/2-\delta}} \right\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \lesssim 1$$

avec $\lambda_j = \tau_j - h(\xi_j)$ (et $\eta_j = (\tau_j, \xi_j) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$).

Passage en dyadique

- On localise les variables ξ_j, λ_j et la fonction de résonance

$$h(\xi) = \xi_1|\xi_1|^{1+a} + \xi_2|\xi_2|^{1+a} + \xi_3|\xi_3|^{1+a}$$

dans des couronnes dyadiques :

$$|\xi_j| \sim N_j, \quad |\lambda_j| \sim L_j, \quad |h(\xi)| \sim H.$$

Passage en dyadique

- On localise les variables ξ_j, λ_j et la fonction de résonance
$$h(\xi) = \xi_1|\xi_1|^{1+a} + \xi_2|\xi_2|^{1+a} + \xi_3|\xi_3|^{1+a}$$
dans des couronnes dyadiques :
$$|\xi_j| \sim N_j, \quad |\lambda_j| \sim L_j, \quad |h(\xi)| \sim H.$$
- Il suffit alors de montrer
$$\sum_{\substack{N_{max} \sim N_{med} \\ H \\ L_{max} \sim \max(H, L_{med})}} \frac{N_3 \langle N_3 \rangle^s \langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{-s}}{(L_1 + \langle N_1 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_2 + \langle N_2 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_3 + \langle N_3 \rangle^\alpha)^{1/2-\delta}}$$
$$\times \left\| X_{N_1,N_2,N_3,H,L_1,L_2,L_3} \right\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \lesssim 1$$
avec
$$X_{N_1,N_2,N_3,H,L_1,L_2,L_3} = \chi_{|h(\xi)| \sim H} \prod_{j=1}^{3} \chi_{|\xi_j| \sim N_j} \chi_{|\lambda_j| \sim L_j}.$$

Equations de Benjamin-Ono dissipatives

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0 \qquad \text{(dBO)}$$

- Cas $\alpha = 2$:
  Otani (2005) montre que (dBO) est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -1/2$.
  De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ devient irrégulier dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s < -1/2$.

Equations de Benjamin-Ono dissipatives

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0 \qquad \text{(dBO)}$$

- Cas $\alpha = 2$:
  Otani (2005) montre que (dBO) est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -1/2$.
  De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ devient irrégulier dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s < -1/2$.
- Cas général :
  En 2006, Otani obtient le caractère bien posé pour $3/2 < \alpha \leq 2$ dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2 - \alpha/2$.

Caractère bien posé

Théorème (S.V. (2008))

Soit $1 < \alpha \leq 2$ *et* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *avec* $s > -\alpha/4$*. Alors pour tout* $T > 0$*, il existe une unique solution* u *de (dBO) dans*

$$Z_T = \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap X^{1/2,s}_{\alpha,T}.$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ *est régulier de* $H^s(\mathbb{R})$ *vers* Z_T *et* u *appartient à* $\mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$*.*

Caractère bien posé

Théorème (S.V. (2008))

Soit $1 < \alpha \leq 2$ *et* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *avec* $s > -\alpha/4$. *Alors pour tout* $T > 0$, *il existe une unique solution* u *de (dBO) dans*

$$Z_T = \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap X^{1/2,s}_{\alpha,T}.$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ *est régulier de* $H^s(\mathbb{R})$ *vers* Z_T *et* u *appartient à* $\mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$.

Point clé de la démonstration : localisation de la fonction de résonance

$$H \sim N_{min} N_{max}$$

Caractère mal posé

Théorème (S.V. (2008))

1. *Soit* $1 \leq \alpha \leq 2$ *et* $s < -\alpha/4$. *Alors le problème de Cauchy (dBO) est* $\mathcal{C}^3$*-mal posé dans* $H^s(\mathbb{R})$.
2. *Lorsque* $0 \leq \alpha < 1$, *(dBO) est* $\mathcal{C}^2$*-mal posé dans* $H^s(\mathbb{R})$ *pour tout* $s \in \mathbb{R}$.

Remarque

Comparaison avec l'équation purement dissipative :

$$\partial_t u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0.$$

Pour $1 < \alpha \leq 2$, on montre facilement que le problème est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ lorsque $s > 3/2 - \alpha$ (indice optimal).

Equations de KdV dissipatives

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0$$

- Pour $\alpha = 2$ (KdVB), Molinet-Ribaud (2004) prouvent le caractère bien posé dans H^s, $s > -1$ (indice optimal)

Equations de KdV dissipatives

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0$$

- Pour $\alpha = 2$ (KdVB), Molinet-Ribaud (2004) prouvent le caractère bien posé dans H^s, $s > -1$ (indice optimal)
- Cas général : bien posé dans H^s, $s > -3/4$ si $\alpha \leq 1$ et $s > -3/(5-\alpha)$ si $1 < \alpha \leq 2$ (S.V. (2007))

Equations de KdV dissipatives

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0$$

- Pour $\alpha = 2$ (KdVB), Molinet-Ribaud (2004) prouvent le caractère bien posé dans H^s, $s > -1$ (indice optimal)
- Cas général : bien posé dans H^s, $s > -3/4$ si $\alpha \leq 1$ et $s > -3/(5-\alpha)$ si $1 < \alpha \leq 2$ (S.V. (2007))
- Résultat amélioré par Xue (2007) : bien posé dans H^s, $s > -\min(1, \frac{3+\alpha}{4})$ (indice optimal)

Equations de KdV dissipatives

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0$$

- Pour $\alpha = 2$ (KdVB), Molinet-Ribaud (2004) prouvent le caractère bien posé dans H^s, $s > -1$ (indice optimal)
- Cas général : bien posé dans H^s, $s > -3/4$ si $\alpha \leq 1$ et $s > -3/(5-\alpha)$ si $1 < \alpha \leq 2$ (S.V. (2007))
- Résultat amélioré par Xue (2007) : bien posé dans H^s, $s > -\min(1, \frac{3+\alpha}{4})$ (indice optimal)

Point clé de la preuve

$$\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = 3\xi_1\xi_2\xi_3 \text{ lorsque } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$$

Equations de KdV dissipatives

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0, \quad 0 < \alpha < 2 \qquad \text{(dKdV)}$$

- Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, existence d'une solution globale u dans $\mathcal{C}((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$

Equations de KdV dissipatives

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0, \quad 0 < \alpha < 2 \qquad \text{(dKdV)}$$

- Pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, existence d'une solution globale u dans $\mathcal{C}((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ pour tout $T > 0$
- Développement asymptotique de u dans les espaces de Sobolev $\dot{W}_p^j(\mathbb{R})$: trouver un terme v tel que

$$\|u(t) - v(t)\|_{\dot{W}_p^j} = O(t^{-r(\alpha)}),$$

avec $r(\alpha) > 0$ le plus grand possible

Equations de KdV dissipatives

- Pour $\alpha = 0$, (dKdV) s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u + u\partial_x u = 0.$$

Alors :

$$\|u(t)\|_{L^2} = O(e^{-t}) \text{ lorsque } t \to \infty.$$

Equations de KdV dissipatives

- Pour $\alpha = 0$, (dKdV) s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u + u\partial_x u = 0.$$

Alors :

$$\|u(t)\|_{L^2} = O(e^{-t}) \text{ lorsque } t \to \infty.$$

- Pour $\alpha = 2$, (dKdV) est l'équation de KdV-Burgers

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - \partial_x^2 u + u\partial_x u = 0.$$

Alors (Amick-Bona-Schonbek (1989)),

$$\|u(t)\|_{L^2} \le c(1+t)^{-1/4}$$

Equations de KdV dissipatives

- Pour $\alpha = 0$, (dKdV) s'écrit

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + u + u\partial_x u = 0.$$

Alors :

$$\|u(t)\|_{L^2} = O(e^{-t}) \text{ lorsque } t \to \infty.$$

- Pour $\alpha = 2$, (dKdV) est l'équation de KdV-Burgers

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - \partial_x^2 u + u\partial_x u = 0.$$

Alors (Amick-Bona-Schonbek (1989)),

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1+t)^{-1/4}$$

Se comporte comme l'équation de Burgers

$$\partial_t u - \partial_x^2 u + u\partial_x u = 0.$$

Formulation intégrale

$$u(t) = S_\alpha(t) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s)ds$$

avec

$$S_\alpha(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{(i\xi^3 - |\xi|^\alpha)t} d\xi, \quad t > 0$$

Effet régularisant

$$\|S_\alpha(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha}$$

Hypothèses

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{H1}$$

$$\forall j \geq 0,\ \sup_{t>0} \|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} < \infty \tag{H2}$$

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{L^1} < \infty \tag{H3}$$

Hypothèses

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{H1}$$

$$\forall j \geq 0,\ \sup_{t>0} \|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} < \infty \tag{H2}$$

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{L^1} < \infty \tag{H3}$$

Théorème (S.V. (2007))

Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W_2^{4,1}(\mathbb{R})$ *et* $\alpha > 1$, *alors la solution correspondante satisfait les hypothèses (H2)-(H3).*

Développement asymptotique : premier ordre

Théorème (S.V. (2007))

Soit $p \in [2,\infty]$ *et* $j \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *et que la solution* u *satisfait (H2)-(H3). Alors, pour tout* $t > 0$,

$$\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{W}_p^j} \lesssim \begin{cases} (1+t)^{(-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha) - 1/\alpha} & si \quad 0 < \alpha < 1, \\ (1+t)^{(-(1-1/p)-j)-1} \log(1+t) & si \quad \alpha = 1, \\ (1+t)^{(-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha) - (2/\alpha - 1)} & si \quad 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Développement asymptotique : ordres supérieurs

Théorème (S.V. (2007))

Supposons $p \in [2, \infty]$, $j \in \mathbb{N}$, $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *et que (H2)-(H3) sont vérifiées.*

1. *Si* $0 < \alpha < 1$, *alors*

$$\left\| u(t) - S_\alpha(t) * u_0 + \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds \Big) \partial_x G_\alpha(t) \right\|_{\dot W_p^j} = o\big(t^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha}\big).$$

2. *Si* $\alpha = 1$, *alors*

$$\left\| u(t) - S_1(t) * u_0 + \frac{M^2}{4\pi} (\log t) \partial_x G_1(t) \right\|_{\dot W_p^j} = o(t^{-(1-1/p)-j-1} \log t)$$

où $M = \int_{\mathbb{R}} u_0$.

Développement asymptotique : ordres supérieurs

$$\begin{cases} F^0(t) = S_\alpha(t) * u_0, \\ F^{n+1}(t) = S_\alpha(t) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x (F^n(s))^2 ds. \end{cases}$$

Théorème (S.V. (2007))

Soit $1 < \alpha < 2$, $p \in [2, \infty]$, $j \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. *Supposons de plus que les conditions (H2) and (H3) sont satisfaites.*

1. *Si* $\frac{2N+1}{N+1} < \alpha < \frac{2N+3}{N+2}$ *pour un certain* $N \in \mathbb{N}$, *alors*

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha}.$$

2. *Si* $\alpha = \frac{2N+3}{N+2}$ *pour un certain* $N \in \mathbb{N}$, *alors*

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha} \log(1+t).$$