Institut Galilée *M1 Math*
Département de Mathématiques Année 2015-2016

Variétés différentiables
Feuille 3

Exercice 1. *Soit M une variété différentiable. Soit $c : [a; b] \to M$ un chemin de classe C^1 par morceaux sur M et ω une 1-forme différentielle définie sur M.*

1. *Montrer que si ϕ est un C^1-difféomorphisme croissant de $[a, b]$ on a*
$$\int_c \omega = \int_{c\circ\phi} \omega.$$
2. *Soit $\omega = x\mathrm{d}y$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Montrez en utilisant des carrés que ω n'est pas exacte.*
3. *Soit $\mathrm{d}\theta = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ définie sur $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer l'intégrale de $\mathrm{d}\theta$ sur le chemin $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ défini par*
$$s \mapsto (\cos(s); \sin(s)).$$
Montrez que $\mathrm{d}\theta$ n'est pas exacte. La notation "$\mathrm{d}\theta$" est standard mais est un abus de langage : il n'existe pas de fonction θ bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dont $\mathrm{d}\theta$ serait la différentielle.

Exercice 2. *Posons $W = T^*M = \cup_{x\in M} T^*_x M$, le fibré cotangent d'une variété différentiable M de classe C^∞ de dimension n. On désigne par (x, ω) (avec $x \in M$ et $\omega \in (T_xM)^*$ une forme linéaire sur T_xM) les points de W.*

1. *Montrer que W admet une structure différentielle C^∞ canonique. Pour cela, on utilisera le fait que $T^*_x M$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour tout $x \in M$.*
2. *Quelle est la dimension de W ?*
3. *Montrer que M est sous-variété de W.*
4. *Soit $p : W = T^*M \to M$ la projection $(x, \omega) \mapsto x$. On définit la forme† $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ par*
$$\lambda(x, \omega)(X) = \omega(T_{(x,\omega)}p(X))$$
pour tout $(x, \omega) \in W$ et $X \in T_{(x,\omega)}W$.
Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$. Ainsi, pour $x \in M$, α_x est une forme linéaire sur T_xM, autrement dit, une application $\alpha : M \to T^*M = W$. Que vaut $\alpha^*(\lambda)$?

Exercice 3. *Pour $n \geq 1$, on nomme les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^{2n}$ par $x^1, y^1, x^2, y^2, \cdots, x^n, y^n$. On considère la forme différentielle*
$$\alpha = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}y^1 + \cdots + \mathrm{d}x^n \wedge \mathrm{d}y^n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}y^i \,.$$
Calculer $\alpha^n = \overbrace{\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}^{n \text{ times}}$.
Indication : on pourra commencer par $n = 2, 3...$

Exercice 4. *Soit M une variété n-dimensionnelle, $\alpha \in \Omega^n(M)$ une n-forme. Soit (U, ϕ) et (U, ψ) deux cartes locales de M (on admettra par simplicité qu'elles soient définies sur le même ouvert), définissant des coordonnées x^i et y^k.*

1. *Etant donné la forme locale de degré 1 $\mathrm{d}x^i \in \Omega^1(U)$, quelle est sa représentation dans les coordonnées y^k ?*

†. dite forme *tautologique* sur le cotangent

2. *Si* $\alpha = f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, *quelle est la représentation locale de* α *dans les coordonnées* y^k *?*
3. *Soit* $M = \mathbb{R}^2$ *et* $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. *Calculer cette forme en coordonnées polaires (sur le domaine* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\ \forall x \in (-\infty, 0]\}$.

Exercice 5. *Soit* $v^i \in \Omega^1_p(\mathbb{R}^n)$ *l'espace vectoriel* n*-dimensionnel des formes de degré* 1 *évaluées au point* p. *Montrer que* $v^1, \cdots, v^k$ *sont* k *vecteurs contangents linéairement indépendants si et seulement si* $v^1 \wedge \cdots \wedge v^k \neq 0$.

Exercice 6. *Soit* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la fonction lisse définie par* $\phi(x, y, z) = (x + z, xy)$. *On dénote par* (x, y, z) *les coordonnées cartésiennes usuelles de* $\mathbb{R}^3$, *et par* (v, w) *celles de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $\alpha = e^w \mathrm{d}v + v\mathrm{d}w$ *et* $\beta = v\ \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}w$. *Calculer*

1. $\alpha \wedge \beta$,
2. $\phi^\star(\alpha)$,
3. $\phi^\star(\beta)$,
4. $\phi^\star(\alpha) \wedge \phi^\star(\beta)$.

Exercice 7. *On considère les formes différentielles suivantes sur* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\alpha = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y\,, \quad \beta = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z\,, \quad \gamma = e^{2xy}\mathrm{d}z\,.$$

Calculer $\mathrm{d}\alpha,\ \mathrm{d}\beta,\ \mathrm{d}\gamma$ *et* $\alpha \wedge \beta$ *et* $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.

Exercice 8. *Soit* ω *une* 2*-forme exacte sur une variété de dimension* $2n$. *Montrer que* ω^n *est exacte.*

Exercice 9. *On note* (x, y) *les coordonnées de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$ *la projection. Montrer qu'il existe une unique* 2*-forme* ω *sur* $\mathbb{T}^2$ *telle que* $p^*\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Cette forme est-elle fermée ? exacte ?

Exercice 10. *Soit* $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ *défini par*

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,.$$

1. *Calculer l'expression de* ω *en coordonnées sphériques sur le domaine de définition de ces coordonnées. On rappelle que les coordonnées sphérique sont définies par*

$$(x, y, z) = (r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta))\,.$$

2. *Calculer* $\mathrm{d}\omega$ *en coordonnées cartésiennes et sphériques, et montrer que les deux résultats coïncident.*
3. *Soit* $\tilde{\omega}$ *la restriction de* ω *à la sphère de rayon* 1, *c'est à dire*

$$\tilde{\omega} \equiv i^\star(\omega)\,,$$

où $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$ *est l'inclusion. Calculer sa représentation locale en coordonnées sphériques* $(1, \theta, \varphi)$. *(On remarquera que ces coordonnées ne sont bien définies que sur l'ouvert* $U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$.
4. *Montrer que* $\tilde{\omega}$ *ne s'annulle jamais sur la sphère.*

Exercice 11. *En généralisant l'exercice précédent, montrer que la* n*-forme* ω *sur* S^n *définie par la formule*

$$\forall x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1},\ \forall v_1, \ldots, v_n \in T_x\mathbb{S}^n \subset T_x\mathbb{R}^{n+1},\ \omega_x(v_1, \ldots, v_n) = \det(x; v_1; \ldots; v_n)$$

vérifie $\omega = j^*\alpha$ *pour*

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \mathrm{d}x_0 \wedge \cdots \wedge \hat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Exercice 12. *On considère la projection naturelle*

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

et l'application linéaire

$$p^* : \Omega^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \to \Omega^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}).$$

Montrer que p^* *est injective et que son image est l'ensemble de toutes les formes* α *sur* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ *qui vérifient* $i_X\alpha = 0$ *et* $h_\lambda^*\alpha = \alpha$ *pour tout* $\lambda \neq 0$, *où* X *désigne le champ de vecteurs radial* $X_x = X$ *et* $h_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ *est l'homothétie de paramètre* λ.

La forme de l'exercice précédent provient-elle d'une forme sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *?*