Méthodes d'énergie et taux d'explosion pour l'équation semilinéaire des ondes

Hatem ZAAG

MIMS & SMT : Journées d'été des mathématiciens tunisiens

22-23 juillet 2007

Cité des Sciences, Tunis

Chapitre 3 : Explosion en temps fini pour l'équation semilinéaire des ondes.

Section 3.1 : Équation homogène.

Sauf avis contraire, je suis en dimension N=1 dans tout l'espace R.

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{} = 0 \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$\Box u$ le d'alembertien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{m}{s^2} - c^2 \frac{m}{m^2} = 0$$

$$c^2 = \frac{m^2}{s^2}$$

$$\frac{U}{T^2} - c^2 \frac{U}{L^2} = 0 \qquad c^2 = \frac{L^2}{T^2}$$

- Formulation vectorielle

Comme les EDO du second ordre, on peut réécrire notre équation sous la forme d'une EDP du premier ordre, à valeurs vectorielles.

On pose $v = \frac{\partial u}{\partial t}$

Nouvelle fonction (u,v).

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{pmatrix}}$$

Section 3.2 : solution de l'équation homogène, solution fondamentale, groupe des ondes.

Il nous faut connaitre la donnée initiale.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$$

Astuce : changement de variables et de fonctions.

On introduit U(X,T) = u(x,t) avec X =x+t et T = x-t

- $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial X}(X,T) - \dfrac{\partial U}{\partial T}(X,T)$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial U}{\partial X}(X,T) - 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial T^2}(X,T)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial X} + \dfrac{\partial U}{\partial T}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2} + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X \partial T} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial T^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X} = 0}$$

On fixe X et on intègre entre 0 et T.

$$\frac{\partial u}{\partial X}(X,T) - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial X}(X,0)}_{=G(X)} = 0$$

On fixe T et on intègre entre 0 et X.

$$u(X,T) - u(0,T) - \underbrace{\int_0^X \frac{\partial u}{\partial X}(X',0)\,dX'}_{=g(X)} = 0$$

$$\boxed{u(X,T) = f(T) + g(X)}$$

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$$

$$\partial_t u(x,t) = -f'(x-t) + g'(x+t)$$

Pour t = 0,

$$u_0(x) = f(x) + g(x)$$

$$u_1(x) = -f'(x) + g'(x) \qquad \int_0^x u_1 = -f(x) + g(x) + f(0) - g(0)$$

$$2g(x) = u_0(x) + \int_0^x u_1 + g(0) - f(0)$$

$$2f(x) = u_0(x) - \int_0^x u_1 + f(0) - g(0)$$

Si l'on impose g(0)=f(0)=0, alors les fonctions g et f sont déterminées.

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-t) + u_0(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1}$$

Remarques :

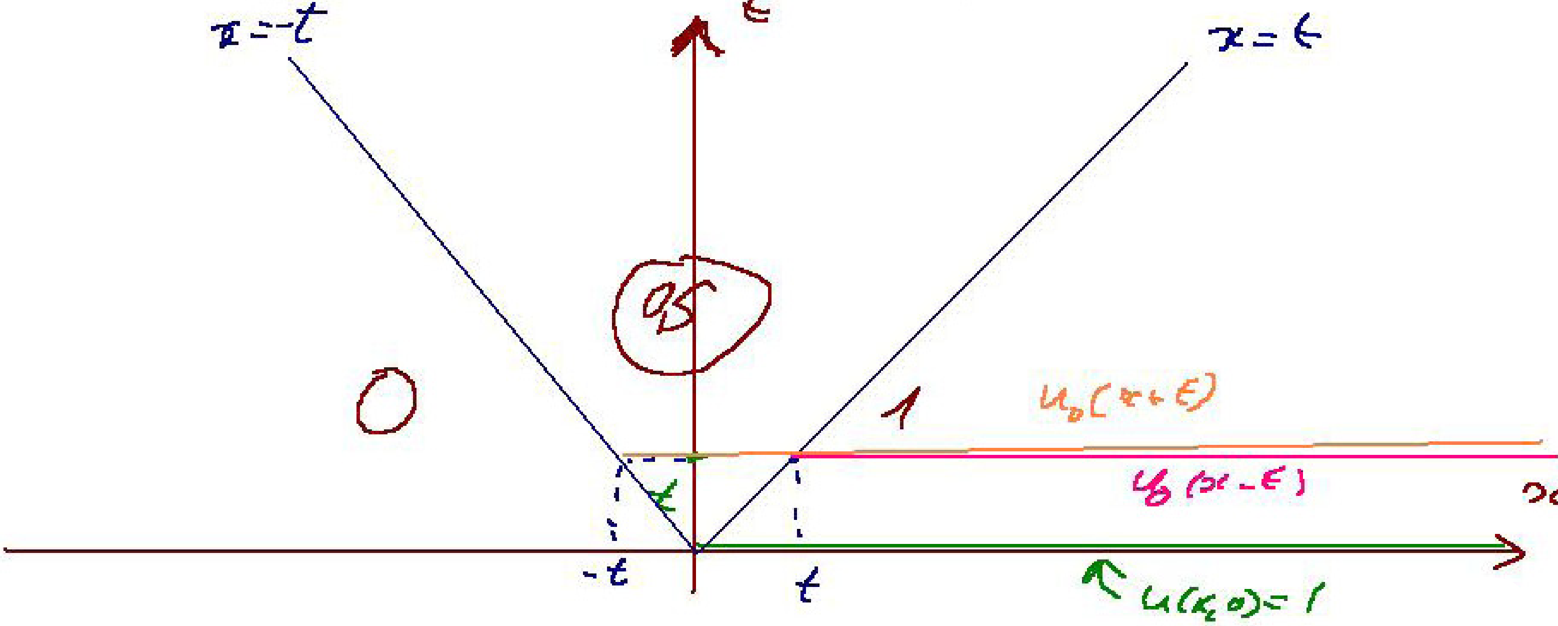
- Cette solution est bien définie pour tout réel t.
- la solution se propage à une vitesse finie.
- si on considère l'équation $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1}$$

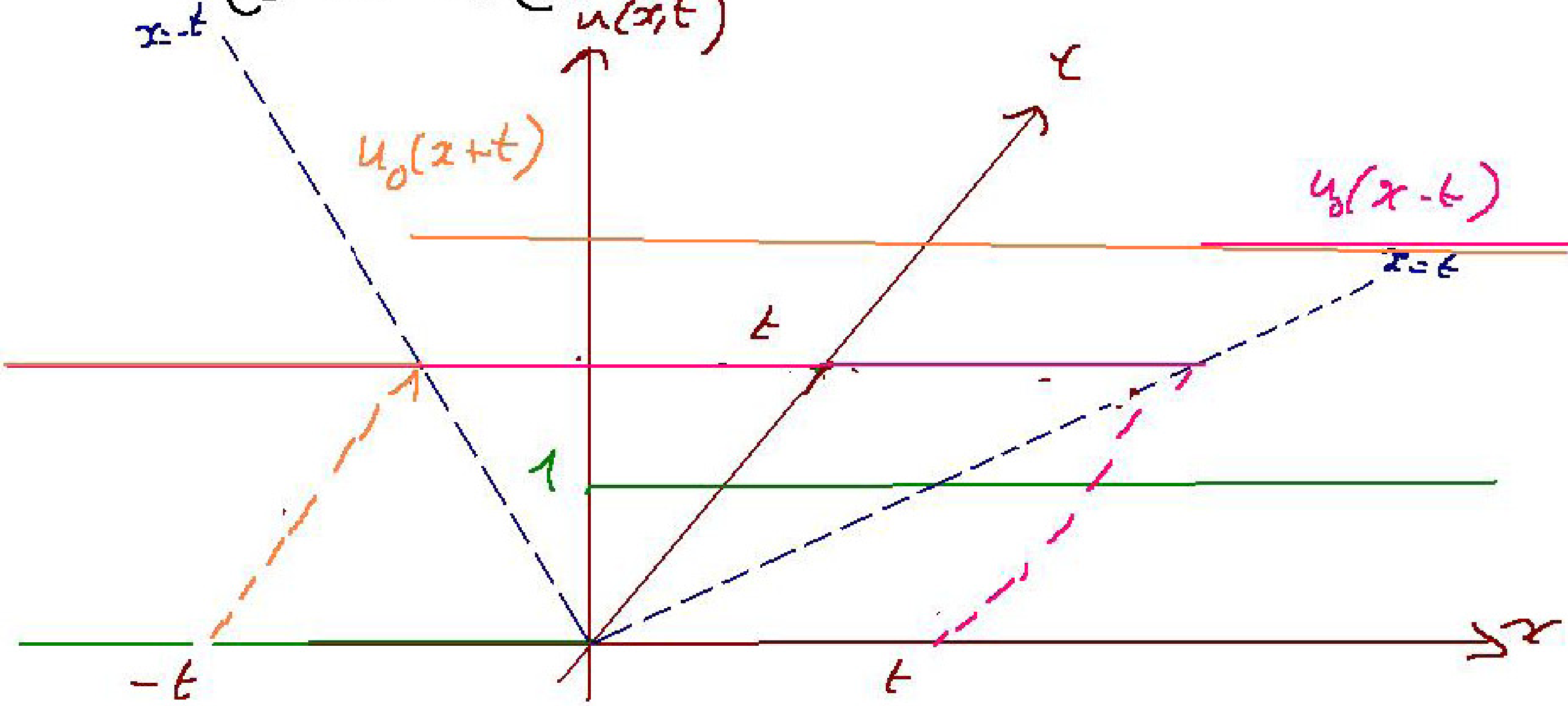
Exemple : u_1 =0 et u_0 = Heaviside

$$\begin{cases} u_0(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ u_0(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-t) + u_0(x+t)\right]$$



$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq t \\ \frac{1}{2} & \text{si } -t \leq x < t \\ 0 & \text{si } x < -t \end{cases}$$

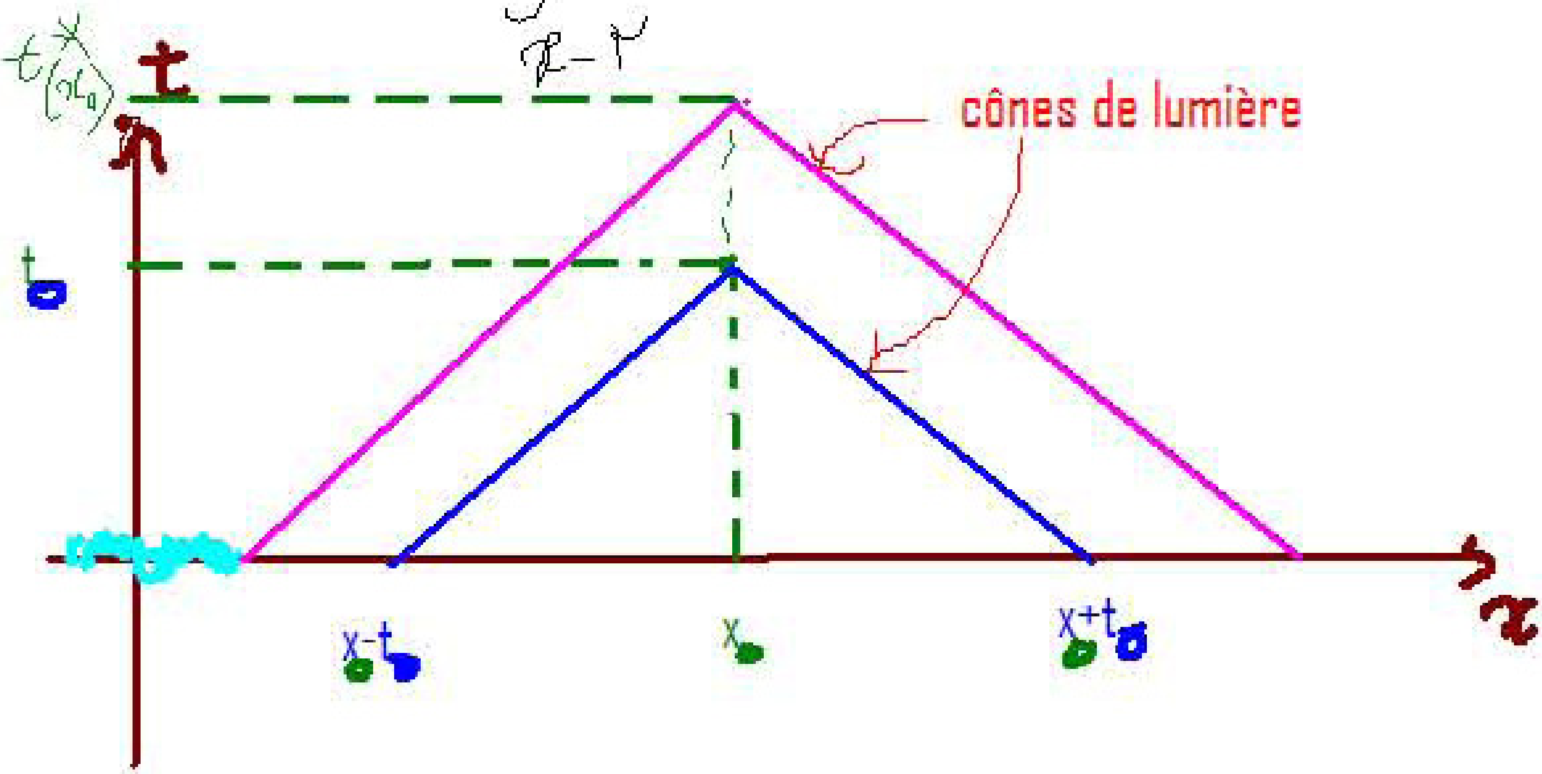


Dans cet exemple, deux copies de u_0 se propagent à vitesse finie = 1 (car c=1), l'une vers la droite u_0(x-t) et l'autre vers la gauche u_0(x+t). Notre solution, c'est la moyenne des 2.

- Cas général. Je rappelle qu'on a :

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-t) + u_0(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1}$$

$2u(x,t)=u_0(x-t)+u_0(x+t)+\int_{x-t}^{x+t} u_1$



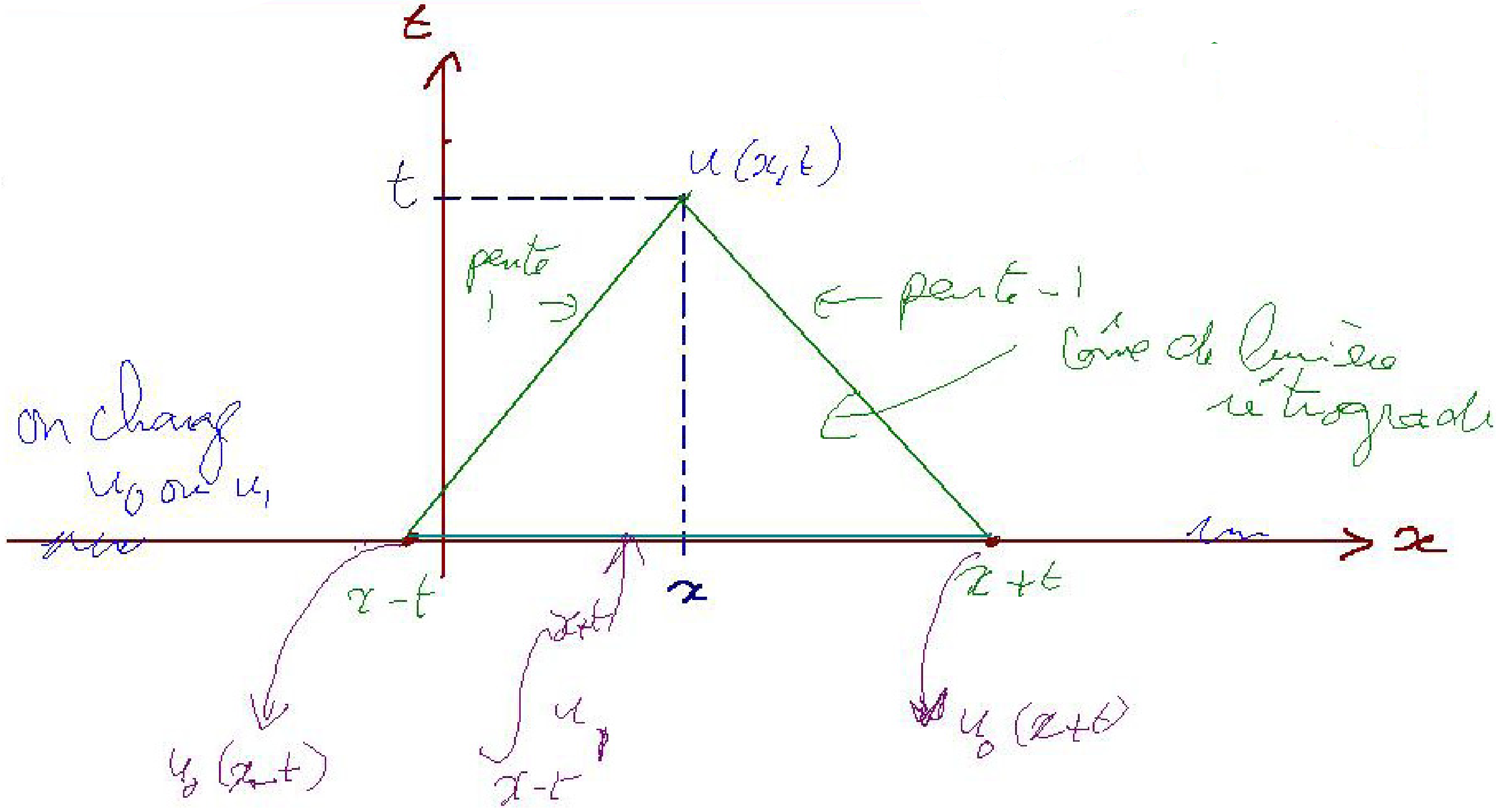
Rqs:

- soit x_0 dans R. Si l'on modifie la donnée initiale dans une zone bleue ciel loin de x_0, alors il existe un temps $t^*(x_0)$ tel que :
  -- si $t< t^*(x_0)$, alors $u(x,t)$ reste inchangé et indifférent à la modification;
  -- si $t>t^*(x-0)$, alors $u(x,t)$ change.

c'est LA PROPAGATION A VITESSE FINIE;

Vocabulaire :

le cône (ici triangle) de pentes 1 et -1 s'appelle un cône de lumière.



- La valeur de u(x,t) ne dépend que des valeurs de u dans le cône rétrograde de pentes 1 et -1 de sommet (x,t) (en fait, pour l'équation homogène, seule la base du cône compte).

Remarque : l'équation de la chaleur.

La propagation pour l'équation de la chaleur se fait à vitesse INFINIE. Exemple :

$$\Omega = \mathbb{R} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \varphi(x) = \text{Heaviside} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{1/2}}\, dy$$

Pour $x<0$, on a $\begin{cases} u(x,0)=0 \\ u(x,t)>0 & \text{si } t>0 \end{cases}$

Solution fondamentale

En formulation vectorielle (du premier ordre).

$$S(t) : H^1_{loc} \times L^2_{loc} \longrightarrow H^1_{loc} \times L^2_{loc}$$

$$(u_0, u_1) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1 \\ \frac{1}{2}\left(u_0'(x+t) - u_0'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(u_1(x+t) + u_1(x-t)\right) \end{pmatrix}$$

Exercice:

Vérifier que S(t)(u_0, u_1) appartient bien à H^1_{loc} x L^2_{loc}, du moment que (u_0,u_1) est dans ce même espace.

Propriétés : (même preuve que pour la chaleur).

- S(t) est linéaire.
- élément neutre S(0) = Identité.
- Relation de Chasles S(t_2) o S(t_1) = S(t_1+t_2) = S(t_1) o S(t_2) (Commutativité), pour tous t_1 et t_2 réels.
- Élément Symétrique S(t) o S(-t) = S(0) = Identité.

Conclusion :

$\{S(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe commutatif

- C'est un groupe car l'équation des ondes est réversible.
- La chaleur donne un semi-groupe, car la propagation de la chaleur est irréversible.

Section 3.3 : Équation avec second membre.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \; ; \; (u_0, u_1) \qquad u_t = v. \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \end{cases}$$

Formulation de Duhamel

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}(t) = S(t)\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + \int_0^t S(t-t')\begin{pmatrix} 0 \\ f(t') \end{pmatrix} dt'$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(z)\,dz$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-t+t'}^{x+t-t'} f(z,t')\,dz\,dt'$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(u_0'(x+t) - u_0'(x-t)\right) + \frac{1}{2}\left(u_1(x+t) + u_1(x-t)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(f(x+t-t', t') + f(x-t+t', t')\right) dt'$$

Section 3.4 : Équation semilinéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = |u|^{p-1}u \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1 \end{cases} \qquad p>1.$$

Proposition (admise) :

Si $(u_0,u_1) \in H^1_{loc} \times L^2_{loc}$, alors $\forall R>0$, $\exists\, T_0(R)>0$ t.q

l'équation admet une et une seule solution dans C([0, T_0 (R)], H^1 x L^2 [-R, R]).

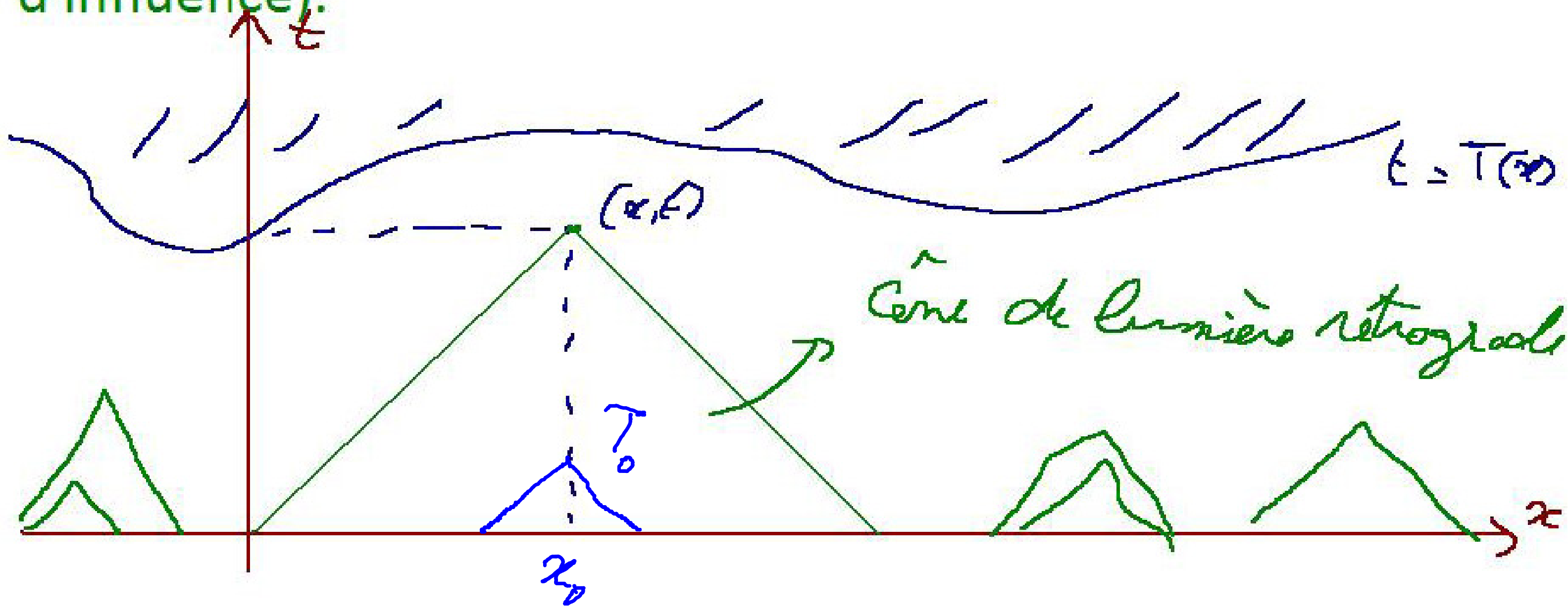
Rq:

Grâce à la vitesse de propagation finie, on s'intéresse à la résolution de la solution juste sur un compact.

Rq:

Il s'agit d'une solution locale en temps.

Section 3.5 : Domaine de définition (ou domaine maximal d'influence).



La solution maximale est soit :

- définie pour tout t positif pour tout x réel (solution gloable, par exemple u=0).

- soit la solution existe sous le graphe d'une fonction x ----> T(x), au delà duquel on ne peut prolonger la solution.

Régularité du graphe

- Comme pour tout (x,t) sous le graphe, le cône rétrograde de sommet (x,t) tout entier est situé sous le graphe, alors x- - - > T(x) est Lipschitzienne de constante = 1 (exercice).

- Récemment, on a pu démontrer que x---> T(x) est C^1 sauf en un ensemble de points dont le nombre est fini sur tout compact.

3.6 Transformation auto-similaire

Exercice 1 : On considère l'équation semilinéaire des ondes suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + |u|^{p-1} u$$

définie pour tout (x,t) dans R^N x [0,T). Trouver le réel alpha tel que si w(y,s) est défini par

$$w(y,s) = (T-t)^{\alpha} u(x,t) \qquad y = \frac{x - x_0}{T-t}, \quad s = -\log(T-t),$$

alors, w satisfait une équation autonome (cad dont les coefficients ne dépendent pas du temps s).

Indication : commencez par le cas N=1.

Corrigé : • $u(x,t) = w(y,s)\,(T-t)^{-\alpha}$

• $|u|^{p-1} u(x,t) = |w|^{p-1} w(y,s)\,(T-t)^{-\alpha p}$

• $u(x,t) = w(y,s)\,(T-t)^{-\alpha}$

$(N=1)$ $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (T-t)^{-\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial y}(y,s)\cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{=\frac{1}{T-t}} + \frac{\partial w}{\partial s} \times \underbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}_{=0}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (T-t)^{-\alpha-1} \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}(y,s)}_{v}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (T-t)^{-\alpha-1}\,\frac{\partial w}{\partial y}(y,s)\times\frac{1}{T-t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (T-t)^{-\alpha-1}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(y,s)\cdot\frac{1}{T-t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (T-t)^{-\alpha-2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

- $u(x,t) = (T-t)^{-\alpha}\, w(y,s)$
- $u = (T-t)^{-\alpha}\, w \qquad (N=1)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\alpha(T-t)^{-\alpha-1}\times(-1)\,w$$

$$+\,(T-t)^{-\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{x}{(T-t)^2} + \frac{\partial w}{\partial s}\,\frac{1}{T-t}\right)$$

$$\frac{y}{T-t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (T-t)^{-\alpha-1}\left(\alpha w + \underbrace{y\cdot\frac{\partial w}{\partial y}}_{G(y,s)} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial s}}_{H}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\alpha+1)(T-t)^{-\alpha-2}\left(\alpha w + y\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\right)$$

$$+ (T-t)^{-\alpha-1}\left[\alpha\frac{\partial w}{\partial y}\frac{y}{T-t} + \alpha\frac{\partial w}{\partial s}\cdot\frac{1}{T-t}\right.$$

$$+ \frac{\partial G}{\partial y}\frac{y}{T-t} + \frac{\partial G}{\partial s}\cdot\frac{1}{T-t}$$

$$\left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial s}\frac{y}{T-t} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\frac{1}{T-t}\right]$$

$$G(y,s) = y\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = y\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial s}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$= (T-t)^{-\alpha-2}\left[\alpha(\alpha+1)w + (\alpha+1)y\frac{\partial w}{\partial y} + (\alpha+1)\frac{\partial w}{\partial s}\right.$$

$$+ \alpha y\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\left. + y\frac{\partial w}{\partial y} + y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + y\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial s} + y\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right]$$

$$= (T-t)^{-\alpha-2}\left[\alpha(\alpha+1)w + 2(\alpha+1)y\frac{\partial w}{\partial y} + (2\alpha+1)\frac{\partial w}{\partial s} + y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.$$

$$\left. + 2y\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right]$$

BILAN:
=====
Les 3 termes de notre équation en u sont chacun converti en une somme de termes indépendants de s, multipliés par (T-t) à une certaine puissance. Pour faire disparaître ces puissances de (T-t), il suffit d'égaler l'exposant :

$$-\alpha - 2 = -\alpha p \Rightarrow \alpha + 2 = \alpha p$$

$$2(\alpha+1) = 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right) \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{2}{p-1}$$

$$\alpha(\alpha+1)w + 2(\alpha+1)y\frac{\partial w}{\partial y} + (2\alpha+1)\frac{\partial w}{\partial s} + y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + |w|^{p-1} w$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(1-y^2) - 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right)y\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}w + |w|^{p-1}w - \frac{p+3}{p-1}\frac{\partial w}{\partial s} - 2y\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial s}}$$

OUF!

Exercice : cherchons une forme divergence englobant les dérivées seconde et première dans :

$$(1-y^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2(p+1)}{p-1}y\frac{\partial w}{\partial y} \doteq P(y).$$

cherchons $A(y)$ t.q. $\quad P(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(A(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right)$

$$P(y) = A(y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A'(y)\frac{\partial w}{\partial y}$$

On identifie, et cela donne : $\quad A(y) = 1-y^2$

$$A'(y) = -\frac{2(p+1)}{p-1}y$$

impossible car $\quad \frac{2(p+1)}{p-1} > 2,$

cherchons $A(y)$ et $B(y)$ t.q

$$P(y) = B(y)\frac{\partial}{\partial y}\left(A(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$= B(y)\left(A(y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A'(y)\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

On identifie, et cela donne : $\quad \begin{cases} B(y)A(y) = 1-y^2 \\ B(y)A'(y) = -\frac{2(p+1)}{p-1}y \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{-\frac{2(p+1)}{p-1}y}{1-y^2} \Rightarrow \log A(y) = +\frac{(p+1)}{p-1}\log(1-y^2) + \beta$$

$$\Rightarrow \quad A(y) = e^{\beta}(1-y^2)^{\frac{p+1}{p-1}}$$

$$B(y) = \frac{1-y^2}{A(y)} = e^{-\beta}(1-y^2)^{-\frac{2}{p-1}}$$

on prend $\beta = 0$, car c'est pareil.

cqfd.

Remarque et définition : On vient de définir la transormation AUTO-SIMILAIRE pour l'équation semilinéaire des ondes.

Plus généralement, si a est dans R et T = T(a), alors on définit w_a(y,s) par :

$$w_a(y,s) = (\underset{\substack{\uparrow \\ T(a)}}{T}-t)^{\frac{2}{p-1}} u(x,t), \quad y = \frac{x-a}{T-t}, \quad s = -\log(T-t).$$

Avec cette définition, on a que w_a est définie
pour tous y dans (-1,1) et s dans [-log T(a), +infini). et satisfait l'équation donnée en bas de la page précédente.

Rq : la solution de $v'' = v^p$ qui explose en T a comme équivalent $\kappa_0(p)(T-t)^{-\frac{2}{p-1}}$ qd $t \to T$.

LA FORME DIVERGENCE :

Soit $\rho(y) = (1-y^2)^{\frac{2}{p-1}}$. Alors

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(1-y^2) - \frac{2(p+1)}{p-1}\, y \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho(1-y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right)}$$

Preuve de cette ligne : en exercice.

3.7 Fonctionnelle de Lyapunov

Écrivons l'équation avec cette forme : $\forall y \in (-1,1), \forall s \geq -\log T(a)$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho(1-y^2)\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\, w + |w|^{p-1} w - \frac{p+3}{p-1}\frac{\partial w}{\partial s} - 2y\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial s}\right) \times \frac{\partial w}{\partial s}\rho$$

Exercice 2 (corrigé) : Trouver une fonctionnelle de Lyapunov pour w(y,s).

Méthode : comme pour la chaleur semilinéaire, on multiplie l'équation par la dérivée en temps, et en intègre en espace... par rapport à la mesure rho(y) dy, sur (-1,1).

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \rho = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \rho \, dy = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \rho \, dy$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial s} f \rho \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial s} (f^2) \rho \, dy \qquad f = \frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\cancel{\rho}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho (1-y^2) \frac{\partial w}{\partial y}\right) \frac{\partial w}{\partial s} \cancel{\rho} \, dy \qquad \text{I.P.P}$$

$$= -\int_{-1}^{1} \rho (1-y^2) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial s} \, dy + \underbrace{\left[\rho (1-y^2) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial s}\right]_{-1}^{1}}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \rho (1-y^2) \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_{-1}^{1} \rho (1-y^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dy$$

$$\int_{-1}^{1} \left(-\frac{2(p+1)}{(p-1)^2} w + |w|^{p-1} w \right) \frac{\partial w}{\partial s} \rho \, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-\frac{(p+1)}{(p-1)^2} \frac{\partial}{\partial s} (w^2) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{|w|^{p+1}}{p+1} \right) \right) \rho \, dy$$

$$= \frac{d}{ds}\int_{-1}^{1}\left(-\frac{(p+1)}{(p-1)^2}w^2+\frac{|w|^{p+1}}{p+1}\right)\rho\,dy$$

$$-\frac{(p+3)}{p-1}\int\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\rho$$

$$-2\int_{-1}^{1} y\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}\rho\,dy = -\int_{-1}^{1} y\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\right]\rho\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\frac{\partial}{\partial y}(y\rho) + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 y\rho\right]_{-1}^{1}}_{=0}$$

$$\rho(y)=(1-y^2)^{\frac{2}{p-1}}$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\left(\rho+\frac{4}{p-1}y^2\frac{\rho}{1-y^2}\right)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{2}{p-1}(1-y^2)^{\frac{2}{p-1}-1}\times(-2y)$$

Regroupons les 2 derniers termes :

$$-\left(\frac{p+3}{p-1}\right)\int\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\rho - 2\int y\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}\rho$$

$$=\int\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\rho\left[\underbrace{1-\frac{p+3}{p-1}}_{=-\frac{4}{p-1}}\right]+\frac{4}{p-1}\int y^2\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2\frac{\rho}{1-y^2}$$

$$= \frac{4}{p-1}\int \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \rho \left(-1 + \frac{y^2}{1-y^2}\right) \qquad \frac{y^2-1+y^2}{1-y^2}$$

$$= -\frac{4}{p-1}\int \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \frac{\rho}{1-y^2}$$

Bilan : ·

PROPOSITION : Pour tout s $\geq$ - log T(x_0),

$$\frac{d}{ds}\underbrace{\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2(1-y^2) + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}w^2 - \frac{|w|^{p+1}}{p+1}\right\}\rho(y)\,dy}_{\text{DÉFINITION } E(w(s)).} = -\frac{4}{p-1}\int \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 \frac{\rho}{1-y^2}\,dy$$

Corollaire : Pour tout s > s_0= - log T(x_0), on a

E(w(s)) $\leq$ E(w(s_0)) avec w = w_{x_0} .

.

3.8 critère d'explosion et minoration de l'énergie

.

Proposition : Si W est solution de (eqw) satisfait pour un certain S_0 E(W(S_0))<0, alors W ne peut être définie pour tout (y,s) dans (- 1,1) x [S_0, + infini).

Corollaire immédiat : Si w=w_{x_0} construit à partir d'un u solution de (equ), alors

Pour tout s $\geq$ - log T(x_0), on a E(w(s))$\geq$0

Preuve du corollaire en admttant la proposition.

Par définition, w_{x_0} est définie au moins pour tout (y,s) dans

$(-1,1) \times [-\log T(x_0), +\infty)$.

Rappel

$w_{x_0}(y,s) = (T(x_0)-t)^{2/(p-1)}u(x,t)$ avec

$y=(x-x_0)/(T(x_0)-t)$ et $s = -\log(T(x_0)-t)$.

Comme le domaine de définition de u a une sympathique propriété qui découle de la propagation en temps fini, à savoir que pour tout point dans le domaine, par exemple $(x_0, T(x_0))$, le cône de lumière rétrograde de sommet ce point est tout entier dans le domaine, on en déduit que u est définie dans le cône dont l'équation est

$0 \leq t \leq T(x_0)-|x-x_0|$

et ceci donne (y,s) dans $(-1,1) \times [-\log T(x_0), +\infty)$.

Maintenant, par l'absurde, si pour $s_1 \geq -\log T(x_0)$, on a

$E(w_{x_0}(s_1)) < 0$, alors par la proposition, on aura que $w_{x_0}(y,s)$ ne peut être définie pour tout (y,s) dans $(-1,1) \times [s_1, +\infty)$. Absurde.

Preuve de la proposition : On procède par l'absurde. On suppose qu'on a W solution de (eqw) définie pour tout y dans $(-1,1)$ et $s=S_0$ donné avec

$E(W(S_0))<0$. On suppose par l'absurde que $W(y,s)$ est définie pour tout (y,s) dans $(-1,1) \times [S_0,+\infty)$.

J'introduis $u(x,t)$ définie par

$u(x,t) = (1-t)^{-2/(p-1)}w(y,s)$ avec

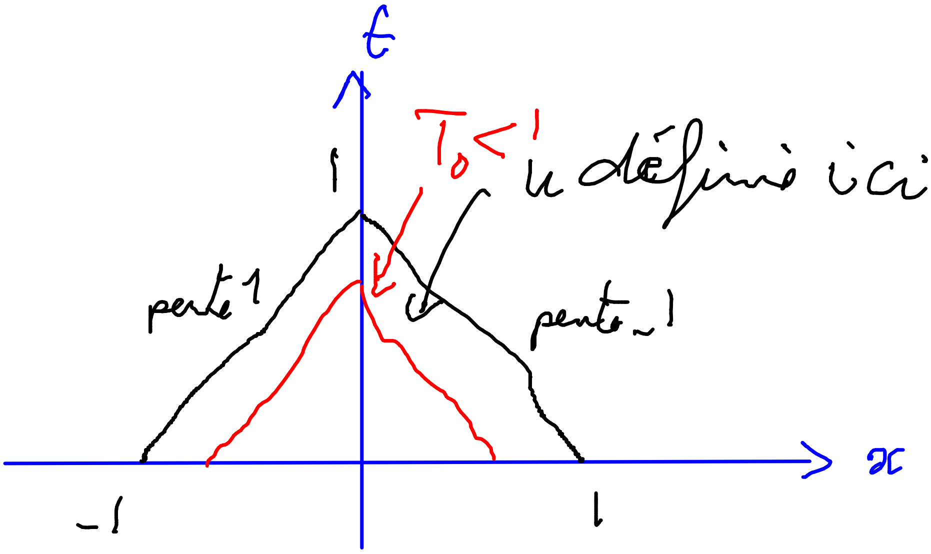
$y=x/(1-t)$ et $s = -\log(1-t)+S_0$.

Alors u satisfait l'équation d'origine, que j'ai appelé (equ):

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u + |u|^{p-1}u.$$

Comme w_{x_0} existe pour tout (y,s) dans

$(-1,1) \times [-\log T(x_0), +\infty)$, alors u est définie (au moins) pour tout (x,t) dans le cône de lumière de sommet $(0,1)$.



u n'explose pas dans le cône rouge de sommet $(0,T_0)$.
Alors je définis

$w_{T_0}(y',s') = (T_0-t)^{2/(p-1)}u(x,t)$ avec

$y' = x/(T_0-t)$ et $s = -\log(T_0-t) + S_0$.

Remaque $w_1 = W$.

Si $T_0<1$, on voit que w tend vers 0 quand s' tend vers l'infini. En effet, il existe M_{T_0} tel que

pour tout (x,t) dans le cône rouge,

$\|u(t)\|_{H^1(I_t)} + \|u(t)\|_{L^{p+1}(I_t)} + \|\partial_t u\|_{L^2(I_t)} < M_{T_0}$

car u n'explose pas dans le cône rouge, avec
$I_t = (t-T_0, T_0-t)$ est la section du cône rouge à l'instant t.

Par définition de w_{T_0}, on voit que w tend vers 0 lorsque s' tend vers l'infini, en norme H^1, L^{p+1}, et aussi pour $\partial_s w$ en norme L^2, sur l'intervalle $(-1,1)$.

Ainsi, $E(w_{T_0}(s')) \to 0$ lorsque $s' \to \infty$.

Ceci, pour tout T_0 dans $(0,1)$.

Maintenant, on rappelle que $E(W(S_0)) < 0$.

Comme w_{T_0} tend vers $w_1 = W$ lorsque T_0 tend vers 1,

donc $E(w_{T_0}(S_0))$ tend vers $E(W(S_0))$ aussi,

alors il existe un $\delta_0 > 0$ petit tel que

si T_0 est dans $(1-\delta_0, 1)$, alors $E(w_{T_0}(S_0)) < 0$ aussi.

Comme $E(w_{T_0}(s))$ est décroissante en s, alors elle a une limite dans l dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, avec

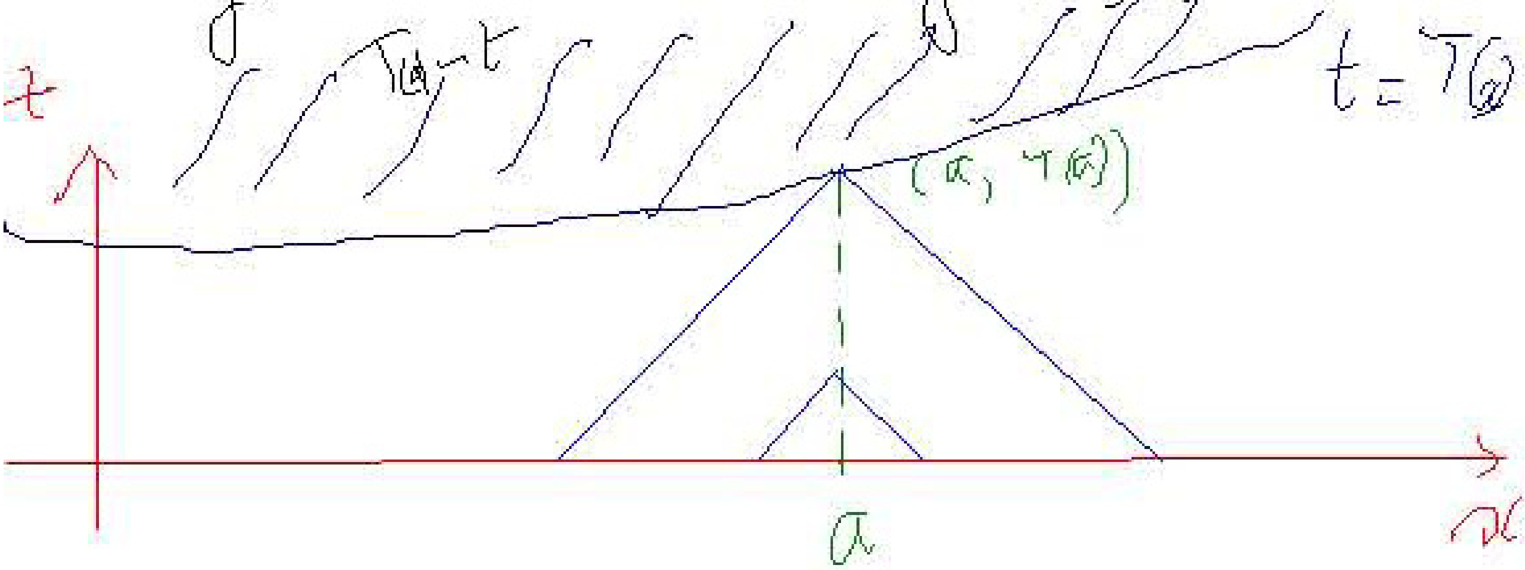
$l \le E(w_{T_0}(S_0)) < 0$. Contradiction.

Donc la proposition est vraie.

On rappelle la transformation auto-similaire pour les ondes

$$w_a(y,s) = (T(a)-t)^{\frac{2}{p-1}}\, u(x,t)$$

$$y = \frac{x-a}{T(a)-t}, \quad s = -\log(T(a)-t)$$



Rq

Si l'on s'intéresse au comportement de u(x,t) au voisinage de (a,T(a)), avec (x,t) restant dans le cône de lumière rétrograde, alors y est dans (-1,1) et s dans [-log T(a), + infini).

Le domaine de w_a est un cylindre infini.

Exercice 2bis:

On considère les deux équations des ondes suivantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(u)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(u) - \alpha \frac{\partial u}{\partial t}$$

avec $u(x,0) = u_0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1$

et $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Discuter l'existence d'une énergie conservée ou dissipée pour ces deux équations.

Indication : on travaille sur R^N tout entier.

INFO : f est globalement Lipschitzienne et alpha >0. f(0)=0.

Autre info : (u, u_t) reste dans H^1 x L^2(R^N).

3.9 Taux d'explosion

On revient à l'équation d'origine $\partial_t^2 u = \Delta u + |u|^{p-1} u$

avec donnée initiale (u_0, u_1) dans H^ 1_{loc,u} X L^2_{loc,u}(R^N)

avec $$\|v\|^2_{L^2_{loc,u}} = \sup_{a\in\mathbb{R}^N} \int_{|x-a|<1} v^2(x)\,dx.$$

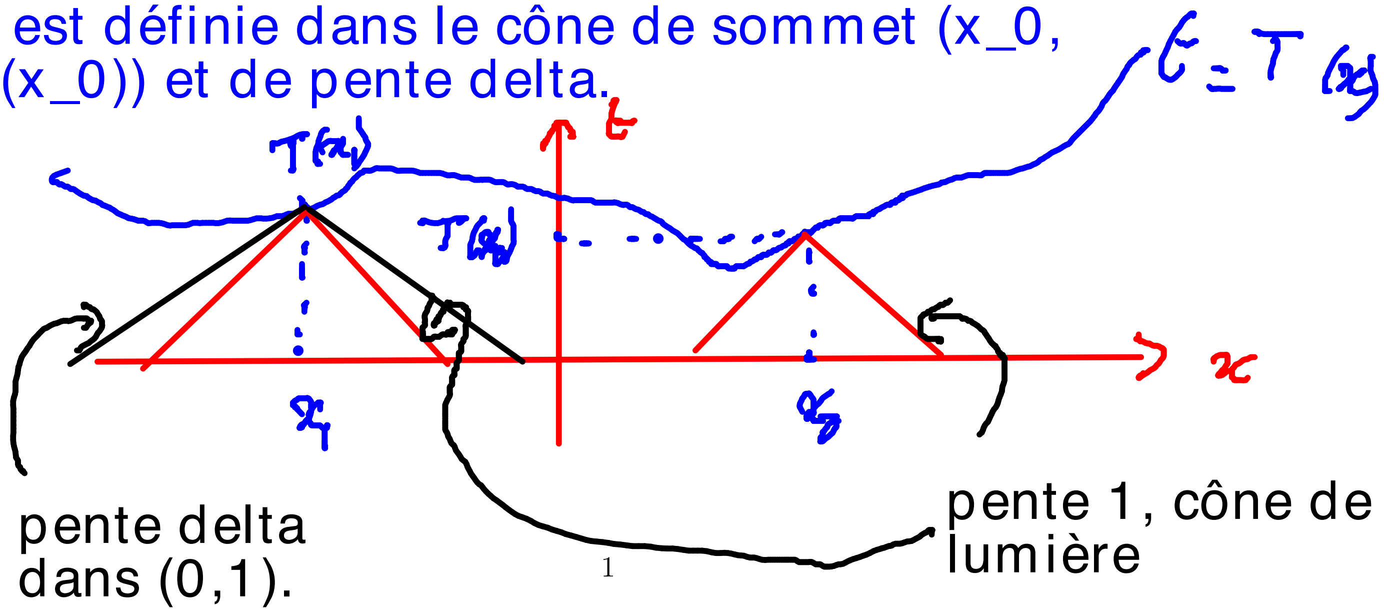
Remarque : L'utilité de l'espace "uniforme" réside dans le fait (admis ici) que

pour tout x dans R^N, T(x) $\geq \bar{T}$

pour un certain $\bar{T} > 0$.

Définition : On dit que x est un point non- caractéristique, ssi il existe delta dans (0,1) tel que

u est définie dans le cône de sommet (x_0, T(x_0)) et de pente delta.



Remarque : D'après mon dessin, x1 est NON- CARACTERISTIQUE, mais x0 est CARACTERISTIQUE.

Théorème : Si x_0 est NON- CARACTERISTIQUE, alors

pour tout s $\geq$ - log T(x_0), on a

||w_{x_0}(s)||_{H^1(B)}+ ||∂_sw_{x_0}(s)||_{L^2(B)} $\leq M$

avec M= M(u_0,u_1, T(x_0), delta(x_0)).

Corollaire : On a

$$(T(x_0)-t)^{\frac{2}{p-1}} \int_{|x-x_0|<T(x_0)-t} u^2$$

$$+ (T(x_0)-t)^{1+\frac{2}{p-1}} \int_{|x-x_0|<T(x_0)-t} |\nabla u|^2 + |\partial_t u|^2 \leq M.$$

$$\forall t \in [0, T(x_0))$$

Remarque : La solution n'explose pas plus violemment que la solution de u''= u^p.

LA PREUVE DU THEOREME : Pour simplifier, je prends x_0=0 et T(x_0) = $\bar{T}$ = min T(x).

3.9.2 Estimations locales d'énergie

3.9.2.1 : Rappel : la fonctionnelle de Lyapunov

Notation : Soient a et T avec $\frac{\bar{T}}{2} \leq T \leq T(a)$.

On notera w= w_{a,T}.

Lemme 1 : Pour tout s_1 et s_2, on a

E(w(s_1)) - E(w(s_2)) = - 2 alpha $\displaystyle\int_{s_2}^{s_1}\int_{|y|<1} (\partial_s w)^2(y,s)\,\frac{\rho(y)}{1-|y|^2}\,dy\,ds$

avec $\alpha = \frac{2}{p-1} - \frac{N-1}{2} > 0$ car $p < 1 + \frac{4}{N-1}$.

et $\rho(y) = (1-|y|^2)^\alpha$

Preuve : Comme en dimension 1, mais plus compliqué techniquement. Attention : autre def.

$$E(w) = \int_{B(0,1)} \frac{1}{2}(\partial_s w)^2 + \frac{|\nabla w|^2}{2} - \frac{(y.\nabla w)^2}{2} + \frac{(p+1)}{(p-1)^2} w^2 - \frac{|w|^{p+1}}{p+1} \,\rho\, dy.$$

Lemme 2 : Critère d'explosion : Si W est une solution de (eqw) telle que E(W(S_0))< 0, alors W ne peut exister pour tout (y,s) dans B(0,1) X [S_0, $+\infty$).

Preuve : Comme en dimension 1.

Remarque : L'exposant p > 1 sera pris SOUS- CONFORME :

$$\underbrace{1 < p < 1 + \frac{4}{N-1}}_{< 1 + \frac{4}{N-2} \,:\, \text{Sobolev}} \quad \text{si } N \geq 2$$

Corollaire (Bornes sur E)

Pour tout s $\geq$ - log T, pour tout s_2 $\geq$ s_1 $\geq$ - log T, on a

$$0 \leq E(w(s)) \leq E(w(-\log T)) \leq C_0$$

$$\int_{s_1}^{s_2}\int_{|y|<1} (\partial_s w)^2 \frac{\rho(y)}{1-|y|^2}\,dy\,ds \leq C_0.$$

3.9.2.2 Estimates spatio- temporelles de type Sobolev

Idée 1 : On intègre l'énergie en temps

$$\int_{s_1}^{s_2} E(w(s))\,ds = \int_{s_1}^{s_2}\int_{|y|<1} \frac{1}{2}(\partial_s w)^2\rho + \frac{1}{2}\iint \left[|\nabla w|^2 - (y.\nabla w)^2\right]\rho$$

$$+ \frac{(p+1)}{(p-1)^2}\iint w^2\rho - \frac{1}{p+1}\iint |w|^{p+1}\rho$$

Idée 2 : On multiplie l'équation par w rho et on intègre. Rappel de l'équation :

$$\left(\partial_s^2 w = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\left(\rho\nabla w - \rho(y.\nabla w)y\right) - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}w + |w|^{p-1}w\right.$$

$$\left. - \frac{p+3}{p-1}\partial_s w - 2y.\nabla\partial_s w\right) w\rho$$

Il y a plusieurs termes à intégrer par parties.

$$\bullet \iint \cancel{\tfrac{1}{\rho}}\, \mathrm{div}\big(\rho \nabla w - \rho (y\cdot\nabla w) y\big)\, \cancel{\rho}\, w \, dy\, ds$$

$$= -\iint \left[|\nabla w|^2 - (y\cdot\nabla w)^2 \right] \rho$$

$$\bullet \iint \left(-\frac{2(p+1)}{(p-1)^2} w + |w|^{p-1} w \right) \rho w = \iint \left(-\frac{2(p+1)}{(p-1)^2} w^2 + |w|^{p+1} \right) \rho$$

$$\bullet \iint \partial_s^2 w \, w \rho \underset{\text{IPP en } s}{=} -\iint (\partial_s w)^2 \rho + \left[\int \partial_s w \, w \rho \right]_{s_1}^{s_2}$$

$$\bullet \iint -\frac{p+3}{p-1} \partial_s w \, w \rho = -\frac{p+3}{2(p-1)} \left[\int w^2 \rho \right]_{s_1}^{s_2}$$

$$\bullet -2 \iint y\cdot\nabla(\partial_s w)\, w \rho \underset{\text{IPP en } y}{=} 2 \iint \partial_s w \, \mathrm{div}(w \rho y)$$

$$= 2 \iint \partial_s w \, \nabla w \rho \cdot y + 2 \iint \partial_s w \, w \nabla\rho \cdot y$$

$$+ 2 \iint \partial_s w \, w \rho N = N \left[\int w^2 \rho \right]_{s_1}^{s_2}$$

Bilan :

$$\left[\int_B \left(\partial_s w \, w + \left(\frac{p+3}{2(p-1)} - N \right) w^2 \right) \rho \right]_{s_1}^{s_2}$$

$$+\iint \left(-(\partial_s w)^2 - 2\partial_s w\, y\cdot\nabla w + |\nabla w|^2 - (y\cdot\nabla w)^2\right)\rho$$

$$-2\iint \partial_s w\, w\, y\cdot\nabla\rho = \iint \left(|w|^{p+1} - \frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\, w^2\right)\rho$$

Idée : Comme pour la chaleur, on élimine les termes L^2 du gradient entre les deux identités, et, on en profite pour exprimer la norme L^{p+1}_rho de w, qui, au passage, est le seul terme négatif de l'énergie. Ainsi, si on le majore, on aura majoré tous les autres termes, puisque l'énergie est bornée.

$$\frac{(p-1)^2}{2(p+1)}\iint |w|^{p+1}\rho = \int_{s_1}^{s_2} E(w(s))\,ds$$

$$+\iint \left(-(\partial_s w)^2\rho - \partial_s w\, y\cdot\nabla w\,\rho - \partial_s w\, w\, y\cdot\nabla\rho\right) \qquad (11)(11$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int \left(w\,\partial_s w + \left(\frac{p+3}{2(p-1)} - N\right) w^2\right)\rho\right]_{s_1}^{s_2}$$

On va montrer la proposition suivante :

Prop 2.4 (contrôle de la norme L^{p+1} en espace en temps) Pour tout a dans R^N et s $\geq$ - log T + 1, on a

$$\int_s^{s+1}\int_B |w|^{p+1}\rho \leq C(C_0), \text{ avec } w = w_{a,T}$$

Étape 1 : Contrôle de la norme H^1 en fonction de la norme L^{p+1}.

Soit s $\geq$ - log T + 1, et s_1 dans [s-1,s], et s_2 dans [s+1,s+2]. Ainsi, [s,s+1] est inclus dans [s_1, s_2], et $1 \leq$ s_2 - s_1 ≤ 3.

Pourquoi tout ca ? En fait, on va choisir s_i=s_i(s) de facon à ce que les termes de bord (en temps, i.e. en s_1 et en s_2) soient contrôlés. À la fin, si on contrôle l'intégrale sur [s_1(s),s_2(s)] qui contient bien l'intervalle [s,s+1], alors, on aura gagné.

Remarque : la méthode : Partant de (11), on essaye de majorer chaque terme du second membre par

$$\varepsilon \iint |w|^{p+1}\rho + C_\varepsilon .$$

Prenant à la fin epsilon petit, me donnera la conclusion.

Lemme 2.5

$$\int_{s_1}^{s_2}\int |\nabla w|^2(1-|y|^2)\rho \leq C + \frac{2}{p+1}\iint |w|^{p+1}\rho$$

$$\sup_{s_1\leq s\leq s_2}\int w^2\rho \leq C\varepsilon \iint |w|^{p+1}\rho + \frac{C}{\varepsilon}.$$

Preuve : La première estimation vient de l'énergie. En effet, par Cauchy-Schwarz, on écrit :

$$\int_{s_1}^{s_2}\int |\nabla w|^2(1-|y|^2)\rho \leq \int_{s_1}^{s_2}\int [|\nabla w|^2-(y\cdot\nabla w)^2]\rho$$

$$\leq 2E(w) + \frac{2}{p+1}\iint |w|^{p+1}\rho.$$

Pour la 2eme, un petit Holder :

$$\iint w^2 \le \left(\iiint w^{p+1}\rho\right)^{\frac{2}{p+1}}\left(\iiint \rho\right)^{\frac{p-1}{p+1}} \le \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon \iint |w|^{p+1}\rho$$

Par le lemme de la moyenne

$$\int w^2(y,s_3)\rho = \frac{1}{s_2-s_1}\int_{s_1}^{s_2}\int w^2\rho \le \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon\iint |w|^{p+1}\rho$$

Maintenant, si s est dans [s_1,s_2], alors

$$\int w(y,s)^2\rho = \int w(y,s_3)^2\rho + \int_{s_3}^{s}\frac{d}{ds}\int w^2(y,s')\rho\,dy\,ds'$$

$$\le \int w(y,s_3)^2\rho + 2\int_{s_1}^{s_2}\int |\partial_s w|\,|w|\rho\,dy\,ds$$

$$\le \int w(y,s_3)^2\rho + 2\underbrace{\left(\iint |\partial_s w|^2\rho\right)^{1/2}}_{\le \iint \frac{\partial_s w^2\rho}{1-|y|^2}}\left(\iint w^2\rho\right)^{1/2}$$

$$\le \varepsilon\iint |w|^{p+1}\rho + \frac{C}{\varepsilon}.$$

Step 2 : contrôle des autres normes à droite de l'égalité avec w^{p+1}.

Mon but, c'est de prouver que

$$\int_{s_1}^{s_2}\int |w|^{p+1}\rho \leq C + C\int_B (\partial_s w(y,s_1))^2\rho + \int_B (\partial_s w)^2(y,s_2)\rho$$

(i) premier terme à contôler :

$$\left|\iint \zeta w y\cdot\nabla w\,\rho\right| \leq \left(\iint (\partial_s w)^2 \frac{\rho}{1-y^2}\right)^{1/2}\left(\iint |\nabla w|^2\rho(1-|y|^2)\right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon\iint |w|^{p+1}\rho$$

(ii) 2 eme terme

$\left|\iint \zeta w w\, y\cdot\nabla\rho\,dy\,ds\right|$. Comme $|y\cdot\nabla\rho| \leq \frac{c\rho}{1-|y|^2}$

on utilise Cauchy-Schwarz :

$$\leq \left(\iint (\partial_s w)^2\frac{\rho}{1-|y|^2}\right)^{1/2}\left(\iint w^2\frac{\rho}{1-|y|^2}\right)^{1/2}$$

et on utilise une identité de type Hardy- Sobolev :

$$\int_B \frac{w^2\rho}{1-|y|^2} \leq C\int w^2\rho + C\int |\nabla w|^2(1-|y|^2)\rho$$

(admis)

on termine

$$\leq \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon\iint \frac{w^2\rho}{1-|y|^2} \leq \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon\iint |w|^{p+1}\rho.$$

(iii) 3eme terme :

$$\left|\int_B \partial_s w\, w\rho\right| \le \int (\partial_s w)^2\rho + \int w^2\rho$$

$$\le \int (\partial_s w)^2 \rho + \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon \iint |w|^{p+1}\rho$$

$s = s_1$

ou $s = s_2$

<u>Bilan</u>

$$\iint |w|^{p+1}\rho \le \frac{C}{\varepsilon} + \varepsilon \iint |w|^{p+1}\rho + C\int \partial_s w(y,s_1)^2\rho$$

$$+ C\int \partial_s w(y,s_2)^2\rho.$$

Step 3 : la conclusion de la preuve sur la majoration de la norme L^{p+1}

Comme $\int_{s-1}^{s}\int (\partial_s w)^2 \frac{\rho}{1-|y|^2} \le C_0$, par la formule de la moyenne,

il existe $s_1 \in [s-1, s]$, $\int \partial_s w^2(y,s_1) \frac{\rho}{1-|y|^2} = \frac{1}{1}\int_{s-1}^{s}\int (\partial_s w)^2 \frac{\rho}{1-|y|^2}$

$s_1 = s_1(s)$ $\qquad \le C_0$

$s_2 = s_2(s)$

idem : $\exists\, s_2 \in [s+1, s+2]$, $\int (\partial_s w)^2(y,s_2)\frac{\rho}{1-|y|^2} \le C_0$

Conclusion $\int_{s_1}^{s_2}\int |w|^{p+1}\rho \le C(C_0)$

Comme $[s, s+1] \subset [s_1(s), s_2(s)]$, alors

$$\int_s^{s+1}\int_B |w|^{p+1}\rho \leq C(C_0), \forall s \geq -\log T + 1.$$

Par ce qui précède

$$\int |w|^2\rho + \int\int |\nabla w|^2 (1-|y|^2)\rho \leq C \int\int |w|^{p+1}\rho + C$$

$$\leq C$$

$$\int\int \frac{(\partial_s w)^2 \rho}{1-|y|^2} \leq C$$

$\therefore$

Si je restreint l'intervalle d'intégration à $|y|<1/2$, alors, j'enlève les poids.

PROPOSITION : $\forall s \geq -\log T + 1$

(i) $$\int w^2(y,s)\rho + \int\int_s^{s+1} \frac{(\partial_s w)^2 \rho}{1-|y|^2} + \int\int |\nabla w|^2 (1-|y|^2)\rho + \int_s^{s+1}\int |w|^{p+1}\rho \leq C(C_0)$$

(ii) $$\int_{B_{1/2}} w^2(y,s) + \int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} \left((\partial_s w)^2 + |\nabla w|^2 + |w|^{p+1}\right) \leq C(C_0)$$

Partie 3 de la preuve : Contrôle de la norme H^1 de la solution

Step 1 : contrôle de la norme L^r

Proposition : Pour tout s $\geq$ - log T + 1 et a dans R^N,

$$\int_B |w_a(y,s)|^{\frac{p+3}{2}} dy \leq C, \quad \text{si } N \geq 2$$

$$\int_{-1}^{1} |w_a(y,s)|^{p+1} dy \leq C, \quad \text{si } N = 1.$$

Preuve : On travaille d'abord sur la boule de rayon 1/2.

Comme on a $\int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} |w|^{p+1} dy\, ds \leq C$, alors $\exists \tau(s) \in [s, s+1]$,

$$\int_{B_{1/2}} |w(y,\tau)|^{p+1} dy = \frac{1}{1} \int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} |w|^{p+1} dy\, ds \leq C$$

Par Hölder, on a

$$\forall r \in [2, p+1], \quad \int_{B_{1/2}} |w(y,\tau)|^r \leq C.$$

Maintenant

$$\int_{B_{1/2}} |w(y,s)|^r = \int_{B_{1/2}} |w(y,\tau)|^r + \int_\tau^s \frac{d}{ds}\int |w(y,s')|^r dy\, ds'$$

$$\leq C + r\int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} (\partial_s w)|w|^{r-1} \quad + \text{Cauchy Schwarz}$$

$$\leq C + r\int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} (\partial_s w)^2 + r\int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} |w|^{2(r-1)}.$$

Si $N \geq 2$, je prends r t.q. $2(r-1) = p+1$

$r = \frac{p+3}{2}$ et c'est fini

Si $N=1$, Comme $w \in H^1_{y,s}([s, s+1] \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$

alors $w \in L^q_{y,s}([s, s+1] \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, $\forall q < +\infty$

je prends $r = p+1$ et $q = 2(r-1) = 2p$.

et c'est fini.

La suite : Il faut passer à une estimation sur toute la boule.

Il y a un sésame :

$$\forall y \in \mathbb{R}^N \quad w_a(y + y_0, s) = w_{a+y_0e^{-s}}(y, s).$$

Par définition de w_a et w_b, $b = a + y_0 e^{-s}$.

$$\int_{|y-y_0|<1/2} |w_a(y,s)|^r dy = \int_{|z|<\frac{1}{2}} |w_{a+y_0e^{-s}}(z,s)|^r dz$$

Comme on peut recouvrir la boule unité un nombre fini de boules de rayon 1/2, nombre qui ne dépend que de N, on voit que l'estimation sur la boule de rayon 1/2 et POUR TOUT a, donne l'estimation sur la boule unité POUR TOUT a.

Step 2 : Contrôle de la norme L^2 du gradient

Proposition 3.2 : Pour tout s > - log T + 1, et pour tout a dans R^N, on a

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w_a|^2(y,s)\,ds \leq C.$$

Ingrédient essentiel de la preuve : L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, que l'on rappelle ici :

Lemme (Gagliardo-Nirenberg)

$$\int_B |w_a|^{p+1} \leq C + C\left(\int_B |\nabla w_a|^2\right)^{\beta} \quad \beta \in [0,1).$$

Preuve : Si N=1, alors ca découle du résultat précédent.
On suppose que N $\geq$ 2. Comme 1<p< 1 + 4/(N-1) alors p+1 <2* = 2N/(N-2) si N $\geq$ 3, sinon 2* = +infini, si N=2. On introduit q(N,p) à fixer plus tard, telle que

$$(p+3)/2 < p+1 \leq q \leq 2^*.$$

Par interpolation (Hölder), on écrit que

$$\int_B |w_a|^{p+1} \leq \left(\int_B |w_a|^{\frac{p+3}{2}}\right)^{1-\theta} \left(\int_B |w_a|^q\right)^{\theta} \leq C\left(\int_B |w_a|^q\right)^{\theta}$$

avec

$$\theta = \frac{p+1-\left(\frac{p+3}{2}\right)}{q-\frac{p+3}{2}} = \frac{p-1}{2q-(p+3)}.$$

Maintenant, on utilise l'injection de Sobolev :

$$\int_B |w_a|^{p+1} \leq C\left(\int_B |\nabla w_a|^2\right)^{\beta} + C\left(\int_B |w_a|^{\frac{p+3}{2}}\right)^{\frac{2\theta q}{p+3}}$$

avec $\beta(q) = \dfrac{q\,\theta}{2} = \dfrac{(p-1)q/4}{q-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}}$.

$$\leq C + C\left(\int_B |\nabla w_a|^2\right)^{\beta}.$$

Si $N \geq 3$, alors on prend $q = 2^*$.
Comme $p < 1 + 4/(N-1)$, alors

$$\beta = \frac{(p-1)2^*/4}{2^*-\frac{3}{2}-\frac{p}{2}} < \frac{2^*/(N-1)}{2^*-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{N-1}\right)} =$$

$$= \frac{2^*}{(N-1)(2^*-2)-2} = \frac{2^*}{(N-1)\left(\frac{2N}{N-2}-\frac{2(N-2)}{N-2}\right)-2}$$

$$= \frac{2^{\alpha}}{(N-1)\left(\frac{4}{N-2}\right)-2} = \frac{2^{\alpha}(N-2)}{4(N-1)-2(N-2)} = \frac{2N}{2N} = 1$$

Si N = 2, alors on prend q très grand, et l'on voit que

$$B(q) \to \frac{p-1}{4} < 1 \text{ car } 1 < p < 1 + \frac{4}{N-1} = 5$$

Ceci finit la preuve du lemma 3.3.

Preuve de la Proposition 3.2. On va démontrer, qu'il existe C= C(N,p,C_0), tel que

pour tout s $\geq$ - log T + 1, et pour tout a dans R^N, on a

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w_a|^2 \, dy \leq C.$$

Soit s quelconque plus grand que - log T + 1. On introduit a_0 = a_0 (s) tel que

$$\int_B |\nabla w_{a_0}|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy \geq \frac{1}{2} \sup_{a \in \mathbb{R}^N} \int |\nabla w_a|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy.$$

(i) Grâce à une technique de recouvrement, nous avons :

$$\int_B |\nabla w_{a_0(s)}(y,s)|^2 dy \leq C \int_B |\nabla w_{a_0(s)}(y,s)|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy.$$

En effet, comme on peut couvrir B avec k(N) boules de rayon 1/2, il suffit de montrer que

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w_{a_0}(y+y_0,s)|^2 dy \leq C \int_B |\nabla w_{a_0}(y,s)|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy$$

uniformément pour ly_0l<1. Grâce à une identité similaire sur w, on a que

$$\forall y \in \mathbb{R}^N, \quad \nabla w_{a_0}(y+y_0,s) = \nabla w_{a_0+y_0e^{-s}}(y,s).$$

Ainsi, comme 1-lyl^2 $\geq$ 3/4, du moment que lyl$\leq$1/2, il s'en suit que

$$\int_{B_{1/2}} |\nabla w_{a_0}(y+y_0,s)|^2 dy = \int_{B_{1/2}} |\nabla w_{a_0+y_0e^{-s}}(y,s)|^2 dy$$

$$\leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha+1} \int_B |\nabla w_{a_0+y_0e^{-s}}(y,s)|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy$$

$$\leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\alpha+1} \sup_{a\in\mathbb{R}^N} \int_B |\nabla w_a(y,s)|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy$$

$$\leq C \int_B |\nabla w_{a_0}(y,s)|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} dy.$$

ce qui donne l'identité en (i).

(ii) Jutilise la définition de la fonctionnelle de Lyapunov :

$$\int_B |\nabla w_{a_0}|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1}\, dy$$

$$\le \int_B \left\{ |\nabla w_{a_0}|^2 - (y\cdot\nabla w_{a_0})^2 \right\} \rho\, dy$$

$$= 2E(w_{a_0}) + 2\int_B \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_s w_{a_0})^2 - \frac{(p+1)}{(p-1)^2}(w_{a_0})^2 + \frac{|w_{a_0}|^{p+1}}{p+1} \right\} \rho\, dy$$

$$\le 2E(w_a) + \frac{2}{p+1}\int_B |w_{a_0}|^{p+1}\, dy.$$

Grâce à Gagliardo- Nirenberg, on écrit que

$$\int_B |\nabla w_{a_0}|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1}\, dy \le C + C\left(\int_B |\nabla w_{a_0}|^2\right)^{\beta} \text{ avec } \alpha \le \beta < 1.$$

Comme a_0 réalise un sup, alors il y a équivalence des normes L^2 du gradient avec et sans poids, alors :

$$\int_B |\nabla w_{a_0}|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1}\, dy \le C + C\left(\int_B |\nabla w_{a_0}|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1}\right)^{\beta}$$

donc $\int_B |\nabla w_{a_0}|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} \le C.$

Par la propriété de sup, on a

$\forall s \ge -\log T + 1,\ \forall a \in \mathbb{R}^N,\ \int_B |\nabla w_a|^2 (1-|y|^2)^{\alpha+1} \le C.$

Étape 3 : conclusion de la preuve du théorème :

(i) Contrôle uniforme de la norme H^1(B) de w_a(s).

En couvrant la boule unité par k(N) boules de rayon 1/2, on déduit tout de suite que :

$$\forall s \geq -\log T,\ \forall a \in \mathbb{R}^N,\ \int_B |\nabla w_a|^2 dy \leq C.$$

Par Gagliardo Nirenberg et Hölder, on écrit que

$$\left(\int_B w_a^2 dy\right)^{\frac{p+1}{2}} \leq C \int_B |w_a|^{p+1} dy \leq C + C\underbrace{\left(\int_B |\nabla w_a|^2 dy\right)^{\beta}}_{\leq C.}$$

Ainsi,

$$\forall s \geq -\log T+1,\ \forall a \in \mathbb{R}^N\ \|w_a(s)\|_{H^1(B)} \leq C$$

(ii) Contrôle uniforme de la norme L^2 de la dérivée en temps :

$$\int_{B_{1/2}} (\partial_s w_a)^2 dy \leq c \int_B (\partial_s w_a)^2 \rho\, dy$$

$$\leq 2C E(w_a(s)) + \frac{2C}{p+1} \int |w_a|^{p+1} \rho\, dy \leq C$$

Par un argument de recouvrement, on déduit que

$$\int_B (\partial_s w_a)^2 dy \leq C,\ \forall s \geq -\log T+1,\ \forall a \in \mathbb{R}^N.$$

En effet, comme la boule unité peut être couverte par k(N) boules de taille 1/2, il suffit de montrer que

$$\forall s \geq -\log T + 1,\ \forall a \in \mathbb{R},\quad \forall |y_0| < 1,$$

$$\int_{|y-y_0|<\frac{1}{2}} (\partial_s w_a)^2\, dy \leq C.$$

On considère donc a dans R^N et |y_0|<1. Pour tout b et y dans R^N, on a

$$w_b(y,s) = w_a(y+(b-a)e^s, s).$$

En dérivant par rapport à s, on voit que

$$\partial_s w_b(y,s) = \partial_s w_a(y+(b-a)e^s, s) + e^s(b-a).\nabla w_a(\ , s).$$

En prenant b = a+y_0 e^{-s}, on voit que

$$\forall y \in \mathbb{R}^N,\ \partial_s w_a(y+y_0, s)^2 \leq 2(\partial_s w_b(y,s))^2 + 2|\nabla w_a(y,s)|^2$$

$$\text{avec } b = a + y_0 e^{-s}$$

Ainsi, le recouvrement marche, on contrôle la norme L^2 de la dérivée en temps, sans poids.

Ceci termine la preuve du théorème, que l'on rappelle :

Théorème : Si T est le "premier" temps d'explosion, alors, pour tout a dans R^N et $s \geqslant -\log T + 1$, on a :

$$\|w_a\|_{H^1(B)} + \|\partial_s w_a(s)\|_{L^2(B)} \leq C$$

où C ne dépend que d'une borne sur la norme de (u_0, u_1) dans H^1_{loc,u} x L^2_{loc,u}, et d'une borne sur T et une borne sur 1/T.