Taux d'explosion au voisinage de la surface d'explosion pour une équation semilinéaire des ondes

Hatem ZAAG
CNRS & DMA
Ecole Normale Supérieure
Paris

Rennes, 17 mars 2005

En collaboration avec Frank Merle
Université de Cergy-Pontoise

L'équation

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + |u|^{p-1}u, \\ u(0) = u_0 \text{ et } u_t(0) = u_1, \end{cases}$$

où
$u(t) : x \in \mathbb{R}^N \to u(x,t) \in \mathbb{R}$,
$u_0 \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N)$ et $u_1 \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N)$.

$$\|v\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{|x-a|<1} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

$$1 < p \text{ et } p \le p_c \equiv 1 + \frac{4}{N-1} \text{ si } N \ge 2.$$

Remarque : $p_c \equiv 1 + \frac{4}{N-1} < 1 + \frac{4}{N-2}$ l'exposant critique de Sobolev.

En quoi p_c est-il critique ?

Lorsque $p = p_c$, il y a invariance conforme de l'équation:

Si $U(\xi, \tau)$ est définie par

$$U(\xi,\tau) = (|x|^2 - t^2)^{\frac{N-1}{2}} u(x,t), \;\; \xi = \frac{x}{|x|^2 - t^2}, \;\; \tau = \frac{t}{|x|^2 - t^2},$$

alors U satisfait la même équation que u.

PROBLÈME DE CAUCHY DANS $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N)$

Cela découle de :

- La résolution du pb. de Cauchy dans $H^1 \times L^2(\mathbb{R}^N)$ (Lindblad et Sogge, Shatah et Struwe)
- La vitesse de propagation finie.

Solution maximale dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N)$

- soit elle existe sur $[0, \infty)$ (**solution globale**),
- soit elle existe sur $[0, \bar{T})$ (**solution singulière**).

Existence de solutions explosant en temps fini

John, Caffarelli et Friedman, Alinhac, Kichenassamy et Litman.

Solutions singulières

Dans ce cas, grâce à **la vitesse de propagation finie**, la solution peut être prolongée dans un **domaine d'influence maximal**

$$\mathcal{D}_u = \{(x,t) \mid t < T(x)\}$$

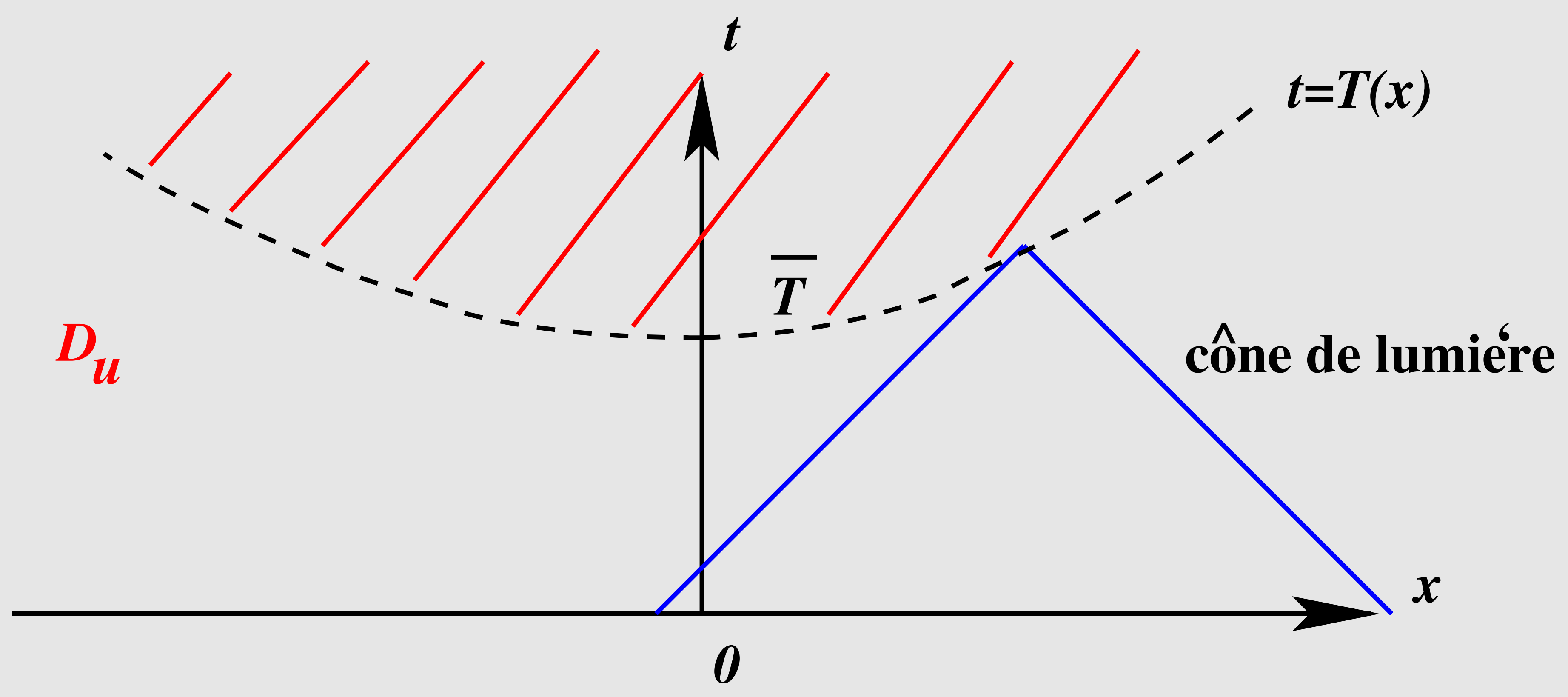
où $t \to T(x)$ est **la surface d'explosion** (ou **la surface singulière**), qui vérifie

$\forall (x,t) \in D_u, \quad D_u$ contient le cône de lumière rétrograde de sommet (x,t).

Ainsi, $t \to T(x)$ est de constante de Lipschitz 1 (l'inverse de la vitesse de propagation).

Remarque : $\bar{T} = \min T(x)$ est appelé **temps d'explosion**. Pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, il y a un "temps local" d'explosion $T(x)$.

Un dessin : domaine d'influence maximal



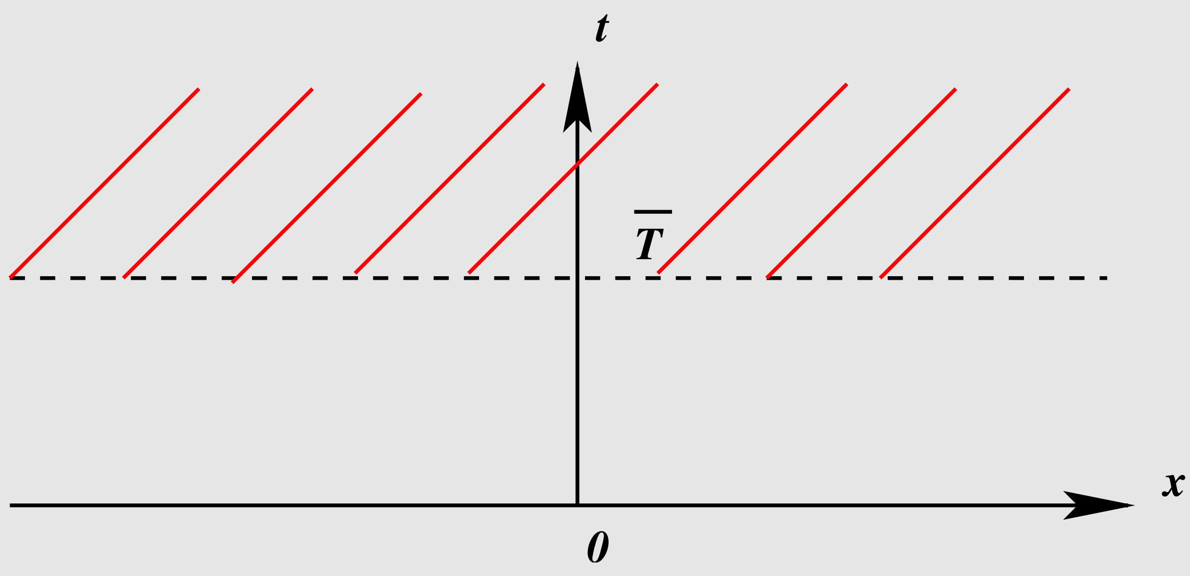
Remarque : comparaison avec l'équation semilinéaire de la chaleur

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1} u$$

avec

$$1 < p < 1 + \frac{4}{N-2} \text{ si } N \geq 2.$$

La solution singulière est une solution maximale dans $C_0(\mathbb{R}^N)$ qui existe sur $[0, \bar{T})$ où $\bar{T}$ est le **temps d'explosion** (et le seul). Elle ne peut être prolongée au delà.



La question : le taux d'explosion

Équation de la chaleur (Giga et Kohn 87, Giga, Matsui et Saysayama 2004)

$$0 < \kappa(p)(\bar{T}-t)^{-\frac{1}{p-1}} \leq \|u(t)\|_{L^\infty} \leq C(\bar{T}-t)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Remarque : le taux d'explosion est donné par la solution de l'EDO associée $v' = v^p$, $v(\bar{T}) = +\infty$.

Équation des ondes : deux réponses:

- Taux d'explosion à l'instant de "sortie" de l'espace de Cauchy $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ ($t \to \bar{T}$).

- Taux d'explosion au voisinage de la surface d'explosion (i.e. de chacun des temps locaux d'explosion, $t \to T(x_0)$).

Indication : le taux est-il donné par l'EDO associée $v'' = v^p$?

Première réponse : taux d'explosion lorsque $t \to \bar{T}$

Th. 0
Pour toute solution u explosant au temps $\bar{T}$,
pour tout $t \in [\frac{3}{4}\bar{T}, \bar{T})$,

$$\|u\|_{L^2_{loc,u}(\mathbb{R}^N)} \le K(\bar{T}-t)^{-\frac{2}{p-1}},$$

$$\left(\|u_t\|_{L^2_{loc,u}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^2_{loc,u}(\mathbb{R}^N)}\right) \le K(\bar{T}-t)^{-\frac{2}{p-1}-1},$$

où $K = K(N, p, \|(u_0,u_1)\|, \bar{T})$.

Remarque importante: Le taux est donné par l'EDO. Il existe une borne inférieure qui sera donnée plus tard.

2e réponse : borne sup sur le taux d'explosion lorsque $t \to T(x_0)$

Th. sup. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $t \in [\frac{3}{4}T(x_0), T(x_0))$:

$$(T(x_0)-t)^{\frac{2}{p-1}} \frac{\|u(t)\|_{L^2(B(x_0,\frac{T(x_0)-t}{2}))}}{(T(x_0)-t)^{N/2}}$$

$$+(T(x_0)-t)^{\frac{2}{p-1}+1}\left(\frac{\|u_t(t)\|_{L^2(B(x_0,\frac{T(x_0)-t}{2}))}}{(T(x_0)-t)^{N/2}} + \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2(B(x_0,\frac{T(x_0)-t}{2}))}}{(T(x_0)-t)^{N/2}}\right) \le K$$

où la constante K ne dépend que de N, p, et d'une borne supérieure sur $T(x_0)$, $1/T(x_0)$ et $\|(u_0,u_1)\|$.

Et la borne inférieure ?
- Si x_0 est un point non caractéristique : résolu.
- Sinon, c'est encore ouvert.

Définition "informelle" : $(x_0, T(x_0))$ est caractéristique si la constante de Lipschitz locale ("la pente") de la surface d'explosion est 1.

Cas d'un point NON caractéristique

- Domaine d'intégration plus large (possibilité de recouvrement).
- La constante K dépend de la constante de Lipschitz locale.
- Borne inférieure (valable si $t \to \bar{T}$ car "$\bar{T} = T(\bar{x})$", non caractéristique).

Th. n. car. Si $(x_0, T(x_0))$ est non caractéristique alors, $\forall t \in [\frac{3}{4}T(x_0), T(x_0))$,

$$0 < \epsilon_0(N,p) \leq \quad (T(x_0)-t)^{\frac{2}{p-1}} \frac{\|u(t)\|_{L^2(B(x_0,T(x_0)-t))}}{(T(x_0)-t)^{N/2}}$$

$$+(T(x_0)-t)^{\frac{2}{p-1}+1} \quad \left(\frac{\|u_t(t)\|_{L^2(B(x_0,T(x_0)-t))}}{(T(x_0)-t)^{N/2}} + \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2(B(x_0,T(x_0)-t))}}{(T(x_0)-t)^{N/2}} \right) \leq K$$

où K dépend en plus de $\delta(x_0) < 1$, la constante de Lipschitz locale.

Preuve de la borne inférieure: nécessite que $(x_0, T(x_0))$ soit non caractéristique. Par l'absurde, si on est sous un certain $\epsilon_0(N,p)$, alors on va pouvoir prolonger la solution au delà de $T(x_0)$.

Réduction au cas NON caractéristique de toutes les bornes supérieures

Les deux premières bornes sup ($t \to \bar{T}$ et $t \to T(x_0)$ avec $(x_0, T(x_0))$ caractéristique ou non) découlent (d'une variante) de la borne supérieure du cas NON caractéristique. En effet,

- "$\bar{T} = T(\bar{x})$" avec $(\bar{x}, T(\bar{x}))$ est non caractéristique.
- Si $(x_0, T(x_0))$ caractéristique, alors
  La demi section du cône de lumière de sommet $(x_0, T(x_0))$ est une section complète du cône de lumière (x_0, T_0), loin de la surface d'explosion, donc forcément "non caractéristique".

La variante :

Cas généralisé d'un point NON caractéristique

Th. g. n. car. Si (x_0, T_0) est tel que $T_0 \leq T(x_0)$ et u est bien définie sur $\mathcal{C}_{x_0,T_0,\delta_0}$ avec $\delta_0 = \delta_0(x_0) \in (0,1)$ et

$$\mathcal{C}_{x_0,T_0,\delta_0} = \{(\xi,\tau) \neq (x_0,T_0) \mid 0 \leq \tau \leq T_0 - \delta_0|\xi - x_0|\},$$

alors, $\forall t \in [\frac{3}{4}T_0, T_0)$,

$$(T_0-t)^{\frac{2}{p-1}} \frac{\|u(t)\|_{L^2(B(x_0,T_0-t))}}{(T_0-t)^{N/2}}$$

$$+(T_0-t)^{\frac{2}{p-1}+1} \left(\frac{\|u_t(t)\|_{L^2(B(x_0,T_0-t))}}{(T_0-t)^{N/2}} + \frac{\|\nabla u(t)\|_{L^2(B(x_0,T_0-t))}}{(T_0-t)^{N/2}} \right) \leq K$$

où K ne dépend que de N, p, et d'une borne supérieure sur $T(x_0)$, $1/T(x_0)$, $\delta_0(x_0) < 1$ et $\|(u_0,u_1)\|$.

Remarque

- En pratique, cette hypothèse équivaut à dire que soit (x_0, T_0) n'est pas sur la surface d'explosion ($T_0 < T(x_0)$), soit $T_0 = T(x_0)$ et la pente est $\delta_0(x_0) < 1$.
- Pas de borne inférieure (sauf si $T_0 = T(x_0)$).

Recouvrement dans le cas NON caractéristique (généralisé)

Proposition 1 (Équivalence de normes sur les sections et les demi-sections)

Soient $\eta \geq 0$, $q \geq 1$ *et* $f = u$, ∇u *ou* $\partial_t u$.
Soient $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $T_0 \leq T(x_0)$ *et* $t_0 \leq T_0$ *tels que* $\mathcal{C}_{x_0,T_0,\delta_0} \subset D_u$ *avec* $\delta_0 \in (0,1)$.
On définit le bord du cône $\mathcal{C}_{x_0,T_0,\delta_0}$ *:*

$$T^*(x) = T_0 - \delta_0 |x - x_0|.$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\sup_{\{x \mid |x-x_0| \leq \frac{T_0-t_0}{\delta_0}\}} (T^*(x) - t_0)^\eta \int_{B(x,T^*(x)-t_0)} |f(\xi,t_0)|^q d\xi \\ \leq \quad & C(\delta_0,\eta) \sup_{\{x \mid |x-x_0| \leq \frac{T_0-t_0}{\delta_0}\}} (T^*(x) - t_0)^\eta \int_{B(x,\frac{T^*(x)-t_0}{2})} |f(\xi,t_0)|^q d\xi. \end{aligned}$$

Simplification pour la présentation

Je prends $\delta_0 = 0$, cela revient à supposer que $x_0 = \bar{x}$ et $T(x_0) = T(\bar{x}) = \bar{T}$.

On rappelle que u est définie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,\bar{T})$.

Cela revient à démontrer **Th. 0** qui donne la borne supérieure à la sortie de l'espace de Cauchy, cad lorsque $t \to \bar{T}$.

Remarque : On ne présente que le cas $p < p_c$. À la fin, je donne un commentaire sur le cas $p = p_c$.

Plan de la preuve

- ▷ Transformation auto-similaire et existence d'une fonctionnelle de Lyapunov.
- ▷ Interpolation pour gagner de la régularité.
- ▷ Estimations de type Gagliardo-Nirenberg.

TRANSORMATION AUTO-SIMILAIRE pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$

$$w_{x_0}(y,s) = (\bar{T}-t)^{\frac{2}{p-1}} u(x,t),\ y = \frac{x-x_0}{\bar{T}-t},\ s = -\log(\bar{T}-t).$$

Équation sur $w = w_{x_0}$: Pour tous $y \in \mathbb{R}^N$ et $s \geq -\log \bar{T}$:

$$\partial_s^2 w - \tfrac{1}{\rho}\mathrm{div}\,[\rho\nabla w - \rho(y.\nabla w)y] + \tfrac{2(p+1)}{(p-1)^2} w - |w|^{p-1}w$$

$$= -\tfrac{p+3}{p-1}\partial_s w - 2y.\nabla\partial_s w$$

avec

$$\rho(y) = (1-|y|^2)^\alpha \text{ et } \alpha \equiv \frac{2}{p-1} - \frac{N-1}{2} > 0.$$

Rq: Si $p = p_c$, alors $\alpha = 0$ et $\rho \equiv 1$. Voir plus loin.

— LaTeX prosper —

La borne supérieure en variable $w(y,s)$

Th. 0' : Pour tous $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $s \geq -\log \bar{T} + 1$,

$$\|w_{x_0}(s)\|_{\mathrm{H}^1(B)} + \|\partial_s w_{x_0}(s)\|_{\mathrm{L}^2(B)} \leq K$$

où $B = B(0,1)$, $K = K(N, p, \|(u_0, u_1)\|, \bar{T})$.

UNE FONCTIONNELLE DE LYAPUNOV (Antonini-Merle)

$$E(w) = \int_B \left(\frac{1}{2}(\partial_s w)^2 + \frac{(p+1)}{(p-1)^2} w^2 - \frac{1}{p+1}|w|^{p+1} \right) \rho dy$$

$$+\tfrac{1}{2} \int_B \left(|\nabla w|^2 - (y.\nabla w)^2 \right) \rho dy$$

$$\rho(y) = (1-|y|^2)^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{2}{p-1} - \frac{N-1}{2} \geq 0.$$

- ▷ Si $p < p_c$, alors $\alpha > 0$.
- ▷ Si $p = p_c$, alors $\alpha = 0$ and $\rho \equiv 1$.
- ▷ Si $p > p_c$, alors E n'est même pas définie.

Ainsi, p_c est critique.

Bornes sur E et sa dissipation (Antonini-Merle)

Lemme 1 (Monotonie) *Pour tous* s_1 *et* s_2*:*

$$E(w(s_2)) - E(w(s_1)) = -2\alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_B (\partial_s w)^2 (1-|y|^2)^{\alpha-1} dy ds.$$

Lemme 2 (Critère d'explosion) *Si une solution* W *satisfait* $E(W(s_0)) < 0$ *pour un certain* $s_0 \in \mathbb{R}$*, alors* W *explose en temps fini* $S > s_0$*.*

Bornes sur E et sa dissipation : Pour tous $s \geq -\log \bar{T}$, $s_2 \geq s_1 \geq -\log \bar{T}$

$$0 \leq E(w(s)) \leq E(w(-\log \bar{T})) \quad \leq \quad C_0,$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \int_B (\partial_s w)^2 (y,s)(1-|y|^2)^{\alpha-1} dy ds \quad \leq \quad \frac{C_0}{2\alpha}$$

où $C_0 = C_0(\|(u_0,u_1)\|, \bar{T})$.

BUT

Démontrer que w, ∇w et $\partial_s w$ sont bornés dans $L^2(B(0,1))$. Comme ils apparaissent dans l'expression de E (avec un poids) :

$$\begin{aligned} E(w) &= \int_B \left(\frac{1}{2}(\partial_s w)^2 + \frac{(p+1)}{(p-1)^2}w^2 - \frac{1}{p+1}|w|^{p+1}\right)\rho dy \\ &+\frac{1}{2}\int_B \left(|\nabla w|^2 - (y.\nabla w)^2\right)\rho dy, \end{aligned}$$

il suffit de borner $\int w^{p+1}\rho$.

Rq. On se débarrasse du poids avec un argument de recouvrement.

Rq. Comme on dispose d'une moyenne (en temps) d'une intégrale en espace sur $\partial_s w$, on cherchera dans un premier temps des moyennes en temps d'intégrales en espace des termes apparaissant dans la fonctionnelle E.

— LaTeX prosper —

CONTRÔLE D'INTÉGRALES EN ESPACE ET EN TEMPS

D'abord, on intègre $E(w)$ entre s_1 et s_2 :

$$\int_{s_1}^{s_2} E(w(s))ds = \int_{s_1}^{s_2}\int_B \left(\frac{1}{2}(\partial_s w)^2 + \frac{(p+1)}{(p-1)^2}w^2 - \frac{1}{p+1}|w|^{p+1}\right)\rho dy$$
$$+ \quad \tfrac{1}{2}\int_{s_1}^{s_2}\int_B \left(|\nabla w|^2 - (y.\nabla w)^2\right)\rho dy$$

Remarquez que $\iint w^{p+1}$ contrôle tous les autres termes dans $\int E$.

2nd IDENTITÉ

On multiplie l'équation sur w par $w\rho$, on intègre sur $B \times (s_1, s_2)$, on IBP et on utilise la définition de $\int E$ pour écrire :

$$\frac{(p-1)}{2(p+1)} \int_{s_1}^{s_2} \int_B |w|^{p+1} \rho dy = \int_{s_1}^{s_2} E(w(s)) ds$$

$$+ \quad \int_{s_1}^{s_2} \int_B \left(-(\partial_s w)^2 \rho - \partial_s w y.\nabla w \rho - \partial_s w w y.\nabla \rho \right) dyds$$

$$+ \quad \frac{1}{2} \left[\int_B \left(w\partial_s w + \left(\frac{p+3}{2(p-1)} - N \right) w^2 \right) \rho dy \right]_{s_1}^{s_2}.$$

Proposition 2 *Pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *et* $s \geq -\log \bar{T} + 1$,

$$\int_s^{s+1} \int_B |w_{x_0}|^{p+1} \rho dy ds \leq C(C_0, N, p, T).$$

Rq. Il y a un poids...

PREUVE : À l'aide de Holder, Hardy, ... on va contrôler tous les termes de droite de l'identité précédente par

$$\frac{C}{\epsilon} + C\epsilon \int_{s_1}^{s_2} \int_B |w_{x_0}|^{p+1} \rho dy ds,$$

après, on prendra ϵ petit.

On obtient donc

Corollaire 1 *Pour tous* $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *et* $s \geq -\log \bar{T} + 1$,

$$\int_s^{s+1} \int_{B_{1/2}} \left((\partial_s w_{x_0})^2 + |\nabla w_{x_0}|^2 + |w_{x_0}|^{p+1} + |w_{x_0}|^2 \right) dyds \leq C$$

où $B_{1/2} \equiv B(0, 1/2)$, $C = C(N, p, \|(u_0, u_1)\|, \bar{T})$.

Rq. On obtient d'abord des estimations dans $B \equiv B(0, 1)$ avec le poids ρ.

Nous sommes prêts maintenant pour démontrer le théorème que je rappelle ici :

Th. Pour tout $s \geq -\log \bar{T} + 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_B \left((\partial_s w_{x_0})^2 + |\nabla w_{x_0}|^2 + |w_{x_0}|^2 \right) dy \leq K$$

où $B = B(0, 1)$ et $K = K(N, p, \|(u_0, u_1)\|, \bar{T})$.

Étape 1 : Contrôle de $\int_B |w_{x_0}(y,s)|^2 dy$

On part de

$$\int_s^{s+1}\int_{B_{1/2}} \left((\partial_s w_{x_0})^2 + |w_{x_0}|^2\right) dyds \le C.$$

Soit $g(s) = \left(\int_{B_{1/2}} w_{x_0}(y,s)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$. On écrit

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^2(s,s+1)} &= \left(\int_s^{s+1}\int_B w^2 dyds\right)^{\frac{1}{2}} \le C \\
\|\partial_s g\|^2_{L^2(s,s+1)} &= \int_s^{s+1} ds \frac{\left(\int_{B_{1/2}} w\partial_s w dy\right)^2}{4\int_{B_{1/2}} w^2 dy} \le \frac{1}{4}\int_{s_1}^{s_2} ds \int_{B_{1/2}} (\partial_s w)^2 dy \le C_0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $g \in H^1(s,s+1) \subset L^\infty(s,s+1)$ (Sobolev en dim 1), donc $\int_{B_{1/2}} |w_{x_0}|^2 dy \le C$.

Maintenant, on étend le domaine d'intégration à B.
On prend $x_0 = 0$. Comme

$$\forall b \in \mathbb{R}^N, \int_{|y|<\frac{1}{2}} |w_b(y,s)|^2 dy \le C$$

$$w_b(y,s) = w_0(y + be^s, s),$$

alors ($z = y + be^s$)

$$\forall b \in \mathbb{R}^N, \int_{|z-be^s|<\frac{1}{2}} |w_0(z,s)|^2 dz \le C$$

+ recouvrement, ceci donne $\int_{|z|<1} |w_0(z,s)|^2 dz \le C$.

Étape 2 : Contrôle de $w_{x_0}(s)$ dans $\mathrm{L}^r_{\mathrm{loc}}$

Proposition 3
Pour tous $s \geq -\log \bar{T} + 1$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_B |w_{x_0}(y,s)|^{\frac{p+3}{2}} dy \leq C$$

où $B = B(0,1)$.

Preuve : Ceci découle de la borne sur $\int w^2$ et $\iint w^{p+1}$ par interpolation ($\mathrm{H}^1 \subset \mathrm{L}^\infty$ en dimension 1).

Étape 3 : Contrôle du gradient dans $L^2_{loc,u}$

Lemme 3 *Pour tous* $s \geq -\log \bar{T} + 1$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_B |w_{x_0}|^{p+1} \leq C \left(\int_B |w_{x_0}|^{\frac{p+3}{2}} dy \right)^\gamma \left(\int_B |\nabla w_{x_0}|^2 dy \right)^\beta,$$

où $\gamma(p,N) > 0$ *et* $\beta = \beta(p,N) \in [0,1)$.

Preuve : Gagliardo-Nirenberg.

Proposition 4 *Pour tous* $s \geq -\log \bar{T} + 1$ *et* $a \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_B |\nabla w_{x_0}(y,s)|^2 dy \leq C.$$

Preuve formelle : Si tous les poids étaient égaux à 1, alors on aurait de la fonctionnelle E :

$$\int_B |\nabla w_{x_0}|^2 dy \leq C + \int_B |w_{x_0}|^{p+1} dy$$

+ Gagliardo Nirenberg

$$\int_B |w_{x_0}|^{p+1} \leq C \left(\int_B |w_{x_0}|^{\frac{p+3}{2}} dy \right)^{\gamma} \left(\int_B |\nabla w_{x_0}|^2 dy \right)^{\beta}.$$

Comme $p < p_c$, alors $\beta < 1$ et on obtient la conclusion.

Étape 4 : estimation sur $\partial_s w_{x_0}$: On utilise l'équation sur w_{x_0}.

UN commentaire sur le cas $p = p_c$

On fait la transformation autosimilaire :

$$w_a(y,s) = (\bar{T} - t)^{\frac{2}{p-1}} u(x,t),\ y = \frac{x - x_0}{\bar{T} - t},\ s = -\log(\bar{T} - t).$$

Équation sur $w = w_{x_0}$ sous forme divergence :

Pour tous $y \in \mathbb{R}^N$ et $s \geq -\log \bar{T}$:

$$\partial_s^2 w - \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,[\rho \nabla w - \rho(y.\nabla w)y] + \frac{2(p+1)}{(p-1)^2} w - |w|^{p-1} w$$

$$= -\frac{p+3}{p-1}\partial_s w - 2y.\nabla \partial_s w \qquad \text{où } \rho(y) = (1 - |y|^2)^\alpha$$

et

$$\text{si } p < p_c,\ \ \alpha \equiv \frac{2}{p-1} - \frac{N-1}{2} > 0,$$

$$\text{si } p = p_c,\ \ \alpha = 0 \text{ et } \rho \equiv 1.$$

UNE FONCTIONNELLE DE LYAPUNOV (Antonini-Merle)

$$E(w) = \int_B \left(\frac{1}{2}(\partial_s w)^2 + \frac{(p+1)}{(p-1)^2} w^2 - \frac{1}{p+1}|w|^{p+1} \right) \rho dy$$

$$+\tfrac{1}{2} \int_B \left(|\nabla w|^2 - (y.\nabla w)^2 \right) \rho dy$$

$$\rho(y) = (1-|y|^2)^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{2}{p-1} - \frac{N-1}{2} \geq 0.$$

- Si $p < p_c$, alors $\alpha > 0$.
- Si $p = p_c$, alors $\alpha = 0$ and $\rho \equiv 1$.
- Si $p > p_c$, alors E n'est même pas définie.

Ainsi, p_c est critique.

Lemme 4 (Monotonie) *Pour tous s_1 et s_2:*
($p < p_c$, Antonini-Merle),

$$E(w(s_2)) - E(w(s_1)) = -2\alpha \int_{s_1}^{s_2} \int_B (\partial_s w)^2 (1 - |y|^2)^{\alpha - 1} dy ds.$$

($p = p_c$: dégénérescence),

$$E(w(s_2)) - E(w(s_1)) = - \int_{s_1}^{s_2} \int_{\partial B} (\partial_s w(\sigma, s))^2 d\sigma ds.$$

Rq. $2\alpha(1 - |y|^2)^{\alpha-1} \to \delta_{\partial B}$ lorsque $p \to p_c$.